ИНСТРУМЕНТЫ МНОГОМАСШТАБНЫХ ТРАНСФОРМАЦИЙ И ПРИМЕРЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Юдин М.Н. (РГГРУ-МГРИ)

Содержание

1. Многмасштабный анализ данных:
   - вычислительный гармонический анализ,
   - нелинейные уравнения в частных производных,
   - гибридные алгоритмы (CHA & PDE).

2. Примеры обработки экспериментальных данных посредством CHA и PDE.

Многмасштабный анализ данных

Современная математическая обработака данных базируется на двух основных подходах: вычислительном гармоническом анализе (Computational Harmonic Analysis – CHA), уравнениях в частных производных (Partial Differential Equations – PDE).
Оба направления опираются на понятие многомасштабного анализа (multiscale analysis).

Многомасштабным анализом называют генерацию последовательности сглаженных (грубых, схематических) версий $u_\lambda(x)$ *исходных данных* $u_0(x)$*, когда параметр* λ *возрастает* (*Moler, Solemeni, 1995).*

Вычислительный гармонический анализ

Некоторые обозначения

N – множество положительных целых чисел;

Z – множество всех целых чисел;

R – множество всех вещественных чисел;

C – множество всех комплексных чисел;

$\boldsymbol{C}^{k}(\boldsymbol{X})$ – пространство функций, которые являются k раз непрерывно дифференцируемыми в ***X***,

$\boldsymbol{C}^{\infty}(\boldsymbol{X})$ – пространство функций, дифференцируемых бесконечное число раз;

$\boldsymbol{L}^{1}(\boldsymbol{R})$ – пространство абсолютно интегрируемых функций на множестве R.

$\boldsymbol{L}^{2}(\boldsymbol{R})$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом на множестве ***R***.

Вычислительный гармонический анализ

Скалярное произведение и норма в пространстве *L*^{2}

Скалярное произведение двух комплекснозначных функций *f, g* ϵ $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})$ определяется соотношением

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt$$

где черта над функцией g обозначает комплексное сопряжение,

символ “ :=“ означает “по определению”.

Норма (или энергия) функции *f* ϵ $L^2(R)$

$$\| f \|^2 := \langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Вычислительный гармонический анализ

Интегральные преобразования данных

Преобразование состоит в том, что исходным данным $f(x)$ ставится в соответствие их образ $\hat{f}(y)$

$$\hat{f}(y) := \langle f(x), K(y,x) \rangle = \int_a^b f(x)\overline{K(y,x)}dx$$

Функция $K(x,y)$ задана и называется ядром интегрального преобразования.

Успех решения задачи обработки данных в значительной степени зависит от удачного выбора ядра.

Иногда $K(x,y)$ называют анализирующей функцией.

Вычислительный гармонический анализ

Пример 1. Аналитическое преобразование Фурье (CFT)

Жан Батист Жозеф Фурье
(1768-1830)

Прямое и обратное AFT

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{+i\omega x} dx,$$

$$K(\omega; x) = e^{i\omega x}, \quad \overline{K(\omega; x)} = e^{-i\omega x},$$

$$e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x$$

Вычислительный гармонический анализ

Пример 2. Аналитическое вейвлет-преобразование (CWT)

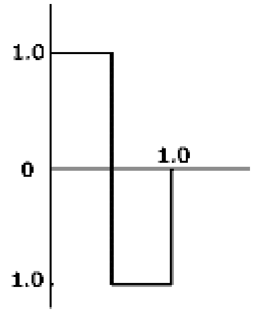
За последние 27 лет в прикладной математике был развит и оформился в самостоятельное направление раздел, получивший название *wavelet transform* («*вейвлет-преобразование*»). Английский термин “wavelet” (фр. “ondolette”) «маленькая волна», «всплеск») предложил J. Morle (Ж. Морле) применительно к обработке данных сесморазведки в 1984 г.

В настоящее время преобразования данных этого класса играет фундаментальную роль в теории аппроксимации.

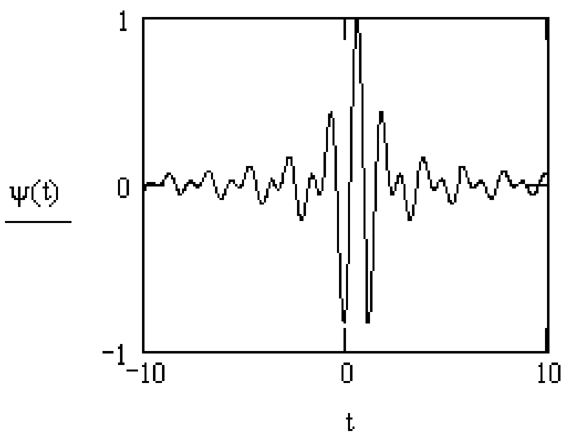
http://crydee.sai.msu.ru/~vab/Wavelet.rsc/waveletpap.htm

Вычислительный гармонический анализ

Что такое вейвлет?



Вейвлет Хаара



Вейвлет Шеннона

Первый «вейвлет» бы построенн Хааром в 1909 г.

Точное восстановление аналогового сигнала (с ограниченным по ширине Фурье-спектром) по его значениям на равномерной сетке дает теорема Котельникова-Шеннона. Связанный с этой теорией вейвлет получил название *вейвлет Шеннона*.

Вычислительный гармонический анализ

Что такое вейвлет?

Пусть фиксирована функция $\psi(t)$, имеющая нулевое интегральное среднее $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$ и достаточно быстро стремящаяся к нулю при $t \to \infty$. Назовем ее *материнским вейвлетом*. На основе этого вейвлета путем сдвигов и изменения масштаба построим функцию

$$\psi_{\sigma,\tau}(t) := \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)$$

в которой σ – параметр масштаба,

τ – параметр сдвига.

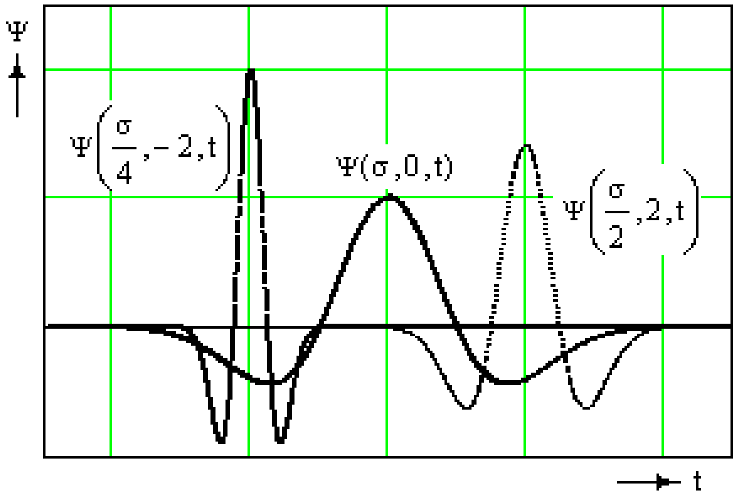
Вычислительный гармонический анализ

Что такое вейвлет?

Пример. Вейвлетами являются производные функции Гаусса:

$$\varphi(t) = \exp\left(-t^2/2\right)$$

$$\psi(t) = (-1)^{n+1}\frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t^n},\ n = 1, 2, \ldots$$



На рисунке приведены графики трех вейвлетов “Mexican Hat” (*n* = 2) на различных масштабах σ и сдвигах τ.

Вычислительный гармонический анализ

Пример 2. Аналитическое вейвлет-преобразование (CWT)

Прямое CWT:

$$\widehat{f}(\sigma,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{K(\sigma,\tau;x)}dx,$$

$$K(\sigma,\tau;x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\psi\left(\frac{x-\tau}{\sigma}\right)\equiv\psi_{\sigma,\tau}(x),$$

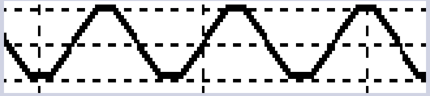
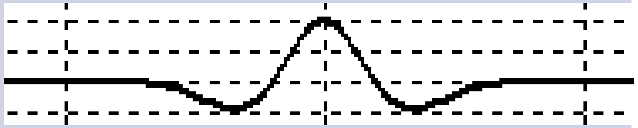
Обратное CWT:

$$f(x)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\sigma,\tau)K(\sigma,\tau;x)\frac{d\sigma}{\sigma^2}d\tau,$$

$$0<C_\psi:=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(\xi)|^2/|\xi|\,d\xi<\infty$$

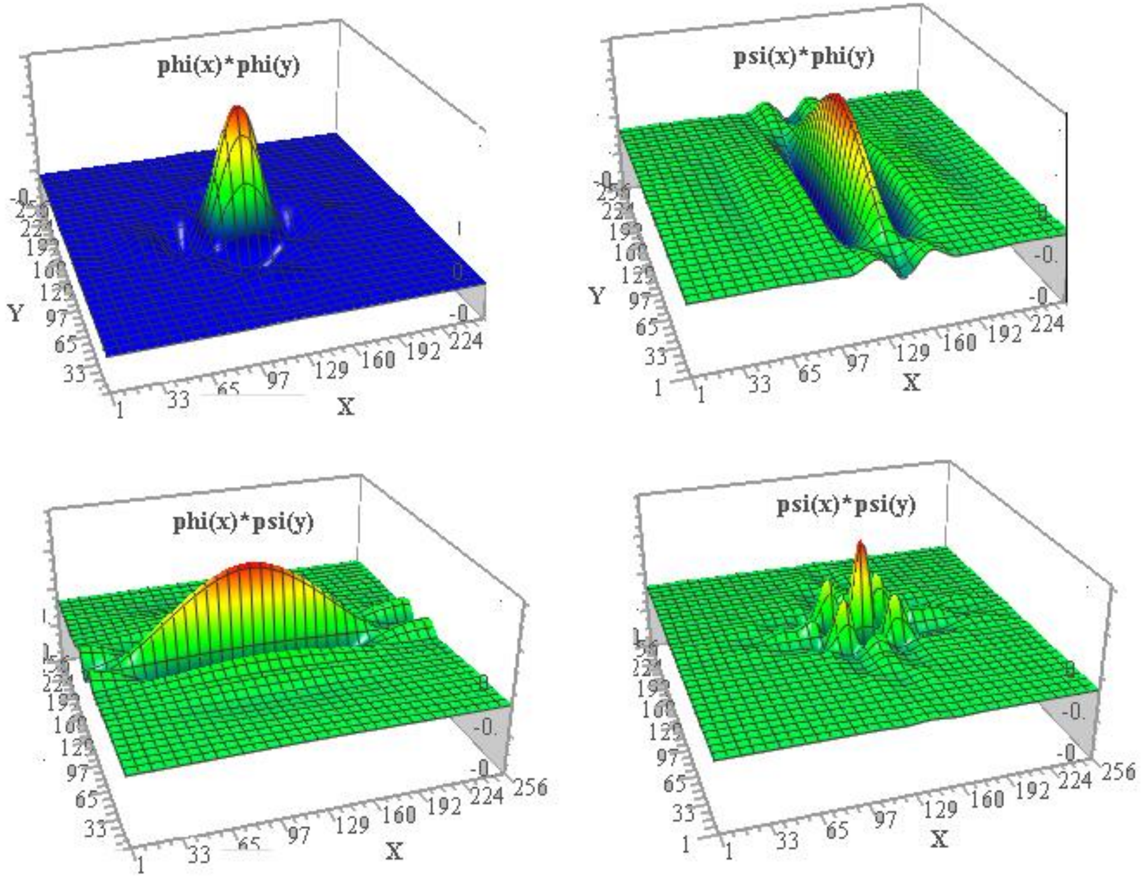
Вычислительный гармонический анализ

Сравнение элементов CFT и CWT

Transform	CFT	CWT
Basic function	$\exp(it)$ 	$\psi(t)$ 
Kernel $K(\cdot)$	$K(\omega,t)=\exp(i\omega t)$	$K(\sigma,\tau,t)=\psi_{\sigma,\tau}(t)$
Direct transform	$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\exp(i\,\omega t)}dt$	$\breve{f}(\sigma,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\psi_{\sigma,\tau}(t)}dt$
Inverse transform	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\omega)\exp(i\omega t)dt$	$f(t)=\frac{1}{C_{\psi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\breve{f}(\sigma,\tau)\psi_{\sigma,\tau}(t)\frac{1}{\sigma^{2}}d\sigma d\tau$

Вычислительный гармонический анализ

Двумерные вейвлеты



Вычислительный гармонический анализ

Дискретные преобразования цифровых данных

Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (DFT)

Прямое DFT:
$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-i\frac{2\pi mn}{N}\right), \quad n = 0,\dots,N-1,$$

Обратное DFT:
$$f_m = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp\left(i\frac{2\pi mn}{N}\right), \qquad m = 0,\dots,N-1.$$

Вычислительный гармонический анализ

Прямое дискретное вейвлет-преобразование (DWT)

Положим $\sigma = 2^j$ и $\tau = k2^j$, где $j, k \in \mathbb{Z}$, придем к ортонормированному базису (ОНБ) в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ [Добеши, 2001]:

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k)$$

Коэффициенты Фурье сигнала $f(t)$ по системе функций $\psi_{j,k}(t)$ равны

$$\breve{f}_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k)}dt$$

Такой выбор величин σ и τ ведет к конструкции кратноразрешающего анализа.

