



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНАЯ
АКАДЕМИЯ
ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

М.Н. Юдин Ю.А. Фарков Д.М. Филатов

Введение в вейвлет-анализ

Учебно-практическое пособие
для системы дистанционного образования

Утверждено
редакционным советом
центра дистанционного
образования

МОСКВА 2001

Введение в вейвлет-анализ: Учеб.-практическое пособие.
М.Н.Юдин, Ю.А.Фарков, Д.М.Филатов. Моск. геологоразв.
акад. М.,2001. 72 с.

Учебно-практическое пособие предназначено для студентов, обучающихся в системе дистанционного образования по специальностям: "Прикладная математика" и "Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых" (08.07, 09.01, 09.02, 09.05). Объем и содержание пособия соответствуют учебной программе по дисциплине "Численные методы" специальности ПМ и программе спецкурса "Применение интегральных преобразований в геофизике" специальности РФ.

Профиль геологоразведочной академии обусловил изложение материала и выбор первоисточников. За основу были взяты тезисы диссертации E.V. Hoeskstra "Multiscale Analysis of seismic data by the wavelet transform", которые были дополнены материалами из других опубликованных книг и статей. В частности, описание алгоритмов быстрого дискретного вейвлет-преобразования на основе всплесков Добеши заимствовано из библиотеки Numerical Recipes.

Отметим, что обширную информацию по всплескам можно получить в сети Internet, например, по адресам:

<http://www.mathsoft.com/wavelets.html>

<http://www-stat.stanford.edu/~wavelab>

Оглавление

Глава 1. Общие сведения	1
1.1. Обозначения, основные формулы и определения	2
1.2. Краткая историческая справка по вейвлет-анализу	7
Глава 2. Преобразование сигналов	9
2.1. Теорема отсчетов Котельникова-Шеннона	11
2.2. Непрерывное преобразование Фурье	14
2.3. Оконное преобразование Фурье	14
2.4. Преобразование Габора	19
Глава 3. Wavelet-анализ	21
3.1. Непрерывное wavelet-преобразование (CWT)	22
3.2. Дискретное wavelet-преобразование (DWT)	30
3.3. Кратно разрешающий анализ	31
Глава 4. Численные алгоритмы дискретного wavelet-преобразования	37
4.1. Всплески Добеши (Daubechies). Коэффициенты фильтра	37
4.2. Алгоритм дискретного wavelet-преобразования	40
4.3. Как выглядят всплески?	42
4.4. Wavelet-фильтры в Фурье-области	45
4.5. Сплайновые всплески	48
4.6. Иллюстрация кратно разрешающего анализа	52
Глава 5. О двумерных вейвлетах	56
5.1. Тензорное произведение	56
5.2. Гексагональная решетка	60
5.3. Варианты числа вейвлетов	61
Глава 6. Некоторые приложения вейвлет-анализа	62
6.1. Решение систем линейных уравнений	62
6.2. Анализ операторов	62
6.3. Решение задач математической физики	64
6.4. Нахождение точек перегиба с помощью всплесков	70
6.5. Сжатие изображений	73
Заключение	75
Литература	76

Глава 1. Общие сведения

Появление вейвлет-анализа является одним из важных событий, которые произошли в математике за последние полтора десятилетия. После возникновения сплайнов не было другой математической концепции, которая бы так стремительно проникла в естественные науки, многие области техники, экономику и финансы. Ученые и инженеры неожиданно получили возможность без особых усилий взглянуть на предмет своих исследований совершенно по-новому.

Вейвлет-анализ вызвал огромный интерес как в теоретической, так и прикладной областях математики. Количество исследователей уже сейчас велико, но число их продолжает расти. Среди областей, где эта теория находит применение, можно назвать сейсмоку, анализ речи, обработку изображений, изучение мультифрактальных объектов, проектирование квадратурных зеркальных фильтров, численные методы решения уравнений математической физики, конструктивную квантовую теорию поля и др.

Полученные к настоящему времени результаты легли в основу пакетов программ (*MatLab*, *MathCAD*, *CorelDraw*), которые позволяют использовать всплески для решения различных прикладных задач. Обширную информацию по всплескам можно получить в сети Internet.

Английский термин “*wavelet*” (фр. “*ondelette*”) дословно означает “маленькая волна. Автор термина “*wavelet*” – Жан Морле. Свой знаменитый “вейвлет Морле” он придумал и применил в связи с задачами сейсморазведки.

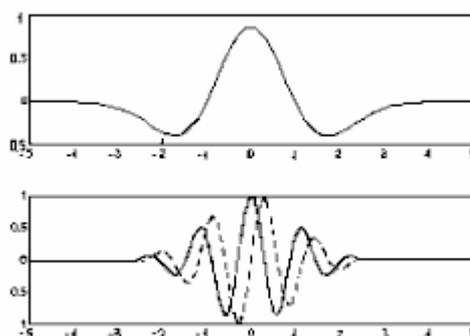


Рис 1.1. Примеры вейвлетов: вещественный всплеск “сомбреро” (вверху), действительная и мнимая части вейвлета Морле (внизу)

Термин “всплеск” как эквивалент английского “*wavelet*” предложил использовать в 1991 году *К. И. Осколков*.

Известно, что многие сигналы являются суммами гармоник (синусоид) разной частоты. Но носители синусоид бесконечны,

поэтому эти функции не отслеживают изменения сигнала во времени. Чтобы уловить эти изменения, вместо бесконечных волн можно взять короткие “всплески” – совершенно одинаковые, но разнесенные по времени. Оказывается этого недостаточно и надо добавить еще их всевозможные растянутые и сжатые копии (рис 1.2).

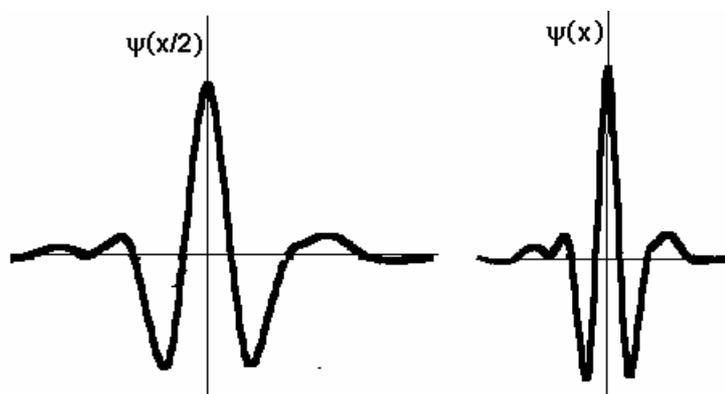


Рис. 1.2. Две копии $\psi(x)$ и $\psi(x/2)$ одного всплеска.

Вот теперь сигнал можно разложить на сумму всплесков разного размера и местоположения. Это и есть вейвлет-анализ.

Вейвлет-преобразование работает быстрее, чем преобразование Фурье. Для него несравненно проще написать программу. Известно, что в то время как число операций для быстрого преобразования Фурье оценивается как $O(n \log(n))$, всплесковые алгоритмы в ряде случаев дают $O(n)$ операций.

1.1. Обозначения, основные формулы и определения

Определим систему обозначений и символов, которые далее будут использоваться:

- ОНБ – ортонормированный базис;
- КРА – кратно-разрешающий анализ (multiresolution analysis);
- \mathbf{N} – множество, состоящее из всех положительных целых чисел;
- \mathbf{Z} – множество всех целых чисел;
- \mathbf{R} – множество всех вещественных чисел;
- $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ – множество ненулевых вещественных чисел,
- \mathbf{C} – множество всех комплексных чисел;
- (a, b) – открытый интервал в \mathbf{R} , $[a, b]$ – замкнутый интервал (отрезок) в \mathbf{R} ;

- $C^k(X)$ – пространство функций, которые являются k раз непрерывно дифференцируемыми в X , $k \in \mathbf{N}$,
- $C^\infty(X)$ – пространство функций, дифференцируемых бесконечное число раз;
- l^2 – пространство векторов $a = (a_k)$, $a_k \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$, для которых

$$\|a\|_{l^2}^2 = \sum |a_k|^2 < \infty$$

$L^2(\mathbf{R})$ – пространство измеримых функций, интегрируемых с квадратом на множестве \mathbf{R} .

Для функций из $L^2(\mathbf{R})$ определим скалярное произведение и норму.

1. *Скалярное произведение* двух комплекснозначных функций определяется соотношением

$$\langle f(t), g(t) \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (1.1)$$

где черта над функцией g обозначает комплексное сопряжение.

2. *Норма (или энергия)* функции f

$$\|f\|^2 := \langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1.2)$$

- *Свертка* функций $f(t)$ и $g(t)$ определяется так:

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (1.3)$$

- *Преобразование Фурье* определяется как отображение $F : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$, переводящее произвольную функцию $f \in L^2(\mathbf{R})$ в функцию

$$\widehat{f}(\omega) := F(f)(\omega) = \langle f(t), e^{i\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.5)$$

Обратное преобразование Фурье есть отображение $F^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, действующее по формуле:

$$f(t) := F^{-1}(\widehat{f})(t) = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}(\omega), e^{-i\omega t} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.6)$$

- Для любых двух функций $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ имеет место равенство Парсеваля:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega \quad (1.7)$$

При $f = g$ из (1.7) получается равенство Планшереля:

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (1.8)$$

- Преобразование Фурье свертки функций $f(t)$ и $g(t)$ равно произведению их Фурье-образов:

$$F(f * g)(t) = \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) \quad (1.9)$$

- *Носителем* функции f называется замыкание множества всех точек, в которых $f \neq 0$; носитель f обозначается $\text{supp } f$. Под *компактным множеством* понимается замкнутое ограниченное множество в конечномерном пространстве \mathbf{R}^n ($n \in \mathbf{N}$). Если $\text{supp } f$ – компактное множество, то функция f называется *финитной*.
- Конечная и бесконечная система функций $\{f_\kappa\}$ из $L^2(\mathbb{R})$ называется *ортogonalной*, если

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t) \overline{f_n(t)} dt = 0, \quad m \neq n \quad (1.10)$$

- Ортогональная система функций называется *полной*, если в $L^2(\mathbf{R})$ не существует функции, отличной от нулевой и ортогональной всем элементам системы. Ортогональная система функций называется *ортонормированной*, если $\|f_k\| = 1$ для всех k . Полная ортонормированная система функций называется *ортонормированным базисом* пространства $L^2(\mathbf{R})$.
- Числа $\alpha_k = \langle f, f_k \rangle$ называются *коэффициентами Фурье* функции $f(t)$ относительно ортонормированной системы функций $\{f_k\}$:

$$\alpha_k = \langle f, f_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f_k(t)} dt \quad (1.11)$$