Вычислительный гармонический анализ

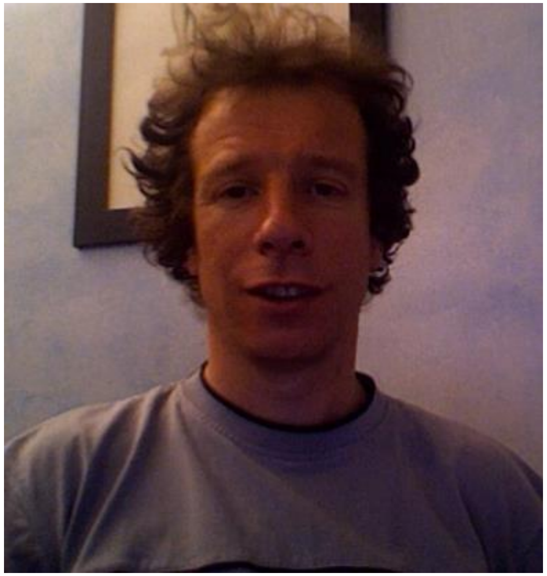
Быстрое дискретное вейвлет-преобразование

Подобно дискретному преобразованию Фурье (DFT), дискретное вейвлет-преобразование (DWT) оперирует вектором данных.

В отличие от преобразования Фурье, DWT допускает использование, фактически, бесконечного многообразия различных анализирующих функций. Различные вейвлеты отличаются друг от друга локализацией в пространстве и тем, как они сглаживают исходный сигнал.

Вычислительный гармонический анализ

В основе быстрого дискретного вейвлет-преобразования лежит *кратноразрешающий анализ* (*multiresolution analysis - MRA*)



Stephane Mallat

В явном виде *кратноразрешающий анализ* (*MRA*) был сформулирован С.Малла и И.Мейером осенью 1986 г.

MRA использует ортонормированные базисы вейвлетов как инструмент для описания «приращения информации», необходимого для перехода от грубого приближения к приближению более высокого разрешения.

Вычислительный гармонический анализ

Ingrid Daubechies

С помощью *MRA* в 1987 году И. Добеши (Ingrid Daubechies) построила бесконечную серию вейвлетов, обладающих основным свойством системы Хаара – ортогональностью и компактным носителем.

Ортогональные (ортонормированные) вейвлеты замечательны тем, что существует очень быстрый алгоритм разложения по ним любого сигнала. Этот алгоритм называется *алгоритмом Малла*. Исходная информация для него – сигнал, что на практике означает просто массив длины N.

http://en.wikipedia.org/wiki/Ingrid_Doubechies

Вычислительный гармонический анализ

FWT: Алгоритм Малла

Процедура такова: по исходной информации строятся два массива длиной N/2. Первый – исходный сигнал, сглаженный фильтром, соответствующим масштабирующей функции $\varphi(t)$(коэффициенты $\{h_k\}$), и прореженный вдвое; второй – исходный сигнал, обработанный вейвлет-фильтром $\psi(t)$ (коэффициенты $\{g_k\}$), и также прореженный вдвое. На языке кратноразрешающего анализа первый сигнал – более грубая версия исходного. Второй – различия между версиями сигнала на разных масштабах. Далее та же процедура применяется к сглаженному сигналу. Возникают два массива длиной N/4, и т.д. Результат работы алгоритма – набор высокочастотных деталей плюс самая сглаженная (т.е. самая грубая) версия исходного сигнала. Суммарная длина этих массивов равна N

Вычислительный гармонический анализ

FWT: Алгоритм Малла

x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13 x14 x15 x16	➔ H+G	s1 d1 s2 d2 s3 d3 s4 d4 s5 d5 s6 d6 s7 d7 s8 d8	➔ Перест ановка	s1 s2 s3 s4 s5 s6 s7 s8 d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8	➔ H+G	S1 D1 S2 D2 S3 D3 S4 D4 d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8	➔ Переста новка	S1 S2 S3 S4 D1 D2 D3 D4 d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8	…➔… и т. д.	S1 S2 D1 D2 D1 D2 D3 D4 d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8

Вычислительный гармонический анализ

FWT: Алгоритм Малла

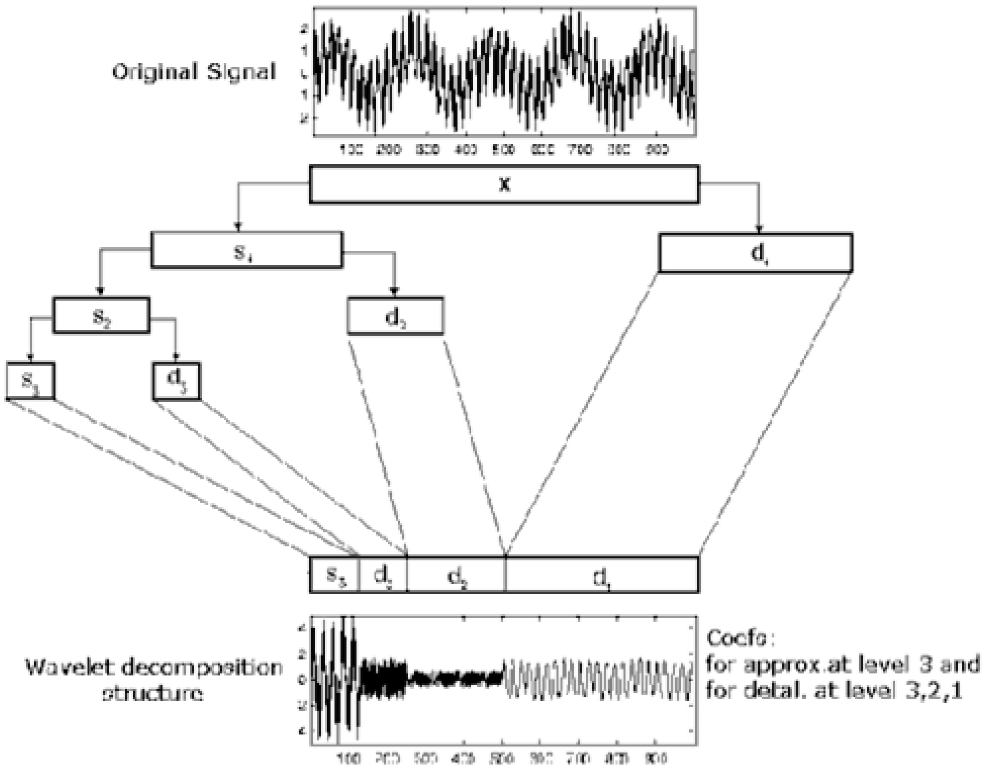
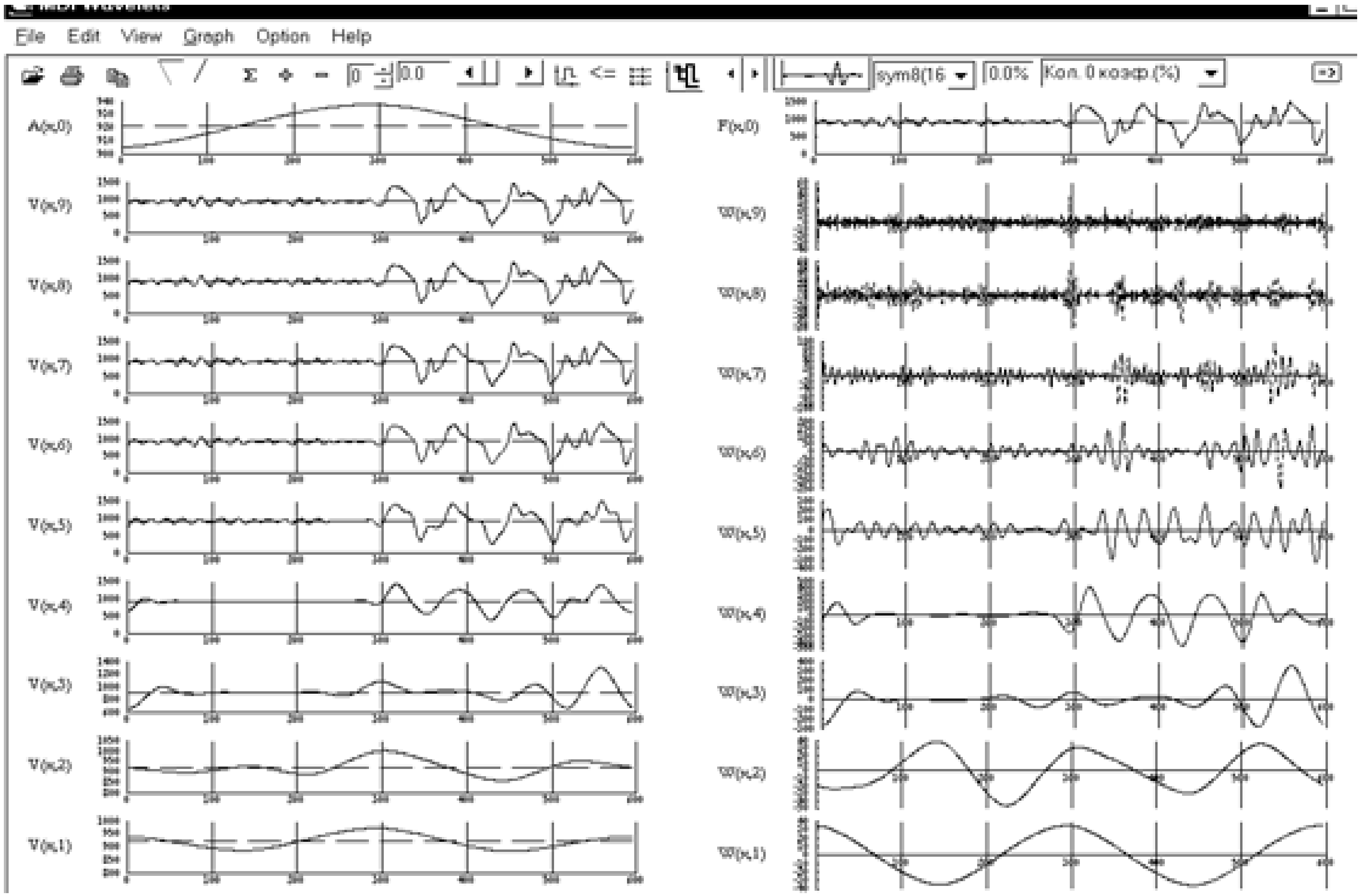


Диаграмма декомпозиции : x – исходный сигнал, s_i – аппроксимации, d_i – детализации

Вычислительный гармонический анализ

Иллюстрация кратноразрешающего анализа



Вычислительный гармонический анализ

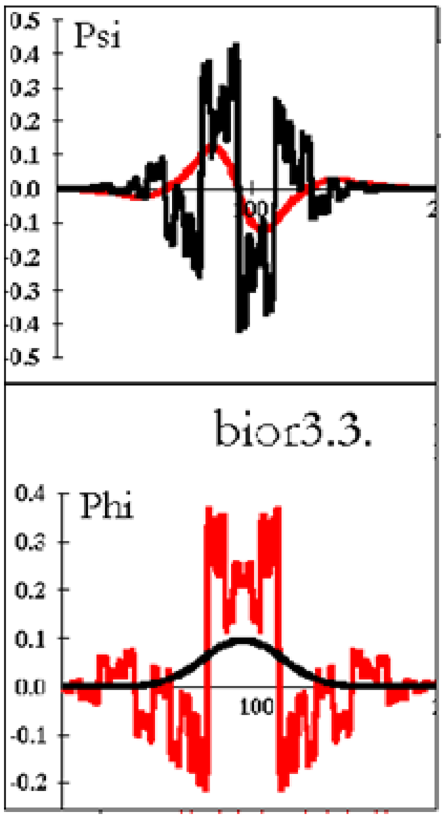
Как выглядят вейвлеты?

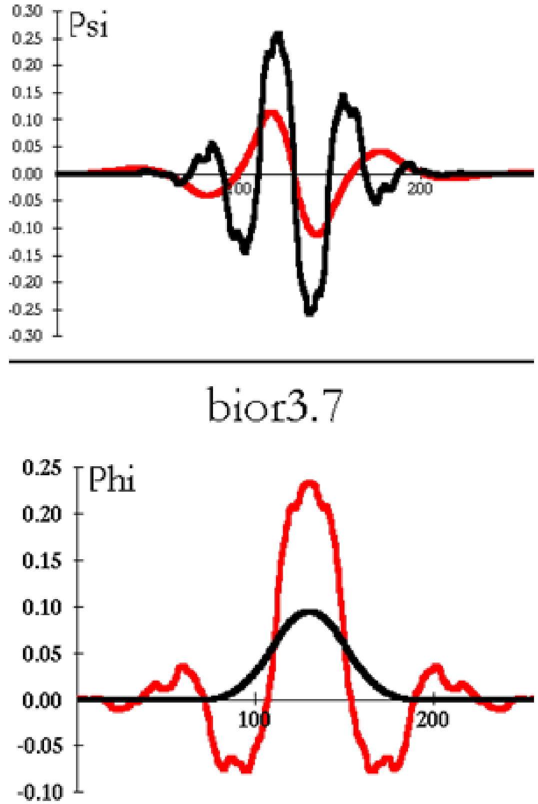
Большинство масштабирующих функций и вейвлетов, используемых при быстром дискретном вейвлет-преобразовании, не имеют аналитического выражения. Их форма полностью определяются коэффициентами фильтра. Чтобы получить график анализирующей функции нужно задать единицу в соответствующем месте вектора вейвлет-коэффициентов и выполнять обратное DWT.