Если функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ представима в форме

$$f(t) = \sum_k \lambda_k f_k(t),$$

то это представление *единственно* и коэффициенты λ_k равны коэффициентам Фурье α_k функции $f(t)$. Формула

$$f(t) = \sum_k \alpha_k f_k(t) \quad (1.12)$$

называется *разложением Фурье* (или *ортogonalным разложением*) функции $f(t)$ по системе функций $\{f_k\}$. Каждая функция f_k порождает подпространство L_k , состоящее из функций вида $\{\lambda f_k\}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Выражение $\text{Pr}_{L_k} f(t) = \alpha_k f_k(t)$ совпадает с *проекцией* функции $f(t)$ на подпространство L_k ;

- Система $\{f_n\}$ является *базисом Рисса*, если любой элемент $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть единственным образом представлен в виде $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n f_n$ и существуют положительные константы A и B такие, что

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 \leq B\|f\|^2.$$

- *Формула суммирования Пуассона* может быть записана в следующих двух формах:

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} f(x-l) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(2k\pi) e^{i2k\pi x} \quad (1.13)$$

и

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \langle f, g(x-l) \rangle e^{-i\omega l} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(\omega + 2k\pi) \overline{\widehat{g}(\omega + 2k\pi)} \quad (1.14)$$

- Пусть $\mathbf{x}=(x_k)$, $\mathbf{y}=(y_k)$, $\mathbf{h}=(h_k)$ векторы из ℓ^2 .
Вектор \mathbf{y} называется *сверткой* векторов \mathbf{x} и \mathbf{h} если

$$y_n := \sum_{k \in \mathbf{Z}} x_k h_{k-n}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (1.15)$$

- Если компоненты h_k вектора $\mathbf{h} \in \ell^2$ формально интерпретировать как коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме, тогда 2π - периодическую функцию $H(\omega)$

$$H(\omega) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k e^{-ik\omega} \quad (1.16)$$

принято называть *дискретным преобразованием Фурье* сигнала (h_k) . Причем, очевидно,

$$h_k = \frac{1}{2\pi} \langle H, e^{-ik\omega} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\omega) e^{ik\omega} d\omega \quad (1.17)$$

- Формальную сумму

$$H(z) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k z^{-k} \quad (1.18)$$

называют *z-преобразованием* сигнала.

1.2. Краткая историческая справка по вейвлет-анализу*

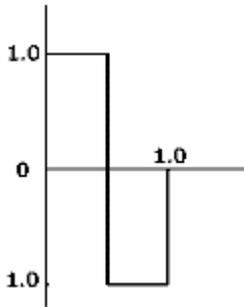


Рис. 1.3. Вейвлет Хаара

Математическая система аксиом, скрытая за конструкцией вейвлет-анализа, называется в настоящее время *кратно-разрешающим* (или *кратно-масштабным*) анализом (*multiresolution analysis*).

Первые всплески были построены Хааром в 1909 (рис. 1.3).

Упомянем некоторые достижения в теории сигналов, которые вплотную подошли к конструкции всплесков.

Точное восстановление функций с ограниченным по ширине Фурье-спектром по значениям функции при дискретных значениях аргумента дает теорема Котельникова-Шеннона. Связанный с этой теорией всплеск получил название *вейвлет Шеннона*.

В 1946 году Д. Габор предложил обобщение метода Фурье, промежуточное между стандартным Фурье-преобразованием и вейвлет-анализом.

Математическая конструкция кратко разрешающего анализа (КРА) синтезирует в себе две идеи обработки сигналов. Первая идея – разложение сигнала по поддиапазнам (*subband decomposition*) при помощи *квадратурных зеркальных фильтров* (*quadrature mirror filters*) – появилась в задаче сжатия речи. Вторая идея – *пирамидальное представление* (*pyramidal representation*) – возникла при решении задачи сжатия изображений. Обе идеи связаны с обработкой сигналов фильтрами специального вида. В первом случае теория строилась в терминах Фурье-преобразования сигнала, во втором – в терминах исходного сигнала.

В формулировке самих аксиом кратко разрешающего анализа принципиально важную роль сыграли наблюдения С. Малла о связи всплесков с квадратурными зеркальными фильтрами, разрабатывавшимися для цифровых телефонов (около 1983 года), и пирамидальными схемами, использовавшимися для обработки сигналов и изображений (примерно в это же время).

Лавинообразный рост интереса в значительной степени инициирован публикациями статей (около 1984 года), написанных Ж. Морле и А. Гроссманом, по приложению непрерывного КРА к

* См. также журнал "Компьютерра", №8, 1998.

проблемам геофизики. Летом 1985 года И. Мейер обнаружил бесконечно дифференцируемую систему всплесков, дающую ортонормированные базисы многих функциональных пространств. Хотя аналогичный базис был построен Я. Стрембергом еще в 1981 году, именно открытие Мейера дало толчок серьезному пересмотру всех математических вопросов в этой области.

В явном виде *кратно разрешающий анализ*, лежащий в основе дискретного вейвлет-преобразования, был сформулирован осенью 1986 года С. Малла и И. Мейером.

С помощью КРА в 1987 году И. Добеши (I. Daubechies) построила бесконечную серию всплесков, обладающих основным свойством системы Хаара – ортогональностью и компактным носителем.

Работы В. Л. Рвачева и В. А. Рвачева 1971-1973 годов имеют прямое отношение к всплескам. А именно, этими учеными был выписан широкий класс дифференциально-функциональных уравнений, обладающих решениями с компактным носителем. В качестве частного предельного случая в него входило и уравнение, определяющее всплески Добеши, которое, однако, детально не изучалось, и, соответственно, кратко разрешающий анализ не был сформулирован.