Вычислительный гармонический анализ

Как выглядят вейвлеты?

«bior3.3» «bior3.7».





<= вейвлеты

масштабирующие <= функции

Биортогональные вейвлеты.

СНА. Вейвлет-преобразование + компьютерная томография

В последнее десятилетие на базе идей вейвлет-анализа появился класс многомасштабных трансформаций данных, которые включают дополнительный параметр – ориентацию анизотропных линейных сегментов. Этот класс интегральных трансформаций используют идеи, содержащиеся в *преобразовании Радона*, – математическом аппарате, лежащем в основе компьютерной томографии. Преобразования оперируют тремя основными параметрами:

масштабом (*scale*),

положением (*location*) ,

ориентацией (*orientation*) линейных сегментов данных.

СНА. Список основных интегральных трансформаций данных

Приведем перечень основных модификаций интегральных преобразований рассматриваемого класса:

beamlet transform (бимлет-преобразование),

ridgelet transform (риджлет-преобразование),

curvelet transform (курвлет-преобразование).

Эти и подобные им трансформация двумерных и многомерных данных обладают высокой чувствительностью и точностью при обнаружении и выделении объектов и их границ. Для краткости иногда будем называть их одним именем

бимлет-преобразования.

Основные ссылки делаются на сайты в интернете www.isye.gatech.edu/~beamlab
Beam – луч, *beamlet* – маленький луч, лучик, штрих, отрезок

CHA. Ridgelet Transform (Риджлет-преобразование)

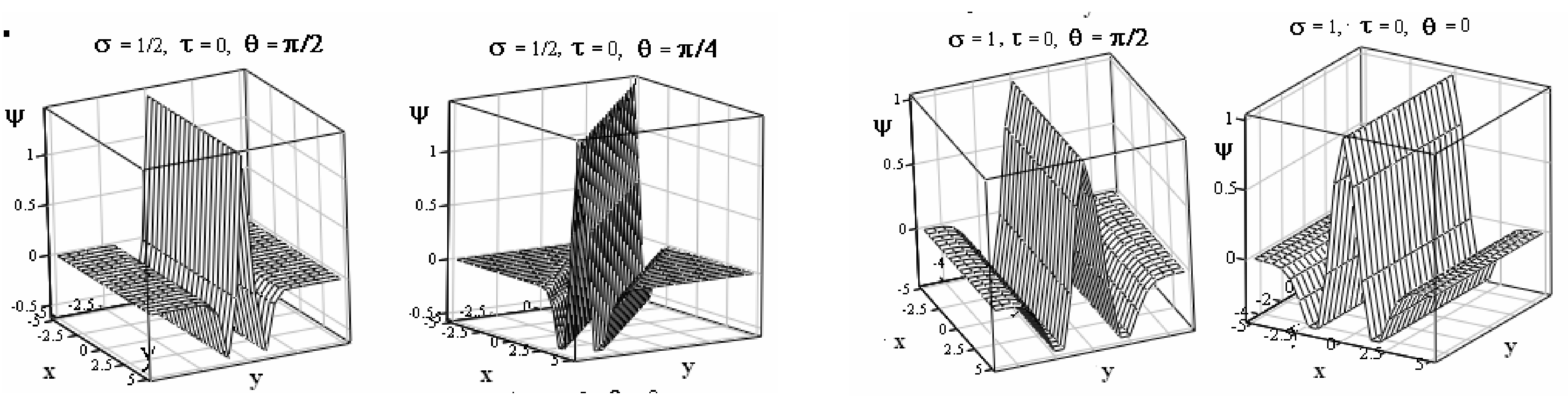
Риджлет-функции.

Пусть функция $\psi(t) \in \mathbf{L}^2(R)$ является вейвлетом.

Для любых $\sigma > 0$, $\tau \in R$ и $\theta \in [0, 2\pi)$ определяется двумерный риджлет:

$$\psi_{\sigma,\tau,\theta}(x, y) = \sigma^{-1/2}\psi\left(\left(x\cos\theta + y\sin\theta - \tau\right)/\sigma\right)$$

Риджлет постоянен вдоль прямых $t = x\cos\theta + y\sin\theta,\ t = const$



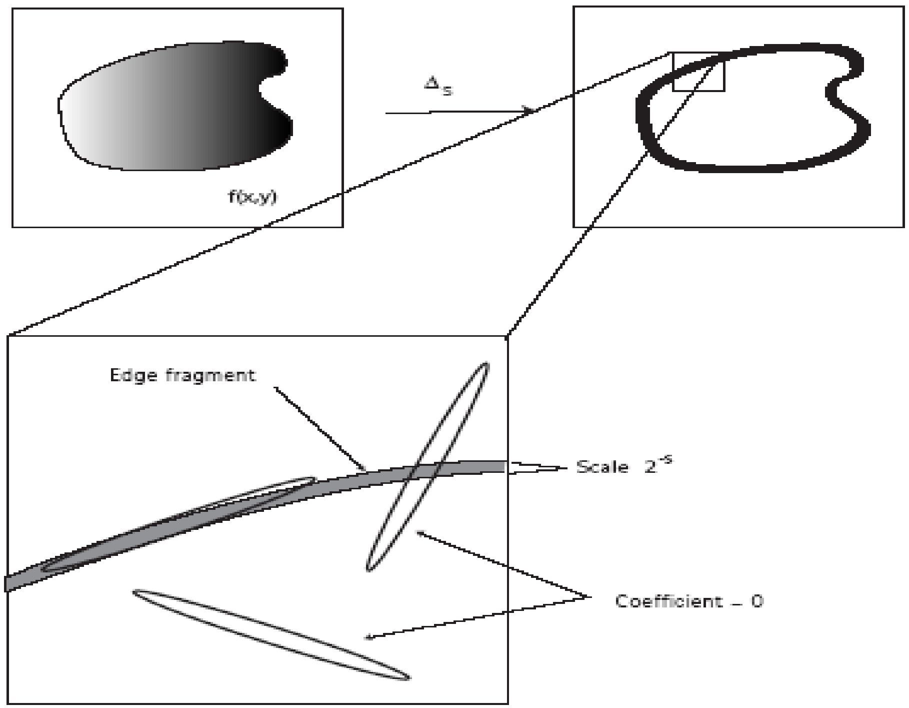
Графики риджлетов

CHA. Curvelet Transform (Курвлет-преобразование)

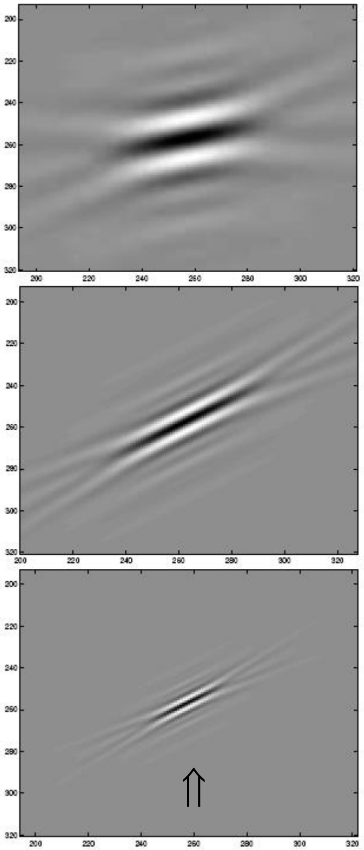
Курвлет удовлетворяет отношению масштабов, которое говорит о том, что ширина курвлет-элемента примерно равна квадрату его длины; *width~length*^{2}. Можно представлять о курвлет-преобразование как многомасштабную пирамиду с многими направлениями и положениями в каждом масштабе длины и иглообразными элементами (или 'жирными' сегментами) на масштабах с высоким разрешением. E. J. Cand`es и D. L. Donoho строят компактные структуры из курвлетов (γ_μ) следующим образом

$$f = \sum_m \langle f, g_m \rangle g_m, \quad \|f\|_{L^2}^2 = \sum_m \left|\langle f, g_m \rangle\right|^2$$

CHA. Curvelet Transform (Курвлет-преобразование)



⇑ Верхняя фигура представляет объект анализа. Нижняя картинка схематически изображает часть выделяемой границы вместе с тремя положениями курвлетов.



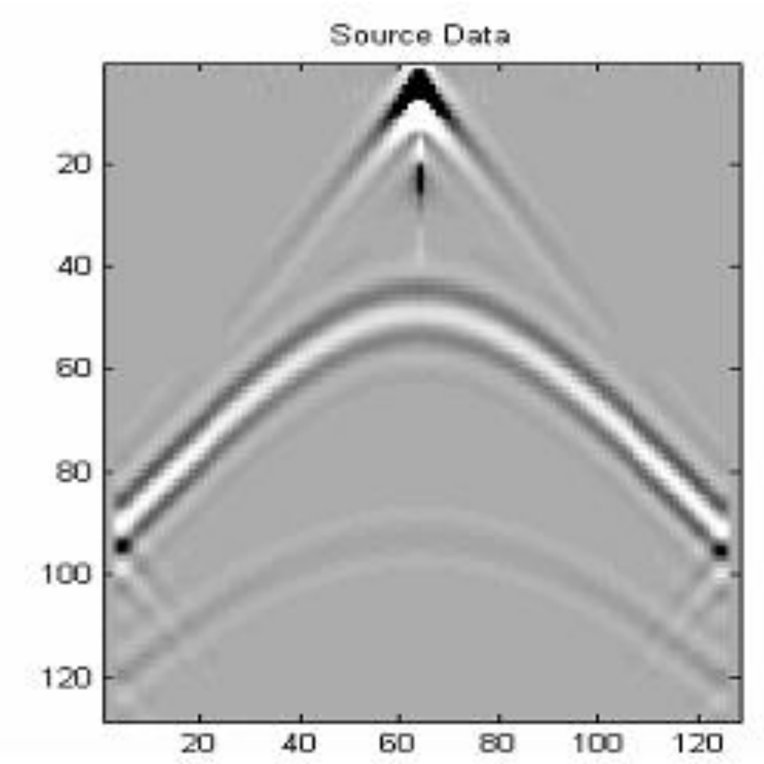
⇑

Курвлеты на разных масштабах

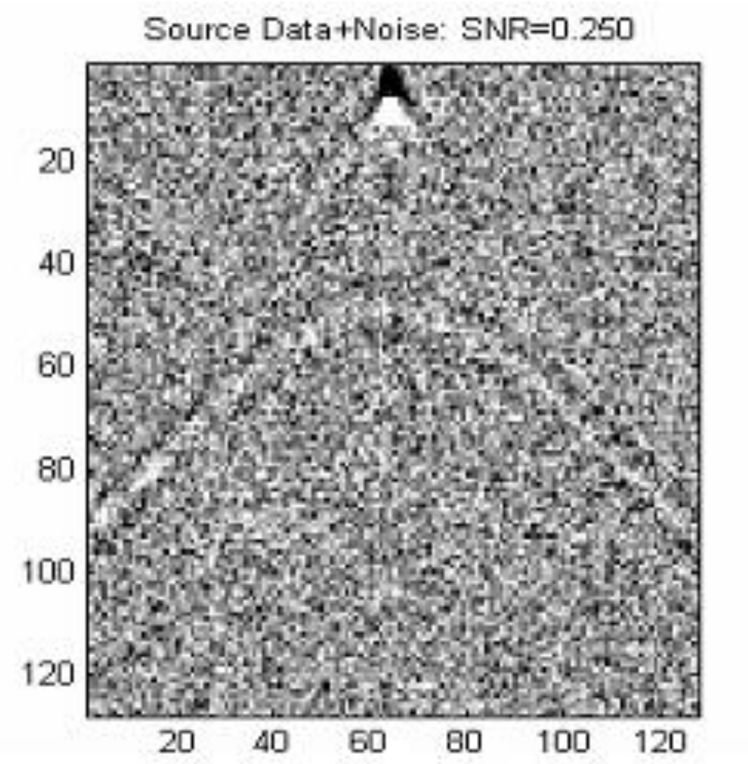
Фильтрация данных

Алгоритмы фильтрации данных основаны на выборе порога во множестве коэффициентов интегральных преобразований, посредством которого часть коэффициентов заменяется нулями (процедура Thresholding). После этого выполняется реконструкция данных посредством соответствующего обратного преобразования. Выбор оптимального порога является достаточно тонкой математической задачей. По этой теме имеется рад интересных публикаций. Она нашла удовлетворительное решение при сжатии данных и борьбы с шумом посредством вейвлет-анализа. Некоторую информацию по проблеме можно найти в книгах [Дьяконов, 2004; Смоленцев, 2005] и описании алгоритмов программ Wavelet Toolbox СКМ MATLAB.

СНА. Пример 1.
Синтетическая сейсмограмма

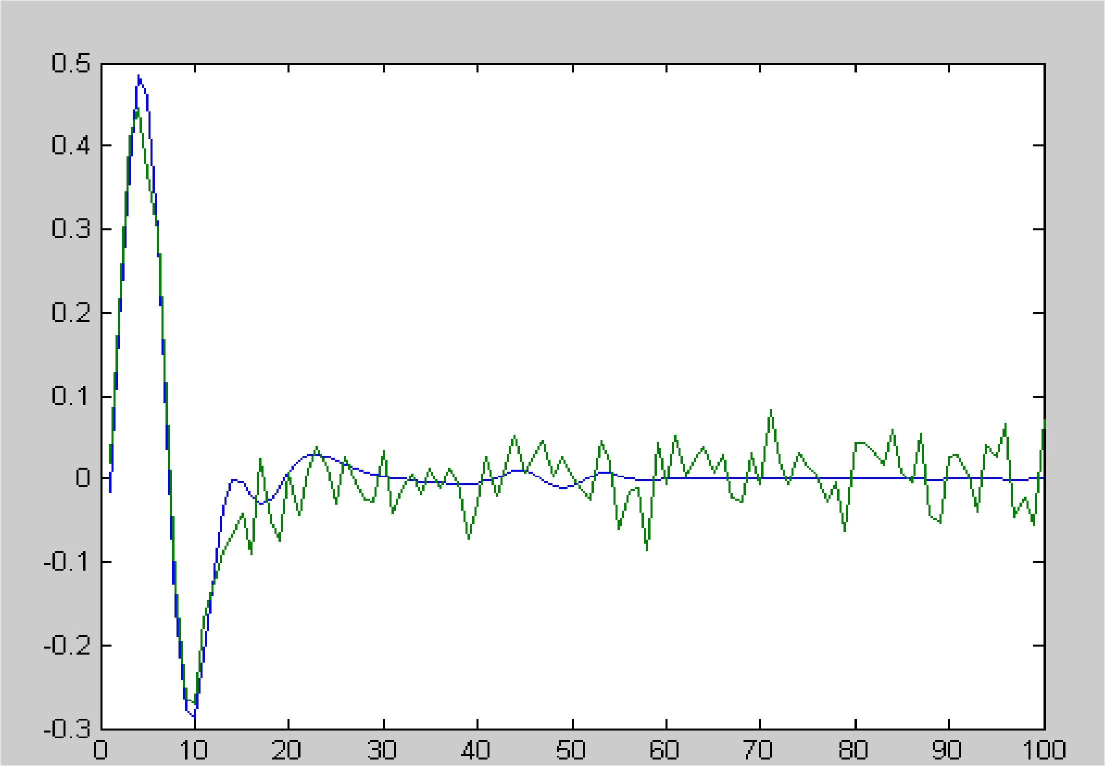


Исходные данные.
Синтетическая сейсмограмма



Синтетическая сейсмограмма, осложненная шумом. Отношение сигнал/шум равно 1/4 (SNR=1/4).

Сравнение исходных данных.

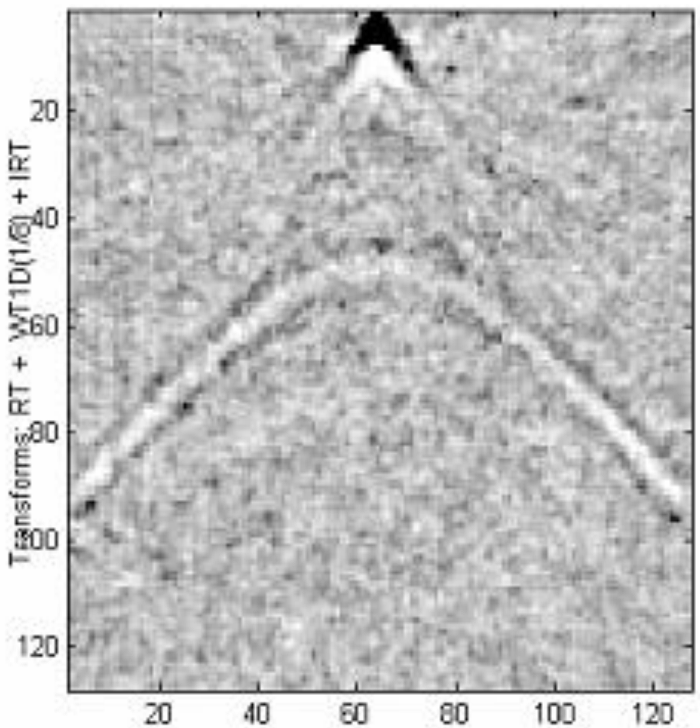


Графики одной и той же сейсмотрассы, проходящей через центр сейсмограммы:

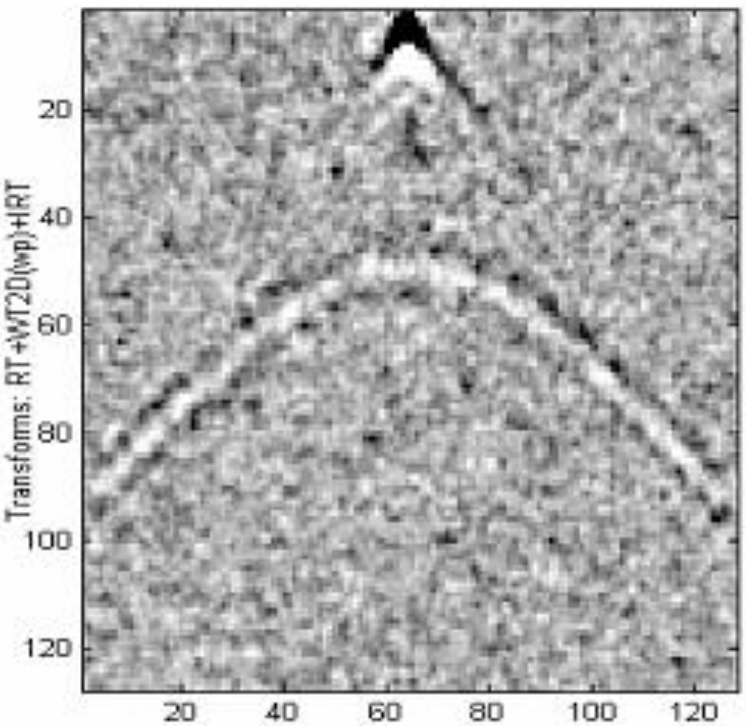
- трасса без шума (график синего цвета),
- та же трасса с добавлением шума (график зеленого цвета).

Отраженная волна (в окрестности узлов 45-55) слабо проявляется на фоне шума.

СНА. Риджлет-фильтрация данных



Риджлет-фильтрация
на основе WT1D в области
Радон-коэффициентов



Риджлет-фильтрация
на основе WT2D в области
Радон-коэффициентов

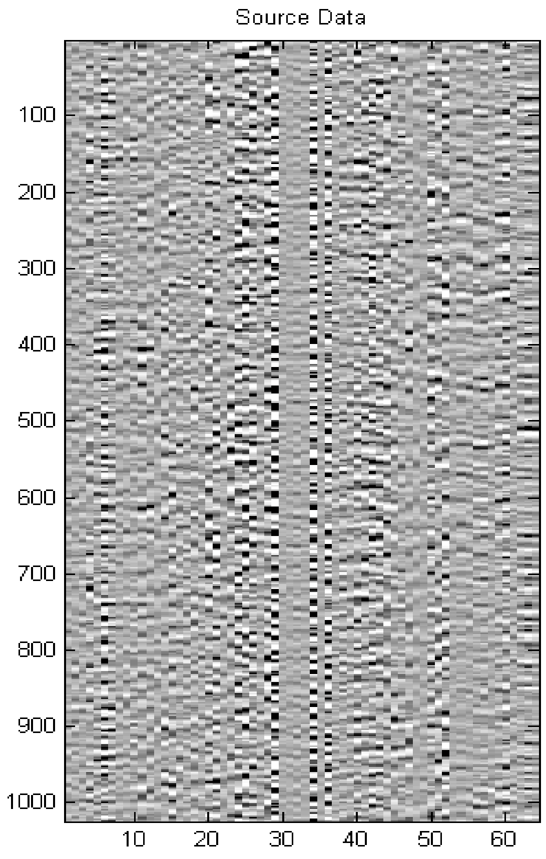
СНА. Практический пример 2

Проиллюстрируем работу риджлет-преобразования на практических электроразведочных данных ВРЭ ЗАО «НПЦ ГЕОНЕФТЕГАЗ». Размер матрицы исходных данных 1024x64 (слайд 36, рис. а).).

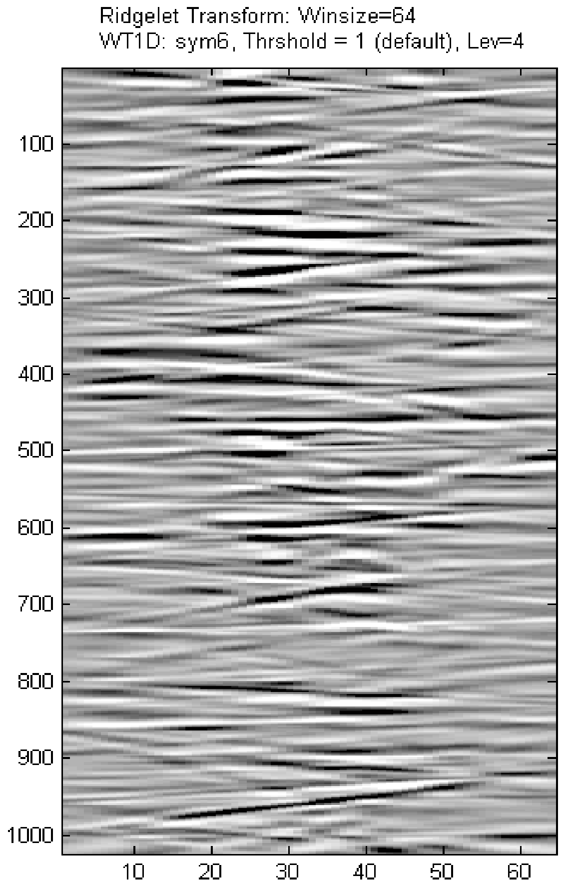
В процессе риджлет-преобразования использовалось одномерное быстрое вейвлет-преобразование с вейвлетом ‘sym6’, порог усечения коэффициентов *T*w = *T*, *lev* = 4. Матрица данных прямоугольная, поэтому при выполнении Радон-преобразования, которое в процессе работы оперирует квадратными матрицами, использовались перекрывающиеся квадратные окна 64x64. Их наложение составляло половину ширины окна.

Результаты риджлет-фильтрации полевых данных, изображенных на слайде 36, рис. а)., приведены на слайде 36, рис. б). Элементы, выделенные фильтрацией, весьма слабо видны на исходных данных.

CHA. Практический пример 2 (продолжение)

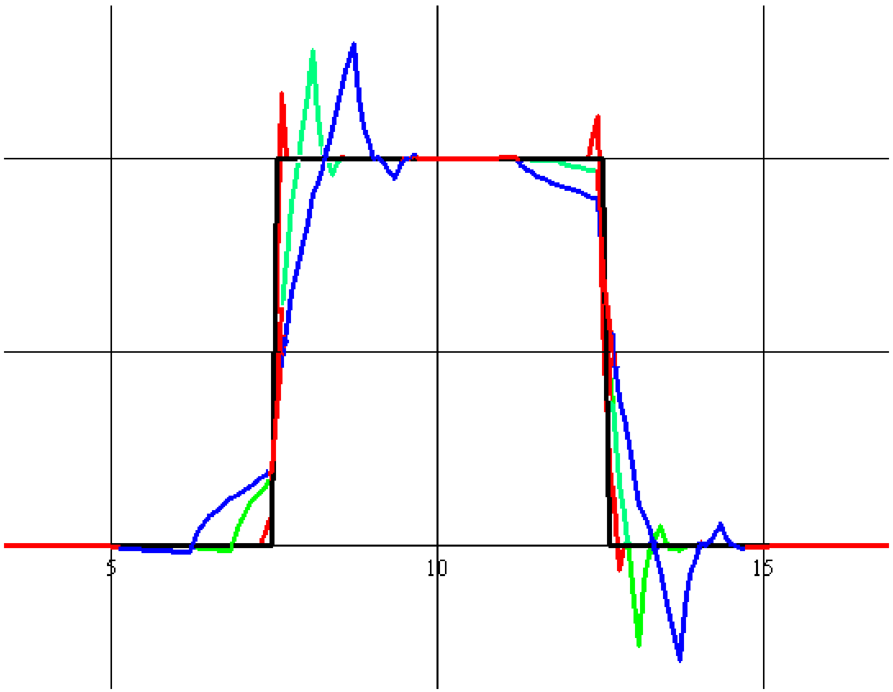


а). Исходные данные



б). Результат риджлет-фильтрации

Недостаток CHA-трансформаций



Аппроксимации «горста»

вейвлетом Добеши (4)

Сторонники PDE считают, что применение вычислительного гармонического анализа (CHA) для аппроксимации функций, имеющих точки разрыва, ведет к появлению осцилляций вблизи разрывов, хотя сигнал может быть плоским по обе стороны от линии разрыва. Они трактуют этот феномен как явление «псевдо-Гиббса».

Многомасштабный анализ данных на основе нелинейных уравнений в частных производных

Современная математическая обработка данных базируется на двух основных подходах к много-масштабному анализу (multi-scale analysis):

вычислительном гармоническом анализе (Computational Harmonic Analysis – CHA) (вейвлеты, риджлеты, курвлеты и т.п.)