Первые статьи *российских авторов* по теории всплесков вышли в 1992 году. В СНГ состоялось несколько международных конференций (Москва, 1995; Днепропетровск, 1996; Дубна, 1998; С.-Петербург, 1999, Екатеринбург, 2000 и др.), на которых в ряду других проблем теории приближений обсуждались различные аспекты теории вейвлет-анализа.

Глава 2. Преобразование сигналов

При анализе и интерпретации сейсмических трасс, каротажных диаграмм или другой геофизической информации извлечение особенностей сигналов имеет первостепенное значение. Часто важные особенности анализируемого сигнала типа пиков, ограниченных по ширине колебаний характеризуются локальной информацией или в области времени, или в частотной области, или в них обеих. Например, когда мы рассматриваем запись колебаний после взрыва, гиперболическая форма сигнала видна, но часто возмущена низкоскоростной поверхностной волной. Она имеет высокую амплитуду и, следовательно, затемняет особенности, представляющие интерес. При преобразовании пространственно-временных данных в частотную область поверхностная волна и полезная информация занимают различные области. Если и особенности и поверхностная волна могут отделяться друг от друга

в частотной области, то можно применить частотную фильтрацию для удаления поверхностной волны из записи в обеих областях. Но если другие интересные особенности в сигнале имеют близкие по частоте компоненты, то частотная фильтрация не эффективна.

В следующих разделах мы опишем несколько преобразований сигналов, каждое из которых позволяет по-своему взглянуть на изучаемые данные. Помимо достоинств этих преобразований будет акцентироваться внимание и на их слабые стороны.

Анализирующие функции. Как правило, сигнал $f(t)$ содержит полезную информацию, которая осложнена помехами (шумом). Примем, что аргументом функции (сигнала) $f(t)$ является время t . Хорошо, когда полезная информация и шум отделяются во временной области. К сожалению, обычно дело обстоит не так. В этом случае сигнал можно спроектировать (отобразить) в другую область. В этой области – области изображений – стремятся отделить интересующую особенность от “шума”. Для такого отображения чаще используют интегральные преобразования вида

$$\tilde{f}(s) = \langle f(t), K(s, t) \rangle = \int_a^b f(t)K(s, t)dt. \quad (2.1)$$

Здесь $K(s, t)$ -ядро интегрального преобразования, а пределы интегрирования могут принимать любые вещественные значения. Соотношение (2.1) можно рассматривать как функцию взаимной корреляции между сигналом и ядром при различных значениях параметра s .

Соотношение (2.1) является интегральным уравнением (первого рода) относительно функции $f(t)$ (оригинала), поэтому важно выбрать функцию $K(s, t)$ такой, чтобы существовал устойчивый алгоритм ее реконструкции. Кроме того, желательно, чтобы в области изображений

- подчеркивались полезная информация,
- “шум” подавлялся или отделялся от полезной информации.

Для того, чтобы подчеркнуть роль ядра в (2.1), его иногда называют *анализирующей функцией* интегрального преобразования и используют несколько иное обозначение

$$\phi_s(t) := K(s, t)$$

и, следовательно, (2.1) примет вид:

$$\tilde{f}(s) = \langle f(t), \phi_s(t) \rangle \quad (2.1')$$

В качестве анализирующих функций будем использовать также некоторый функциональный базис $\{\phi_n(t)\}, n \in Z$.

Анализирующие функции $\phi_s(t)$ могут выбираться такими, чтобы они являлись хорошей основой для описания особенностей, представляющих интерес во входном сигнале $f(t)$. Следует принять во внимание возможность восстановления оригинала (сигнала) из его представления в области изображений (существование функции реконструкции), устойчивость прямого и обратного преобразований, ортогональность функций базиса. Другими словами, если мы хотим извлечь или подчеркнуть некоторые особенности во входном сигнале $f(t)$, логично в качестве анализирующих функций использовать те, которые способны описать эти особенности наилучшим образом.

Тестовый сигнал. В последующих разделах мы будем иллюстрировать работу различных алгоритмов на сигнале, изображенном на рис. 2.1. Сигнал содержит несколько особенностей: два разрыва, два ограниченных колебания, шум и глобальное изменение. Этот сигнал будет использоваться далее как тестовый.

Конечно, в компьютерном представлении функция $f(t)$ представлена отсчетами (выборкой).

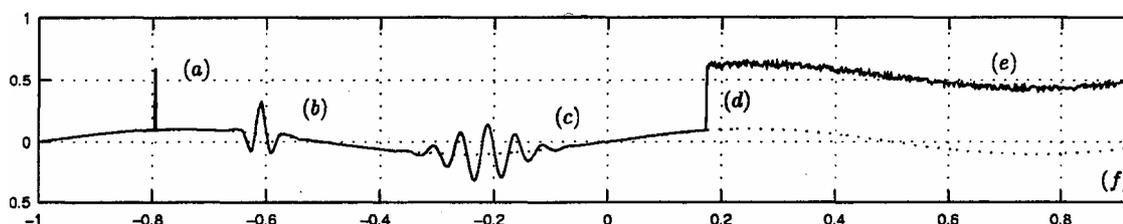


Рис. 2.1. Тестовый сигнал с некоторыми интересными особенностями:

- (a) Импульс Дирака в $t = -0.8$,
- (b) wavelet в $-0.7 < t < -0.55$
- (c) ограниченная гармоническая функция в $-0.4 < t < -0.1$,
- (d) ступенчатая функция в $t = 0.18$, (e) белый шум в $t > 0.18$,
- (f) добавленная синусоида $-1 < t < 1$.

2.1. Теорема отсчетов Котельникова-Шеннона.