нелинейных уравнениях в частных производных

(Partial Differential Equations – PDE)

1. PDE. Модель исходных данных

Примем, что в наблюденных данных *z* полезный сигнал *u* осложнен аддитивной помехой ε:

$$z = Ku + \varepsilon \qquad (1)$$

где *K* – сглаживающий интегральный оператор

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy, \; x, y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Частные случаи

$$K(x,y) = k(x-y)$$

$$z = u + \varepsilon$$

2. PDE. Элементы теории

Обзор результатов и направления развития PDE-алгоритмов дан в работах (Morel J.-M., Solimini, 1995 ; Scherzer, 1997). Основой общего метода построения многомасштабного анализа данных является диффузионный процесс, описываемый задачей Коши для нелинейного уравнения в частных производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla \cdot \big(k(x,u)\nabla u(x,t)\big),\ t>0; \\ u(x,0) = u_0^{\delta}(x),\ x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

где ∇–оператор Гамильтона, k (.)– коэффициент диффузии,

z (*x*) – начальные данные (сигнал, осложненный шумом).

1. Morel J.-M., Solimini S. Variational methods in image segmentation. Vol.14 of Progress in Nonlinear Differencial Equations and Their Applications. Birkhauser, Basel, 1995.

3. PDE. Физика нестационарного нелинейного процесса

С физической точки зрения величина коэффициента $k(x,u)$ отвечает за характер аппроксимации данных (диффузию) в точке x.

Преобразование (начальных) данных происходит за счет того, что

- в точках с относительно большими значениями коэффициента k(.) диффузия велика, что ведет к сглаживанию данных в окрестности этих точек.
- в точках с относительно малыми значениями коэффициента k(.) диффузия мала, поэтому в них данные не претерпевают существенного изменения.

4. PDE. Стандартный TV-алгоритм

Osher и Rudin (1990) предложили нелинейный диффузионный процесс для выделения контуров с резким изменением сигнала, выбирая $k(|\nabla u|) = 1/|\nabla u|$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla\left(\frac{1}{|\nabla u|}\nabla u\right)(x,t), \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0^{\delta}(\boldsymbol{x})$$

Решение этой задачи Коши эквивалентно отысканию функции, доставляющей минимум функционалу

$$E_\lambda(u) = \lambda^2 \int_\Omega |\nabla u|\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u - u_0^\delta\right)^2 dx$$

4. PDE. Стандартный TV-алгоритм (продолжение)

Vogel и Oman [1996] предложили итерационный алгоритм MSA-аппроксимации, основанный на минимизации функционала в ограниченной области $\Omega \in \mathrm{R}^2$ с границей $\partial\Omega$

$$\min_u \left[\frac{1}{2} \|u - z\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda^2 \int_\Omega \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2}\, dx,\ \beta > 0 \right]$$

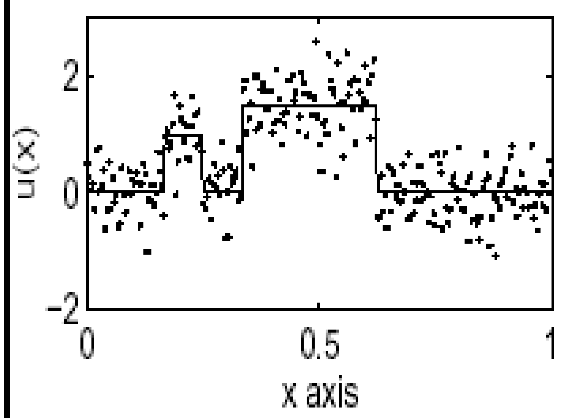
Ему соответствует задача

$$u - \lambda^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2}} \right) = z,\ x \in \Omega,\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0.$$

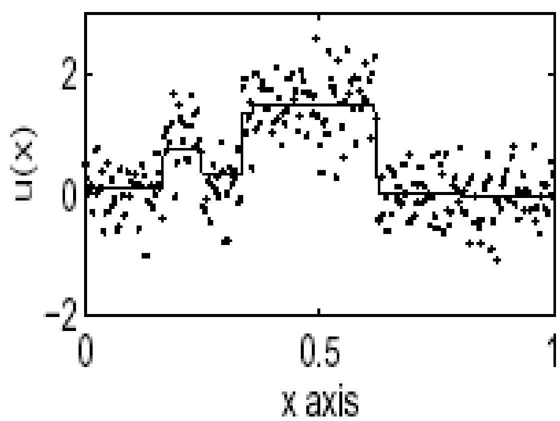
Vogel C.R., Oman M.E. Iterative methods for total variation deposing. SIAM J. Sci. Comput., 17: 227-238, 1996. Available: http://math.montana.edu:80/~vogel.

Стандартный TV-алгоритм. Численные результаты (Osher, Rudin)

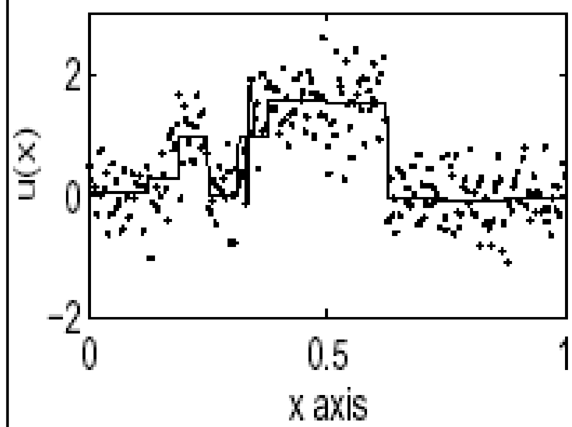
На всех графиках точками изображены данные с шумом.



Сплошной линией изображены точные данные.



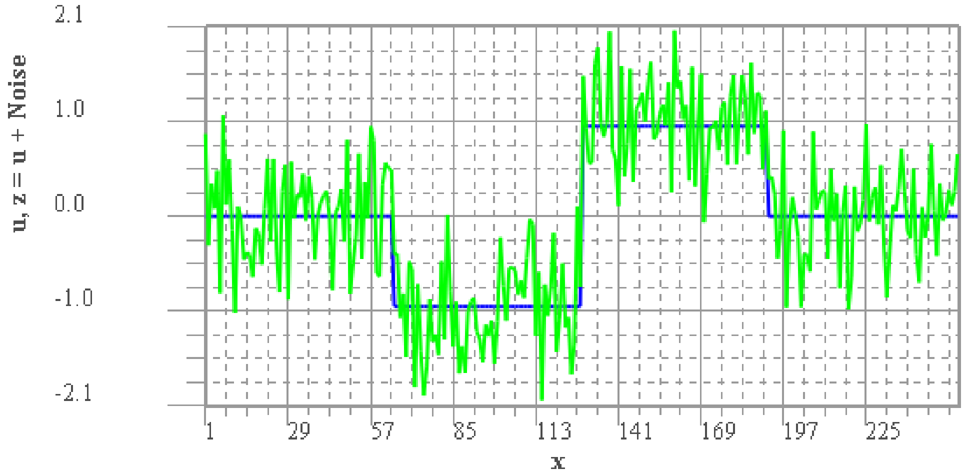
Сигнал, восстановлен-ный посредством стан-дартного TV-алгоритма (сплошная линия)



Сигнал, восстановлен-ный путем вейвлет-фильтраци на основе базиса Хаара (сплошная линия)

PDE. Численные эксперименты (Юдин, 2007)

Сигнал $u(x)$ (blue), осложненный шумом (green) с различной величиной дисперсии σ: $z(x) = u(x) + \sigma\varepsilon(x)$.



Задача состоит в восстановлении сигнала $u(x)$ из дан-ных $z(x)$ с аддитив-ной помехой $\sigma\varepsilon(x)$

(Здесь $\sigma = 0.5$).

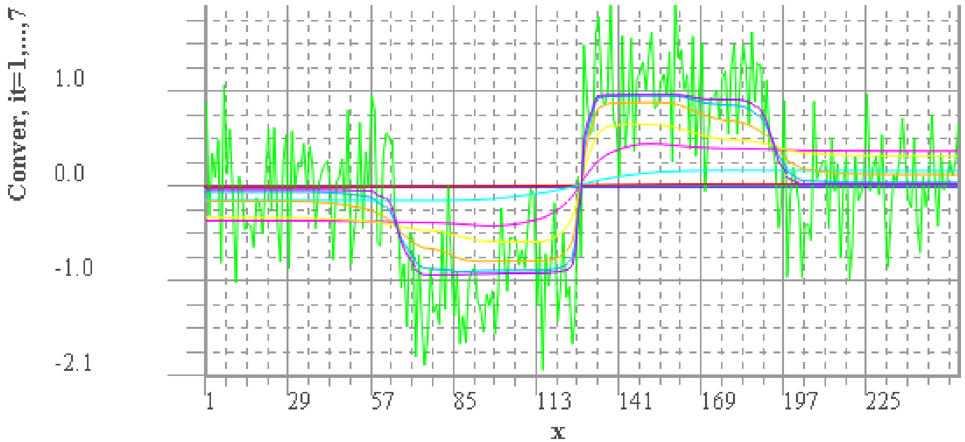
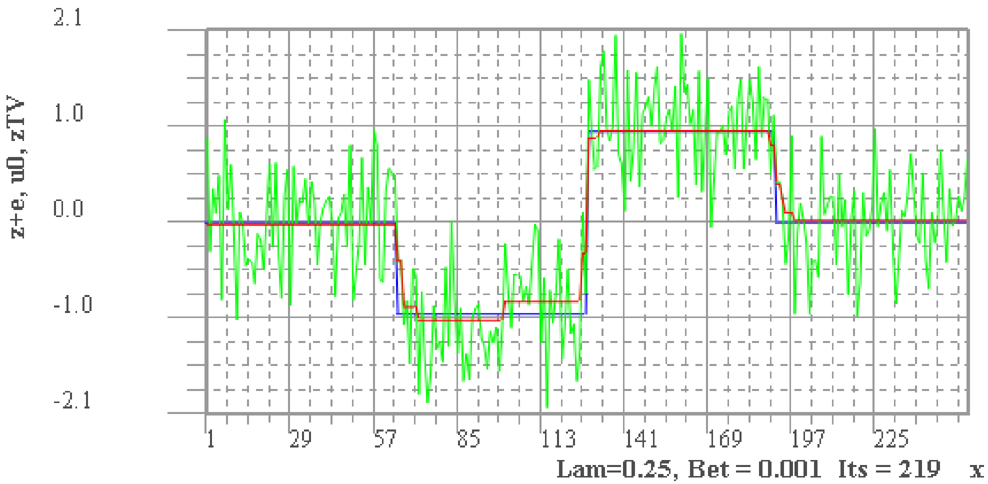


Иллюстрация сходи-мости итерационного процесса на первых семи итерациях при параметрах , началь-ное приближение равно 0.

PDE. Численные эксперименты (Юдин, 2007)



Сигнал с шумом (green) и его аппроксимация (red). Параметры: , h = 0.0225, начальное приближение – сигнал без помехи (ступенчатая функция – график синего цвета). Коэффициент σ = 0.5.

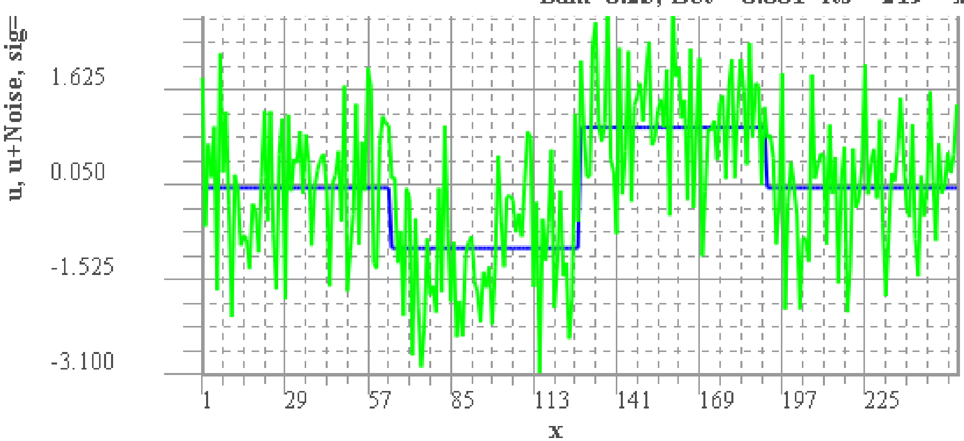
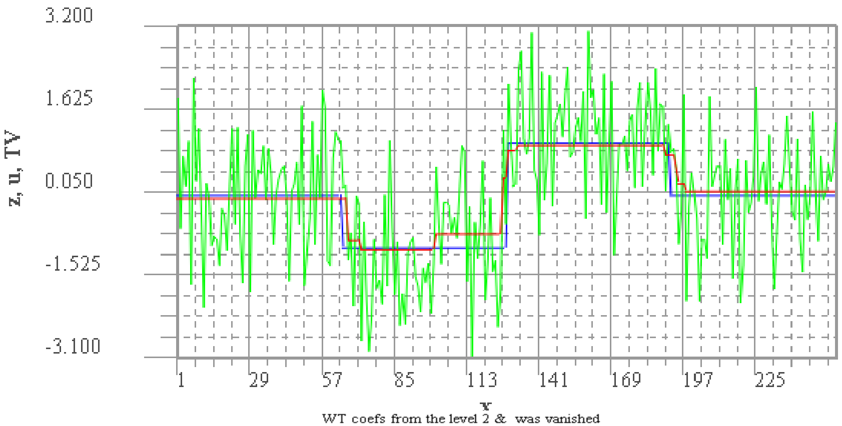
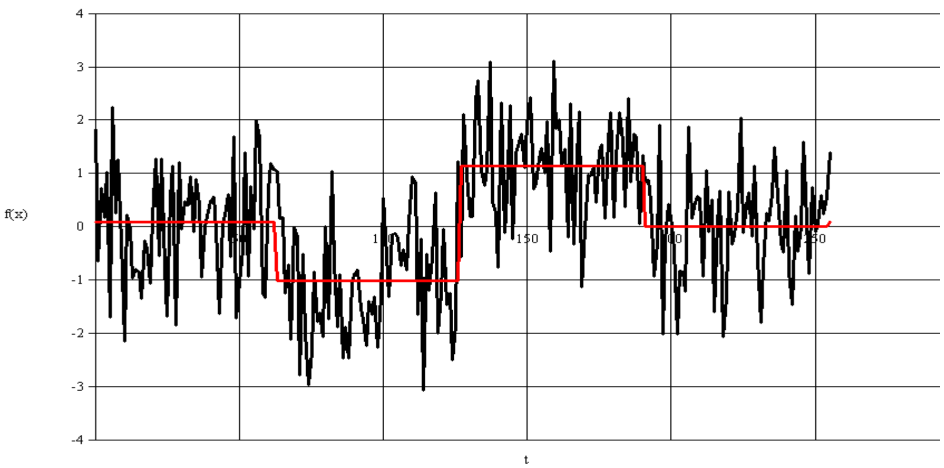


График исходного сигнала (blue) и сиг-нала, осложненного шумом (green). Шум с дисперсией σ =1.0.