Предположим, что функция $f(t)$ имеет ограниченный по ширине спектр (преобразование Фурье имеет компактный носитель). Пусть

$$\widehat{f}(\omega) \equiv 0, \quad |\omega| > \omega_{\max} \quad (2.2)$$

Котельников и Шеннон показали, что функция $f(t)$ с ограниченной полосой спектра может быть представлена функциональным рядом:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f\left(\frac{\pi n}{\omega_{\max}}\right) \frac{\sin(\omega_{\max} t - n\pi)}{\omega_{\max} t - n\pi}, \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_{\max}}, \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) называют *формулой Котельникова-Шеннона*. Из формулы (2.3) видно, что функция $f(t)$ может быть точно восстановлена по ее дискретным значениям, взятым в узлах $t_n = \pi n / \omega_{\max}$.

Рассмотрим функцию:

$$\text{sinc}(t) := \frac{\sin(t)}{t}$$

которую называют *sinc-функцией*. Ее график представлен на рисунке 2.2.

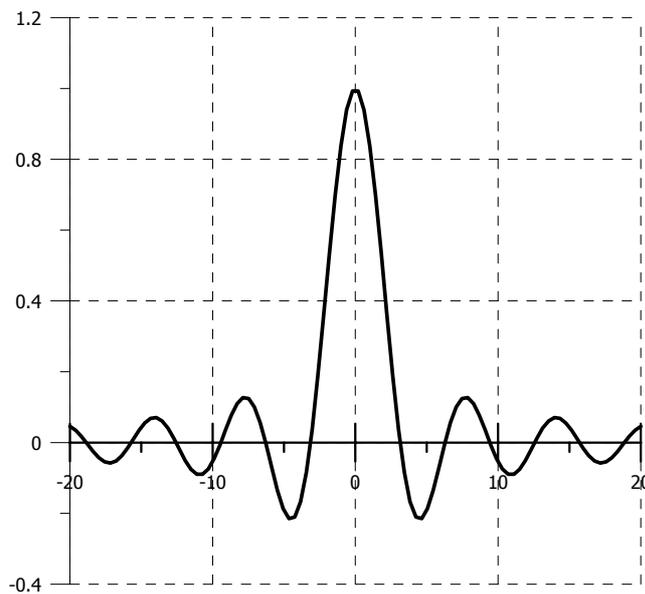


Рис. 2.2. График sinc-функции

Примем

$$\varphi_{a,n}(t) := \left\{ \frac{\sin(at - n\pi)}{at - n\pi} \right\}, \quad a := \omega_{\max}.$$

Система функций $\{\varphi_{a,n}(t)\}, n \in \mathbf{Z}$ является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbf{R})$, поэтому коэффициенты ряда Фурье по этой системе функций равны

$$f(\pi n / a) = \langle f(t), \varphi_{a,n}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_{a,n}(t) dt$$

и совпадают с дискретными значениями функции $f(t)$ в точках $\pi n / a$.

Отметим, что преобразование Фурье *sinc*-функции равно

$$F\{\text{sinc}(at)\} = \begin{cases} 1 & : |\omega| < a \\ 0 & : |\omega| \geq a \end{cases} \quad (2.4)$$

Это проиллюстрировано на рисунке 2.3(a). Фазовая плоскость покрыта вытянутыми параллельно оси частот столбиками.

На рисунке 2.3(b) показана проекция тестового сигнала на фазовую плоскость в *sinc*-базисе. Как видно из рисунка, представление не дает никакой дополнительной информации помимо поведения сигнала во временной области. Например, мы ничего не можем узнать о частотах, на которых происходили изменения.

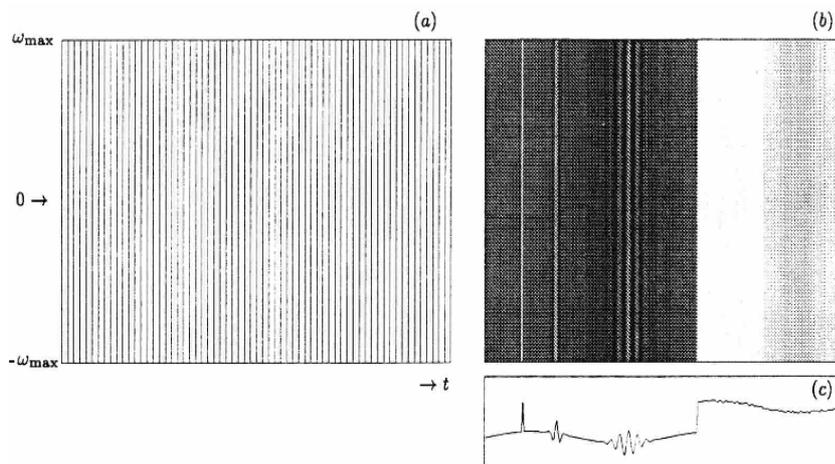


Рис. 2.3. (a) Частотно-временное представление *sinc*-базиса, (b) Частотно-временное представление тестового сигнала в *sinc*-базисе, (c) тестовый сигнал.

В следующих разделах будут обсуждены другие типы анализирующих функций. Прежде всего, будет представлена непрерывное преобразование Фурье. Это преобразование разлагает сигнал по гармоническим функциям. Во-вторых, будет представлено преобразование Gabor'a. Эта преобразование основано на использовании анализирующих функций оконного преобразования Фурье. Затем, мы перейдем к wavelet-преобразованию и укажем его некоторые особенности в сравнении с предыдущими преобразованиями.

2.2. Непрерывное преобразование Фурье

Преобразование Фурье состоит из разложения сигнала $f(t)$ в комбинацию гармонических функций (синусов и косинусов). Синусы и косинусы объединены в комплексной показательной функции согласно формуле Эйлера:

$$\phi_{\omega}(t) := e^{i\omega t} = \sin \omega t + i \cos \omega t \quad (2.6)$$

Используя формулу (2.6) и определение скалярного произведения (1.1), можно определить разложение сигнала $f(t)$ по гармоническим функциям посредством преобразования Фурье. Преобразование Фурье определяется отображением $F : \mathbf{L}^2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, которое функции $f(t)$ ставит в соответствие функцию $\hat{f}(\omega)$

$$\hat{f}(\omega) := F(f) = \langle f(t), e^{i\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.7)$$

Формула обращения преобразования Фурье имеет вид:

$$f(t) := \langle \hat{f}(\omega), \phi_t(\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.8)$$

Анализирующие функции в обеих областях связаны равенством:

$$\phi_t(\omega) = \frac{1}{2\pi} \overline{\phi_{\omega}(t)} \quad (2.9)$$

Квадраты норм сигнала и его спектра (другими словами, их мощности) связаны равенством Планшереля (см. формулы (1.7)-(1.8)):

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\omega), \hat{f}(\omega) \rangle \quad (2.10)$$

2.3. Оконное преобразование Фурье

При анализе сигналов преобразование Фурье является хорошим инструментом для определения изменений частотного спектра сигнала, но ничем не может помочь при оценке времени их изменения. Помимо этого, его базисные функции – синусы и косинусы – имеют бесконечный носитель (т.е. отличны от нуля на всей числовой прямой). Это приводит к невозможности обнаружения отдельных особенностей в сигнале и только глобальные изменения улавливаются достаточно хорошо. Один из возможных путей устранения этого недостатка преобразования Фурье – разделение временной оси с использованием т.н. оконной функции. Преобразование Фурье оконной версии сигнала дает возможность связать частотный спектр с частью сигнала, локализованной в окне.

Рассмотрим функцию окна $\gamma(t)$ определенной ширины и амплитуды, которая быстро убывает к границам окна. Оконное преобразование Фурье состоит в умножении сигнала $f(t)$ на функцию окна $\gamma(t)$, сосредоточенную вокруг $t = 0$, и вычислении коэффициентов Фурье произведения $f(t)\gamma(t)$, где $\overline{\gamma(t)}$ – функция, комплексно сопряженная $\gamma(t)$. Эти коэффициенты определяют спектр функции $f(t)$ в окрестности $t = 0$. Затем эта процедура повторяется со сдвинутыми вариантами оконной функции, то есть $\overline{\gamma(t)}$ заменяется на $\overline{\gamma(t - \tau)}$, где τ – шаг по оси времени. Преобразование Фурье этого произведения имеет вид:

$$c(\omega, \tau) := \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\overline{\gamma(t - \tau)}] e^{-i\omega t} dt \quad (2.11)$$

Обозначим

$$\gamma_{\omega, \tau}(t) := \gamma(t - \tau) e^{i\omega t}$$

Тогда формулу (2.11) можно переписать так

$$c(\omega, \tau) = \langle f, \gamma_{\omega, \tau} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\gamma_{\omega, \tau}(t)} dt \quad (2.11')$$

Ширина окна во временной области связана с шириной окна в области частоты аналогом принципа неопределенности Гейзенберга (Gabor, 1946). Уменьшая окно по времени, мы локализуем изменения сигнала в пространстве; при уменьшении ширины окна по частоте точнее определяем скачки частот. Ширина оконной функции – иначе она называется *радиусом оконной функции* – в области времени определяется следующей формулой:

$$\Delta_t := \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t})^2 |\gamma(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.13)$$

где

$$\bar{t} := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |\gamma(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t)|^2 dt} \quad (2.14)$$

Соответственно, ширина в области частоты определяется соотношением:

$$\Delta_\omega := \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |\gamma(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.15)$$

где

$$\bar{\omega} := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\gamma(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.16)$$

Величины \bar{t} и $\bar{\omega}$ называются *центрами оконной функции*. Произведение двух радиусов удовлетворяет неравенству:

$$\Delta_t \Delta_\omega \geq \frac{1}{2}, \quad (2.17)$$

причем равенство имеет место только для гауссовой функции

$$\gamma_\alpha(t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}, \quad (\alpha > 0) \quad (2.18)$$

и функций вида

$$ce^{i\alpha t} \gamma_\alpha(t-b),$$

($c \neq 0$, a и b – вещественные параметры).

Неравенство (2.17) говорит о том, что невозможно одновременно точно определить t и ω , но только с некоторой долей неопределенности. Это утверждение тесно связано принципом неопределенности Гейзенберга, и это – важное утверждение теории информации (Gabor, 1946; Шеннон, 1993).

Непрерывное изменение параметров τ и ω определяет сигнал $f(t)$ полностью, но ведет к очень избыточному его представлению. Выполним дискретизацию по τ и ω . Отметим, что дискретизация относительно τ и ω не обязательно подразумевает дискретизацию по t . Положим $\tau = n\tau_0$, $\omega = m\omega_0$, $n, m \in \mathbf{Z}$. Тогда формула (2.11') перепишется в виде:

$$c_{m,n} := \langle f, \gamma_{m,n}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\gamma_{m,n}(t)} dt, \quad \text{и}$$

$$\gamma_{m,n}(t) := \gamma(t - n\tau_0) e^{im\omega_0 t}$$

Теперь рассмотрим временную и частотную области. Между двумя этими областями имеет место подобие, которое можно схематически записать так:

$$\gamma(t - n\tau_0)e^{im\omega_0 t} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{F^{-1}} \end{array} \widehat{\gamma}(\omega - m\omega_0)e^{-im\omega_0 t} \quad (2.12)$$

Временная ось разбивается на интервалы с шагом τ_0 , а ось частоты – на интервалы со смещением ω_0 .