PDE. Численные эксперименты (Юдин, 2007)



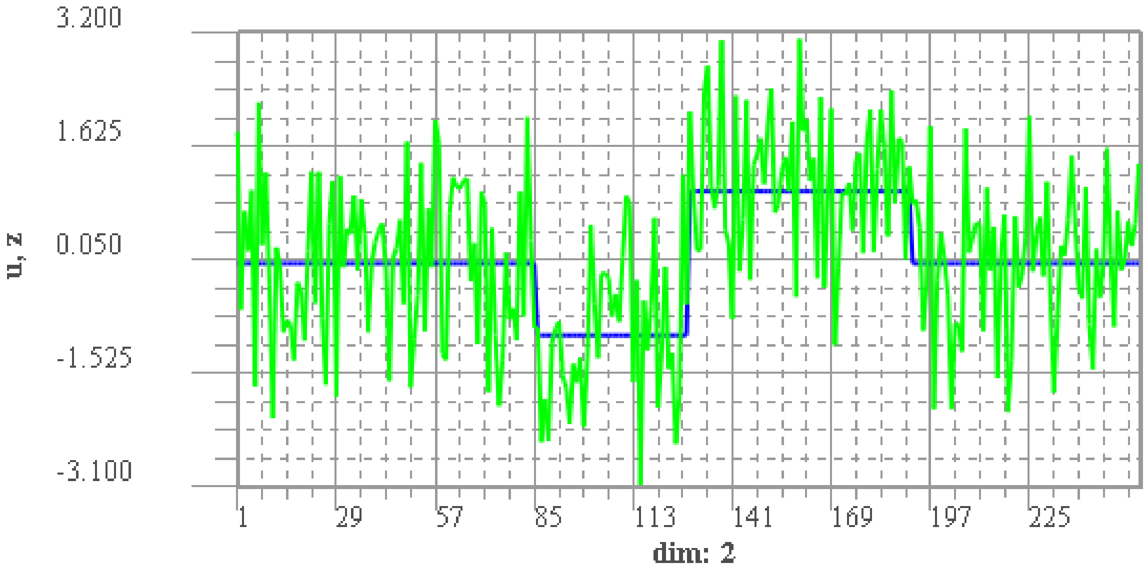
Сигнал без помехи (blue), с шумом (green) и его аппроксимация (red). Параметры: λ=0.4, β=0.001, h = 0.0225, σ=1.0.



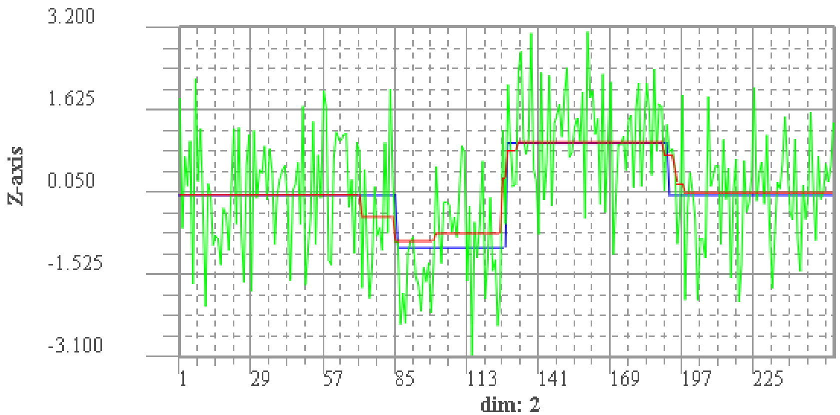
Сигнал с шумом (black) и его аппроксимация вейвлетом Хаара (red), σ=1.0.

PDE. Численные эксперименты (Юдин, 2007)

Рассмотрим более «неудобный» для вейвлет-апрокси-мации пример данных, когда первый прямоугольный импульс имеет размеры от 1/3 до ½ общей ширины сиг-нала. Такие размеры импульса не соответствуют размерам вейвлетов, получающихся при изменении их размеров, кратном степени 2. Выполним аппроксимацию этого сигнала, осложненного шумом с σ=1.0 двумя способами.



PDE. Численные эксперименты (Юдин, 2007)



Сигнал л без помехи (blue), с шумом (green) и его аппрокси-мация (red). Парамет-ры: λ=0.4, β=0.001, h = 0.0225, σ=1.0.

Вейвлет-аппрокси-мация сигнала с шу-мом (black) вейвле-том Хаара (red), σ=1.0. Параметры аппроксимации бы-ли выбраны такими же, как и выше.

Стандартный TV-алгоритм

Интегро-дифференциальная задача (Oman, 1995)

$$K^*\left(Ku(x)-z(x)\right)+\lambda^2\nabla J(u(x))=0,\ x\in\Omega,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$$

K^* - сопряженный оператор

$$k(x,y)\equiv k(x-y)=\sqrt{2/\pi}\exp(-(x-y)^2/0.075^2)$$

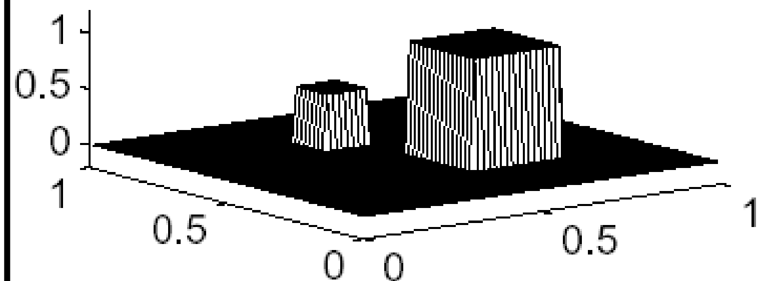
$$J(u):=\int_\Omega\sqrt{|\nabla u|^2+\beta^2}\,dx,\ \beta>0$$

Функционал, соответствующий дифференциальной задаче

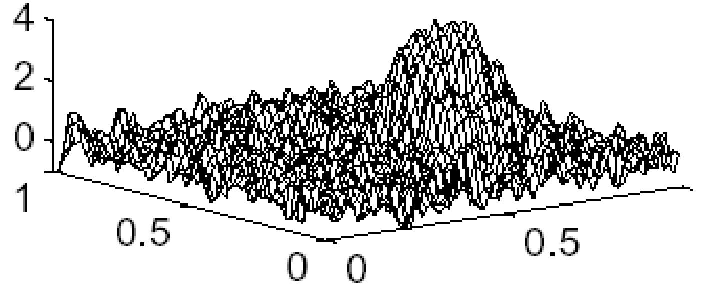
$$T(u)=\frac{1}{2}\|Ku-z\|^2_{L^2(\Omega)}+\lambda^2 J(u)$$

Численные результаты (Oman, 1995) (алгоритм на предыдущем слайде)

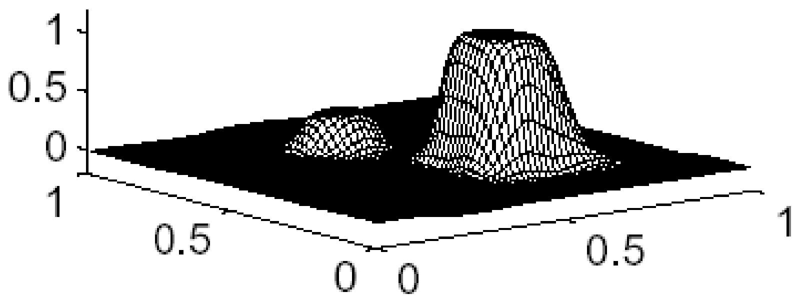
а)



б)



в)

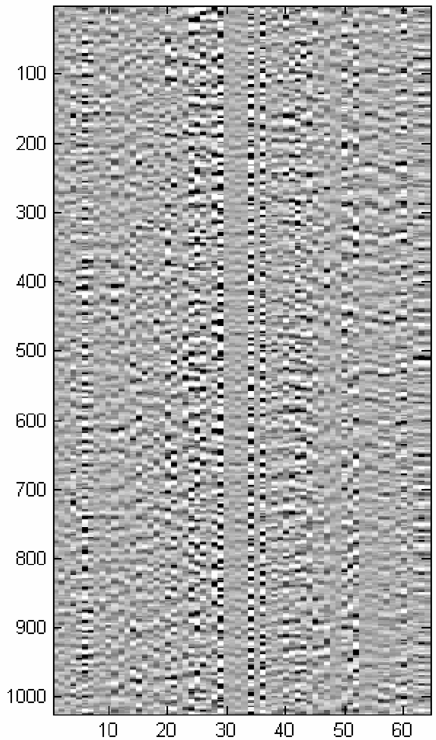


На рисунках изображены :

а) исходные данные без помехи,

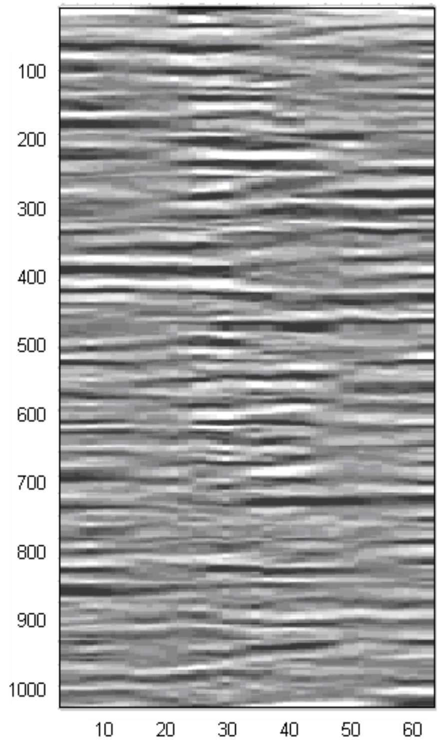
б) данные, осложненные адди-тивным шумом, в) результат TV-реконструкции сигнала из данных с шумом (рис. б)).

Практические данные ВРЭ
ЗАО «НПЦ ГЕОНЕФТЕГАЗ»
Сравнение стандартной TV- и риджлет фильтраций

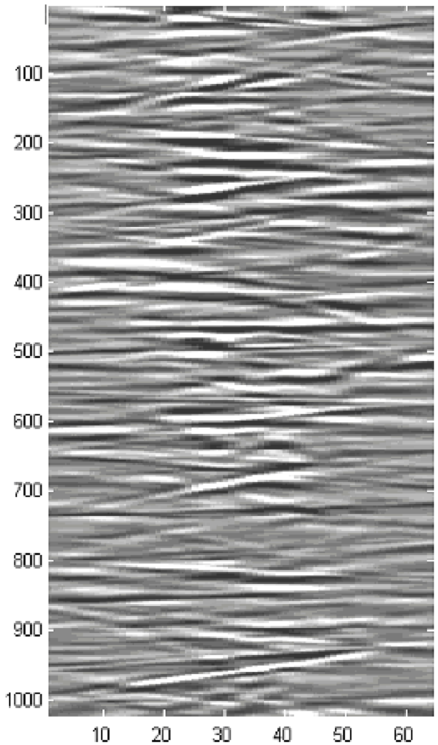


а) Исходные данные.