Восстановление (реконструкция) сигнала

Из формулы (2.11) имеем:

$$f(t)\overline{\gamma(t-\tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega, \tau)e^{i\omega t} d\omega$$

Находить функцию $f(t)$ путем деления на $\overline{\gamma(t-\tau)}$ нельзя, т.к. она может принимать значения, равные нулю. Поэтому умножим обе части равенства на $\gamma(t-\tau)$ и проинтегрируем по τ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)|\gamma(t-\tau)|^2 d\tau &\equiv f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t-\tau)|^2 d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega, \tau)\gamma(t-\tau)e^{i\omega t} d\omega d\tau \end{aligned}$$

Следовательно, формула обращения оконного преобразования Фурье принимает вид:

$$f(t) = C^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega, \tau)\gamma(t-\tau)e^{i\omega t} d\omega d\tau, \quad \text{где}$$

$$C := \|\gamma\|^2,$$

или

$$f(t) = C^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega, \tau)\gamma_{\omega, \tau}(t) d\omega d\tau,$$

причем

$$\begin{aligned}
C := \|\gamma\|^2 &= \langle \gamma, \gamma \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t-\tau) \overline{\gamma(t-\tau)} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t-\tau) e^{i\omega t} \overline{\gamma(t-\tau) e^{i\omega t}} dt = \|\gamma_{\omega, \tau}\|^2
\end{aligned}$$

Итак, прямое и обратное оконное преобразование Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned}
c(\omega, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\gamma_{\omega, \tau}(t)} dt, \\
f(t) &= C^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega, \tau) \gamma_{\omega, \tau}(t) d\omega d\tau, \quad C := \|\gamma\|^2
\end{aligned}$$

2.4. Преобразование Габора

Соответствующее преобразование описано в работе Gabor'a (1946), а применения сейсмике (теория баланса) обсуждены в работе Raz (1987).

Если в формуле (2.11) в качестве γ взять гауссову функцию (2.18), то получится *непрерывное преобразование Габора*.

Для гауссова сигнала (формула (2.18)) неравенство (2.17) превращается в равенство. Эта оптимальная связь между двумя областями делает гауссов сигнал идеальным кандидатом для работы с окнами на оси времен и частот.

Будем использовать эту функцию в качестве оконной:

$$\gamma_{m,n}(t) := \gamma(t - n\tau_0) e^{im\omega_0 t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{(t-n\tau_0)^2}{4\alpha}} e^{im\omega_0 t} \quad (2.19)$$

График функции $\gamma_{5,0}(t) = e^{-x^2} e^{-i5t}$ изображен на рис. 2.4. Жирной линией показана действительная часть, тонкой линией – мнимая часть, пунктиром - экспоненты $\pm e^{-x^2}$.

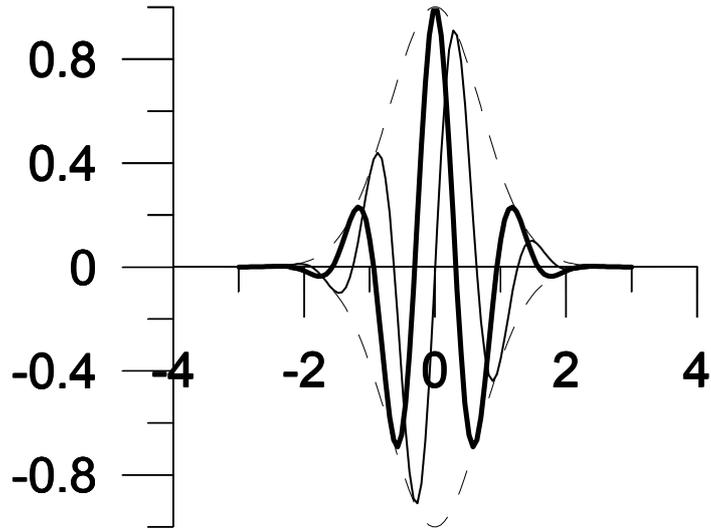


Рис.2.4. Графики функции Габора $\gamma_{5,0}(t)$ ($\omega_0=1, \rho=1, \tau_0=\sqrt{2\pi}$):
 $Re \gamma_{5,0}(t)$ – жирная линия, $Im \gamma_{5,0}(t)$ – тонкая линия.

частотно-временное представление преобразования Габора иллюстрирует рис. 2.5. На рисунке 2.5(а) видно, что фазовая плоскость покрыта прямоугольниками со сторонами τ_0 и τ_0 .

Разложение сигнала по базису (2.19) называется *дискретным преобразованием Габора*.

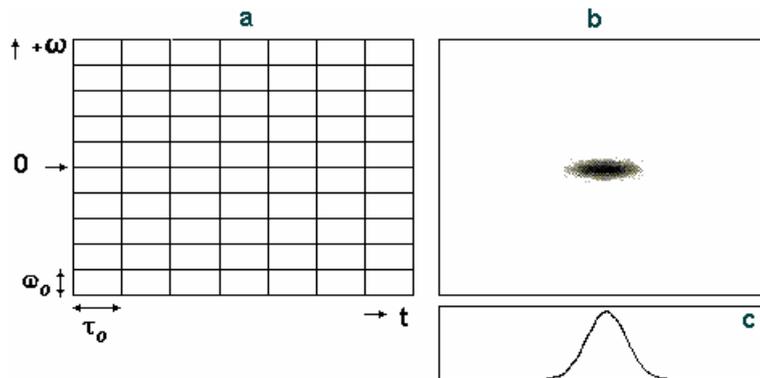


Рис. 2.4. Дискретное преобразование Габора.