Матрица 64x1024

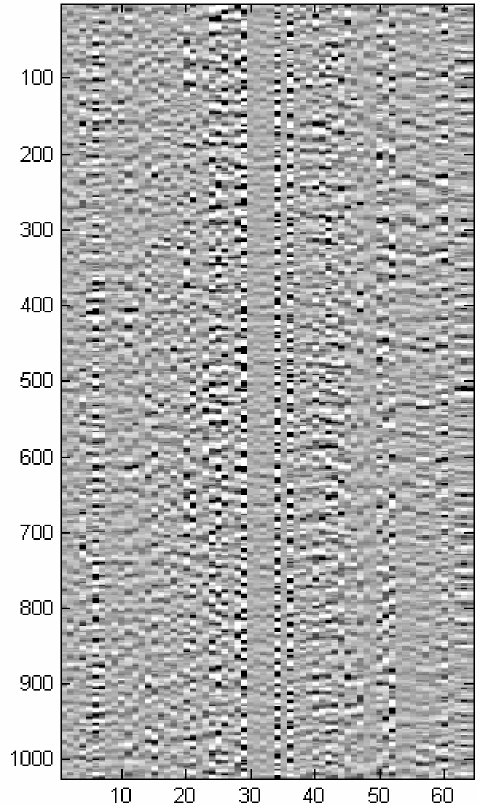


б) TV-фильтрация (грубый масштаб)

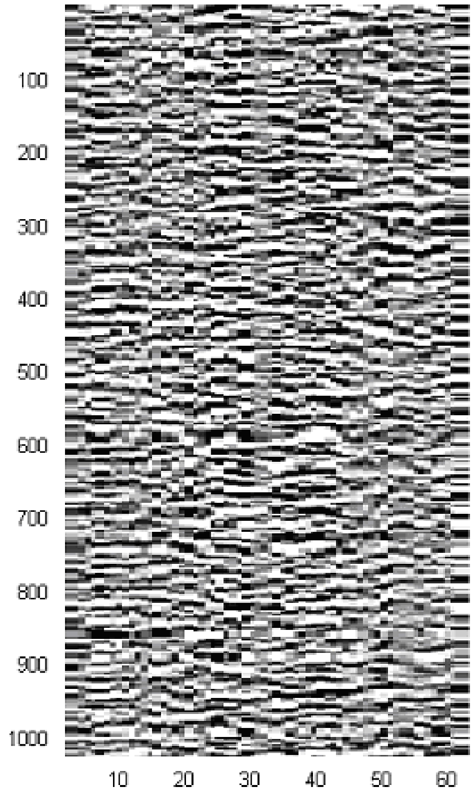


в) Риджлет-фильтрация (грубый масштаб)

Практические данные ВРЭ ЗАО «НПЦ ГЕОНЕФТЕГАЗ»
Стандартная TV-фильтрация



г) Исходные данные. Матрица 64x1024



д) TV-фильтрация (мелкий масштаб)

Модифицированный алгоритм Мейера (Osher, Solè, Vese, 2002) (алгоритм OSV).

Проблема: разделение сигнала z = u + v на части (текстуры) разного масштаба: крупного (u) и - мелкого (v)

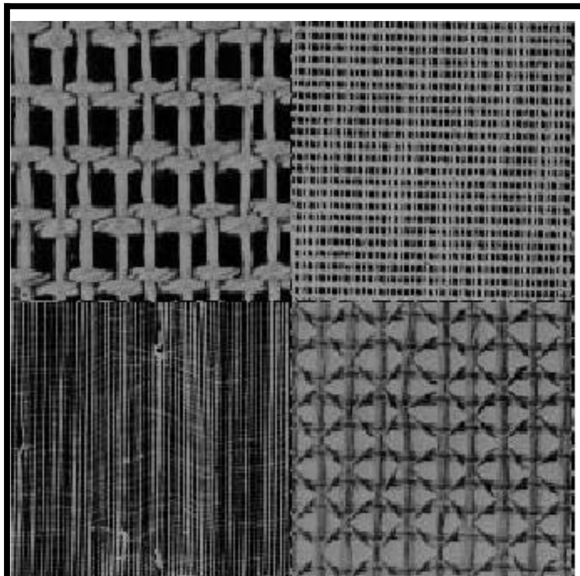
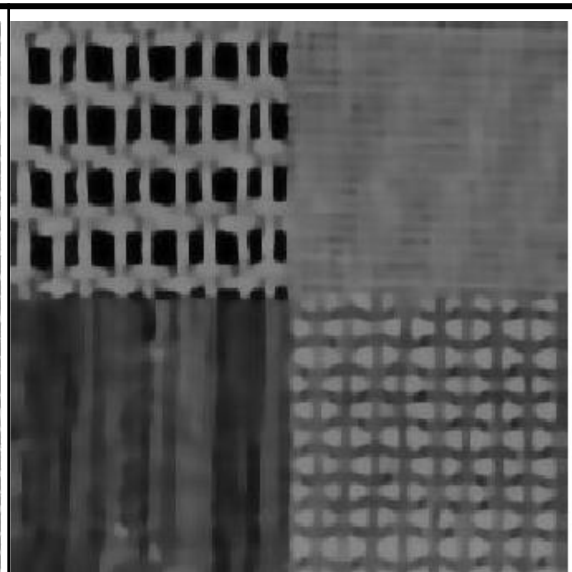
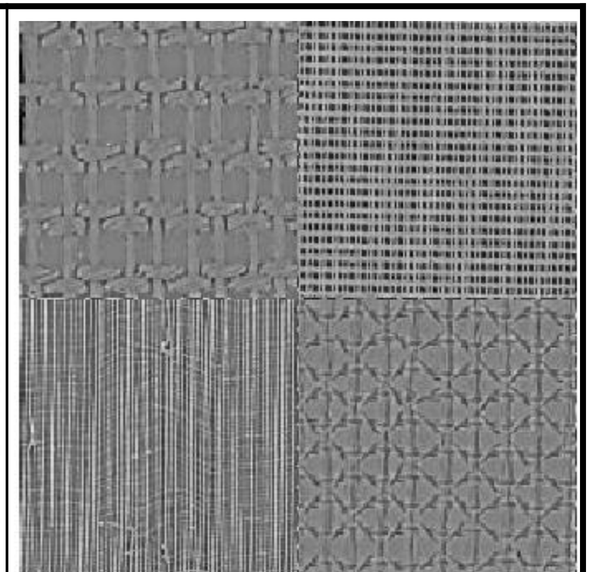
Дифференциальная задача

$$u_t = -\frac{1}{2\lambda^2}\Delta\left[div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right] - (u - z),\ u(x,0) = z$$

Экстремальная задача

$$\inf_u E_{OSV}(u) = \inf_u \left[\int_\Omega |\nabla u|\,dx + \lambda^2 \int_\Omega \left|\nabla\left(\Delta^{-1}\right)(z-u)\right|^2 dx\right]$$

Численные результаты (алгоритм OSV)

		
Исходные данные (z), состоящие из 4 текстур различного масштаба	Результат работы: выделенные текстуры крупного масштаба (u)	Результат работы: выделенные текстуры мелкого масштаба (v)

7. Нелинейная фильтрация на основе производных высших порядков (Scherzer,1995)

Проблема: выделение скачков первых производных в данных с шумом

Дифференциальная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = H.\left(\frac{1}{|Hu|}Hu\right)(x,t),\ u(x,0) = z(x)$$

$$|Hu| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right| \qquad Hu = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Экстремальная задача

$$E_\lambda(u) = \lambda^2 \int_\Omega |Hu|\,dx + \int_\Omega \left(u - u_0^\delta\right)^2 dx$$

Численные результаты (Scherzer,1995)

$$u(x) = 1/2 - |1/2 - x|,\ x \in [0,1] \qquad u'(x) = \mathrm{sgn}(1/2 - x),\ x \neq 1/2$$

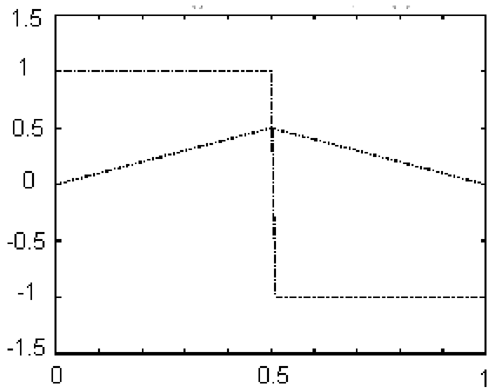
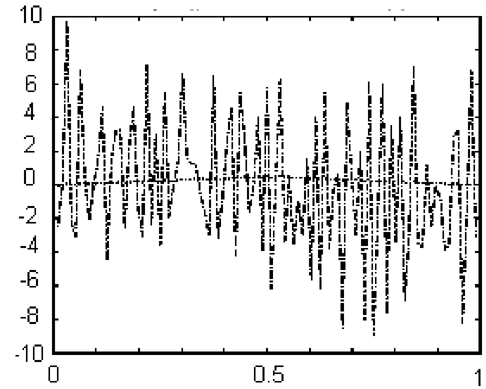
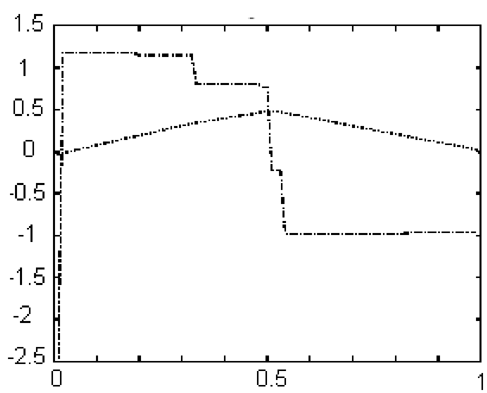
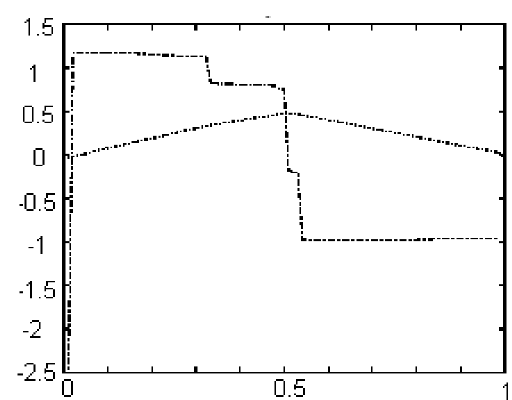


График $u(x)$ (точки) и её производной (штрих-пунктир)



Данные с шумом $z = u + \varepsilon$





Восстановление производной из данных z с разными параметрами λ, β, γ

Совместное использование CHA и PDE алгоритмов фильтрации данных

Candes и Guo [2001] предложили алгоритм фильтрации данных, основанный на комбинировании курвлет-разложения с принципом минимизации Полной Вариации (для улучшения отношения сигнал/шум).

8. Алгоритм гибридной фильтрации PDE & CHA (Candes, Guo, 2001)

Проблема: фильтрация данных z с шумом

Экстремальная задача с ограничениями

$$\min_{u} \int_{\Omega} |\nabla u| dx \quad \left|(Tu-b)_{\mu}\right| \leq e_{\mu} \qquad b = Tz$$

В качестве *T* в можно взять одно из интегральных преобразований, относящихся к классу *CHA* (например, курвлет-преобразование)

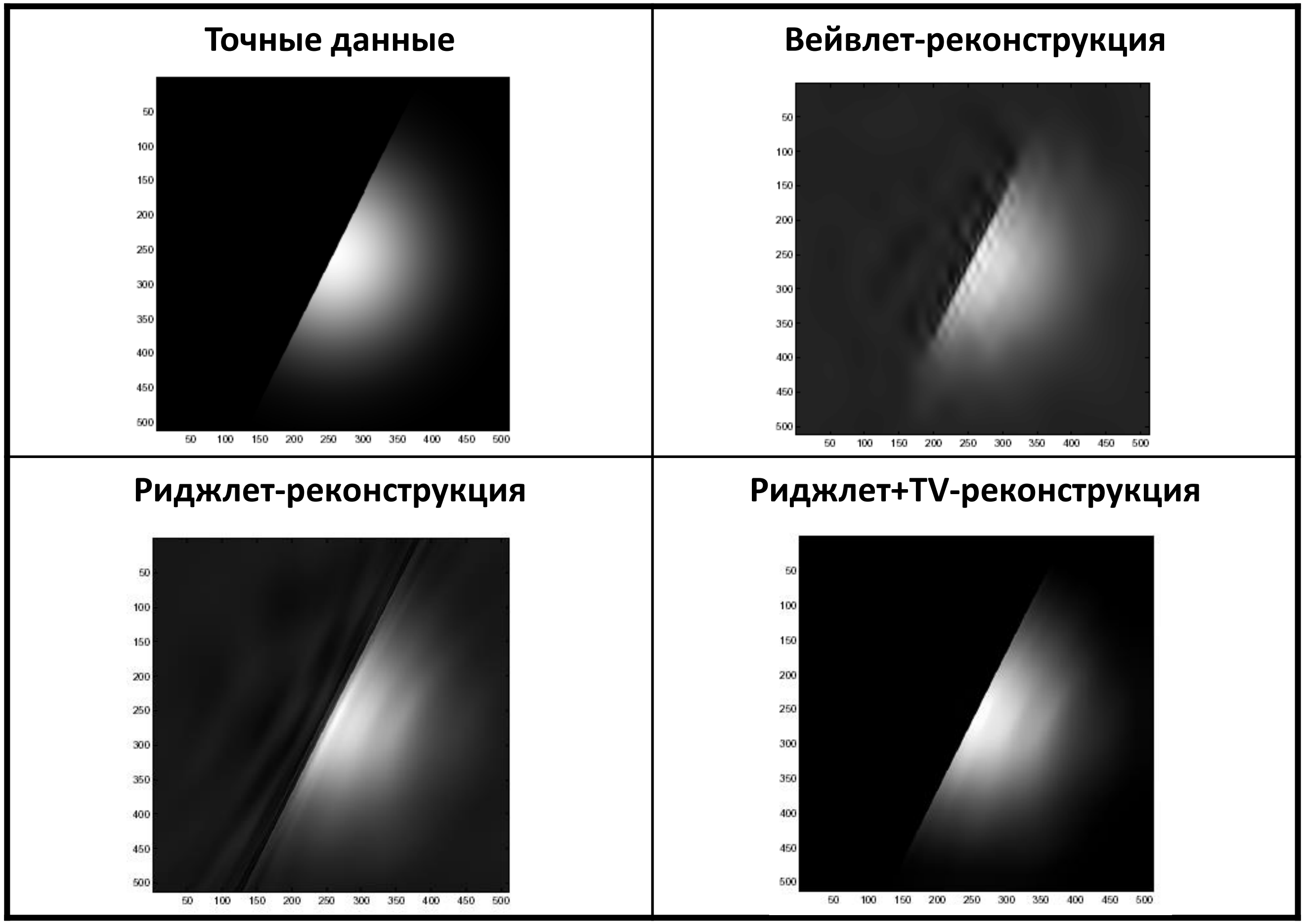
$b_{\mu},\ \mu \in M'$ - выделенный набор значимых Фурье-коэффициентов Т-преобразования

CHA+PDE. Численный эксперимент

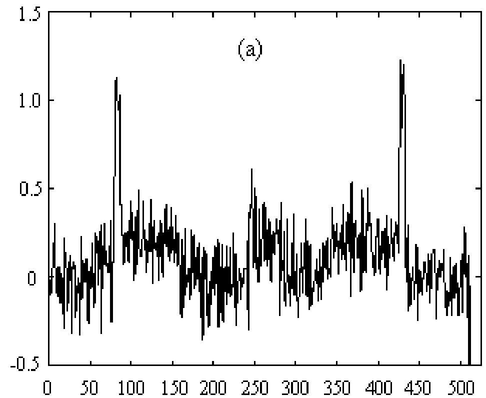
Candes, Guo (2001) проиллюстрировали результаты работы алгоритма на ряде численных экспериментов, которые ясно показали высокий потенциал этой новой методологии для сжатия изображения, его реконструкции на фоне высокого уровня помех (очистки от шума).

Эксперимент сравнивает качество восстановления изображения посредством вейвлетов, риджлетов и применения TV после частичной риджлет-реконструкции. В этом эксперименте первоначальной фигурой является картина размера 512x512. Использовалось только 100 наибольших коэффициентов для восстановления сигнала. В отличие от вейвлет-реконструкции, риджлет-реконструкция неоднородности почти идеальна. На риджлет-картине, однако, можно все еще отличать колебания около края. Минимум Полной Вариации стирает боковые полосы риджлет-реконструкции и улучшает восстанав-ливаемый объект. Риджлет+TV-реконструкция и первона-чальный рисунок почти неразличимы.

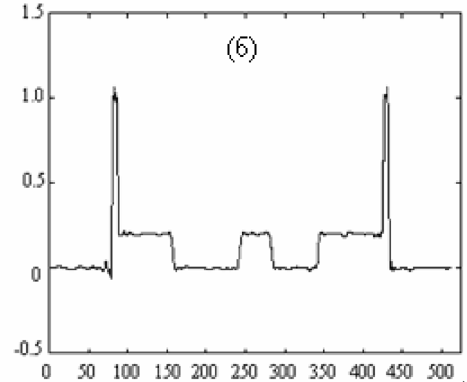
CHA+PDE. Численный эксперимент



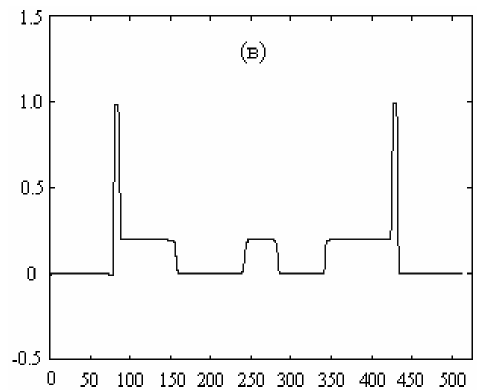
Численные результаты PDE & CHA (Candes, Guo, 2001)



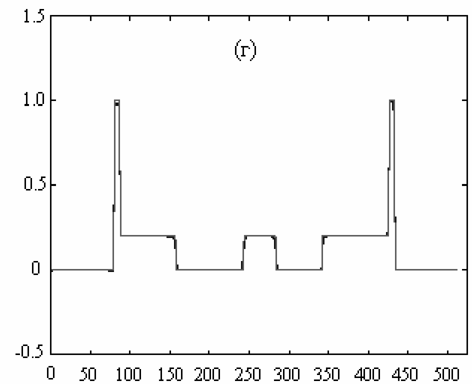
Данные с шумом z



Курвлет-фильтрация (CHA)

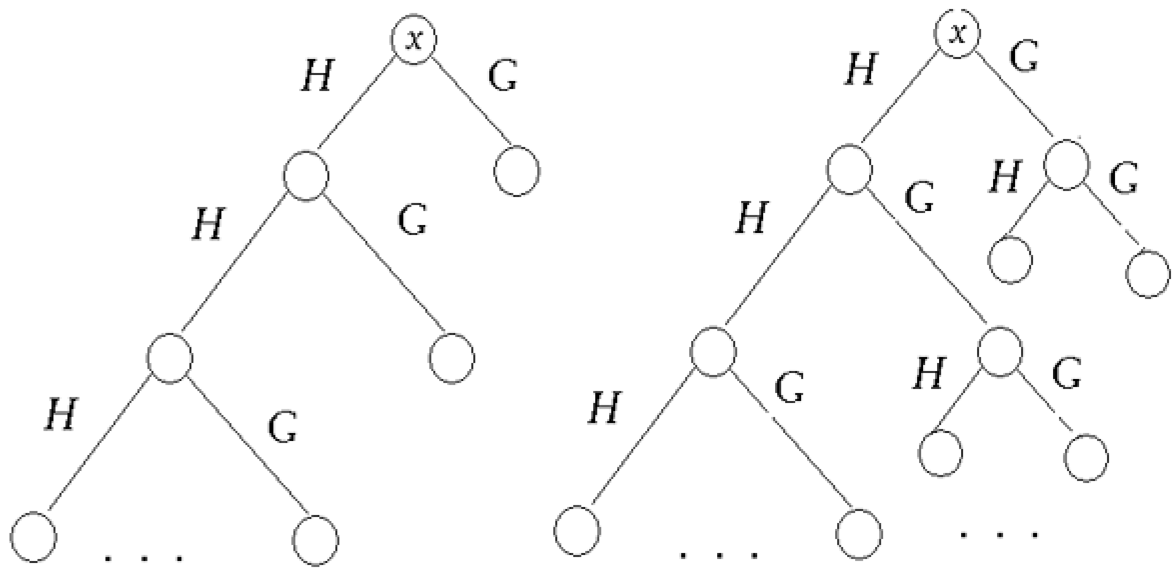


Гибридная фильтрация PDE & CHA



Сравнение точных данных с их гибридной реконструкцией

Вейвлет-пакеты



Разложение по вейвлет-пакетам.

Литература

1. Alliney S., Recursive median filters of increasing order: a variational approach, IEEE Trans. on Signal Processing, 44:6, 1346–1354, 1996.
2. Alliney S., A property of the minimum vectors of a regularizing functional defined by means of the absolute norm, IEEE Trans. on Signal Processing, 45:4, 913–917, 1997.
3. Aubert G., Vese L., 1997, A Variational method in image recovery. Siam Jornal of Numerical Analysis. 34(5), 1948-1979.
4. E. J. Candès and F. Guo, 2002, New multiscale transforms, minimum total variation synthesis: Applications to edge-preserving image reconstruction. Signal Processing, 82 1519-1543. Compressed Postscript (ps.gz)/(pdf).
5. Chan T.F. and Esedoglu S., 2004, Aspects of total variation regularized L1 functions approximation, UCLA CAM Report 04-07, to appear in SIAM J. Appl. Math.
6. Choi S., Donoho D.L., Flesia, A. G. Huo X., Levi O. and Shi D., 2002, About BeamLab – a Toolbox for New Multiscale Methodologies. Stanford University, Stanford, CA 94305 2 Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332. 7. http://www-stat.stanford.edu/~beamlab
7. Dobson D. and Vogel C.R., 1997, Convergence of an iterative method for total variation denoising. SIAM Journal on Numerical Analysis, 34, 1779-1971.
8. Le T.and Vese L., 2004, Image decomposition using the total variation and div(BMO), UCLA CAM Report 04-36.
9. Alliney S.,Digital filters as absolute norm regularizers, IEEE Trans. on Signal Processing, 40:6, 1548–1562, 1992.

Литература

10. Lieu L.and Vese L., Image restoration and decomposition via bounded total variation and negative Hilbert-Sobolev spaces, UCLA CAM Report 05-33.
11. Meyer Y., 2002, Oscillatory patterns in image processing and nonlinear evolution equations. University Lecture Series, vol.22. American Mathematical Society, Providence.
12. Morel J.-M. and Solimini S., 1995, Variational methods in image segmentation. Vol.14 of Progress in Nonlinear Differencial Equations and Their Applications. Birkhauser, Basel.
13. Mumford D. and Shah J., 1985, Boundary detection by minimizing functionals, Proc. IEEE Conf. Comp. Vis. Pattern Recognition.
14. Nikolova M., 2002. Minimizers of cost-functions involving nonsmooth data-fidelity terms, SIAM J. Numer. Anal., 40:3, 965–994.
15. Nikolova M., 2004a, A variational approach to remove outliers and impulse noise, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 20:1-2, 99–120.
16. Nikolova M., 2004б,Weakly constrained minimization. Application to the estimation of images and signals involving constant regions, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 21:2, 155–175.
17. Haddad A. and Meyer Y., 2004, Variational methods in image processing. UCLA CAM Report 04-52.
18. Oman M.E.,1995, Fast multi-grid techniques in total variation-based image reconstruction . Available: http://citeseer.ist.psu.edu/oman95fast.html.
19. Osher S., Sole A. and Vese L. 2002, Image decomposition and restoration using total variation minimization and the H−1 norm, Multiscale Model. Simul. 1 , no. 3, 349–370 (electronic).

Литература

20. Osher S. and Rudin L. , 1990, Feature oriented image enhancement using shock filters. SIAM J.on Numerical Analysis, 27, 919-940.

21. Rudin L. and Osher S., 1994, Total variation based image restoration with free local constraints, Proceedings of the IEEE ICIP, Austin, USA 1, 31–35.

22. Rudenko S., 2004, Noise and Texture Detection in Image Processing. Contract W-7405-ENG-36 founded Los ALmos National Lab, 1-11.

23. Rudin L.J., Osher S. and Fatemi E., 1992, Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Physica D, vol.60, 259-268.

24. Scherzer O., 1997, Stable evaluation of differential operators and linear and nonlinear multi-scale filtering. Electronic J. of Differential Equations,Vol 1997, No.15, pp 1-12. Available: http://ejde.math.swt.edu or http://ejde.math.unt.edu.

25. Vese L. and Osher S., 2003, Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing, J. Scientific Comput. 9, 553–572.

26. Vogel C.R. and Oman M.E., 1996, Iterative methods for total variation denoising. SIAM J. Sci. Comput., 17: 227-238. Available: http://math.montana.edu:80/~vogel.

27. Vogel C.R., 1995, A multigrid method for total variation-based image denoising, in Computation and Control IV, K. Bowers and J. Lund, editors, Progess in Systems and Control Theory, 20, Birkhauser.

Vogel C.R and Oman M.E., 1998, Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images. IEEE Transactions on Image Processing, 7. 813-824.

Литература

28. Vogel C.R., 1997, Nonsmooth regularization. Inverse Problems in Geophysical Applications, pp. 1-11, edited by H.W. Engl, A.K. Louis, and W. Rundell, SIAM.
29. Yin W., Goldfarb D., and Osher S, 2005, Image Cartoon-Texture Decomposition and Feature Selection Using the Total Variation Regularized L1 Functional. N.Paragios et al.(Eds.): VLSM 2005, LNCS 3752, 73-84.
30. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М., Мир, 2005, 671 с.
31. Юдин М.Н., Юдин О.М., Дубинин П.А. Бимлет-преобразования и их применение для обработки геофизических данных. Изв. РАН, Физика Земли, №3, 2007, 39-50.
32. Юдин М.Н., Юдин О.М. Вариационные подходы к обработке экспериментальных данных, осложненных шумом. //VIII Международная конференция «Новые идеи в науках о земле». Материалы докладов, том 8, М., РГГРУ, 2007, 356-359.

Спасибо за внимание

Контактная информация

- E-Mail: yudinmn@gmail.com
- Сайт автора: www.yudinmn.com

- Тел.: 8(495) 433-62-33 доб.12-42