- (a) Частотно-временное представление преобразования Габора,
- (b) Частотно-временное представление тестового сигнала в базисе Габора,
- (c) Некоторый тестовый сигнал.

Глава 3. Wavelet-преобразование

В зависимости от вида анализирующей функции фазовая плоскость разбивается прямоугольниками, имеющими различные

длины сторон. В предыдущих разделах были обсуждены три анализирующие функции: $\text{sinc}(t)$, гармонические функции (преобразование Фурье) и оконные гармонические функции (преобразование Габора). Преимущество преобразования Габора заключается в локализации функций базиса как во временной, так и в частотной области. Однако, нам этого не достаточно. В преобразовании Габора радиусы оконных функций фиксированы в обеих областях. А возможно ли их варьировать? Гроссман и Морле (Grossmann, Morlet, 1985) предложили масштабирующие анализирующие функции, которые могут изменять свою ширину в зависимости от частоты анализируемой информации. Это показано на рисунке 2.6. Видно, что базисные функции имеют большую ширину во временной области для низкочастотных компонент и малую ширину для высокочастотных компонент.

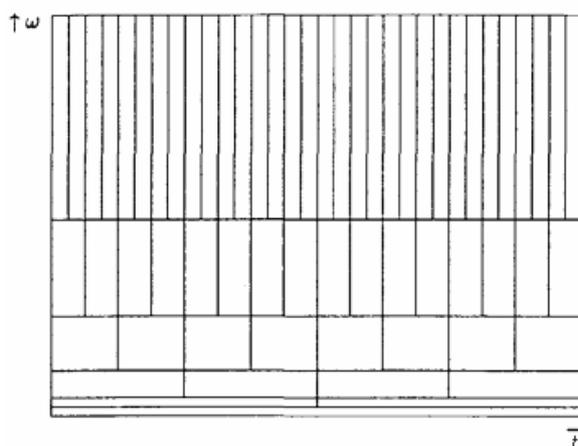


Рис 2.6. Увеличивающаяся ширина анализирующих функций непрерывного wavelet-преобразования: на высоких частотах анализирующие функции имеют малый носитель во временной области, а на низких частотах носитель анализирующей функции почти полностью покрывает временную область

Ниже будут обсуждаться прямое (анализ) и обратное (реконструкция, восстановление, синтез) непрерывное (CWT) и дискретное (DWT) вейвлет-преобразования.

3.1. Непрерывное вейвлет-преобразование

Анализирующие функции wavelet-преобразования (WT) могут быть перемещены во времени (сдвиг на τ), но могут также изменяться и по ширине. Если σ - параметр расширения (растяжения), а τ - параметр сдвига, то можно записать:

$$\psi_{\sigma,\tau}(t) := \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right) \quad (3.1)$$

Здесь функция $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ называется *анализирующим вейвлетом*. Непрерывное вейвлет-преобразование есть отображение:

$$W_\psi f : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, \quad (3.2)$$

определяемое по формуле

$$(W_\psi f)(\sigma, \tau) = \left\langle f(t), \psi_{\sigma,\tau}(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \overline{\psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)} dt \quad (3.3)$$

Аналитически определяемые всплески и их графики

1) *Всплеск Хаара* определяется соотношением (рис. 1.1)

$$\psi(x) = \chi_{[0, 1/2)}(x) - \chi_{[1/2, 1)}(x).$$

2) *Всплеск Котельникова-Шеннона* определяется формулой

$$\psi(t) = 2\text{sinc}(2\pi(t - 1/2)) - \text{sinc}(\pi(t - 1/2)).$$

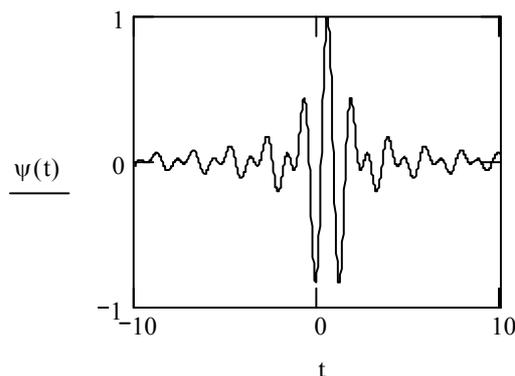


Рис.3.2. Всплеск Котельникова-Шеннона

3) *Всплески на основе производных функции Гаусса*. Вещественные вейвлеты нередко строятся на основе производных функции Гаусса. Более высокие порядки производных имеют больше нулевых моментов и позволяют получить сведения об особенностях более высокого порядка, содержащихся в сигнале:

$$\psi(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- a) *WAVE-вейвлет*. Всплеск, соответствующий первой производной гауссиана, носит название *WAVE-всплеск* (рис. 3.1a).
- b) *МНАТ-вейвлет*. Всплеск, соответствующий второй производной гауссиана, носит название *МНАТ-вейвлет* (“сомbrero” или “мексиканская шляпа”). На рисунке 3.1a показан анализирующий всплеск при различных растяжениях и локализациях во временной области. При уменьшении ширины всплеска во временной области, как это видно из рисунка 3.1b, его ширина в частотной области увеличивается.

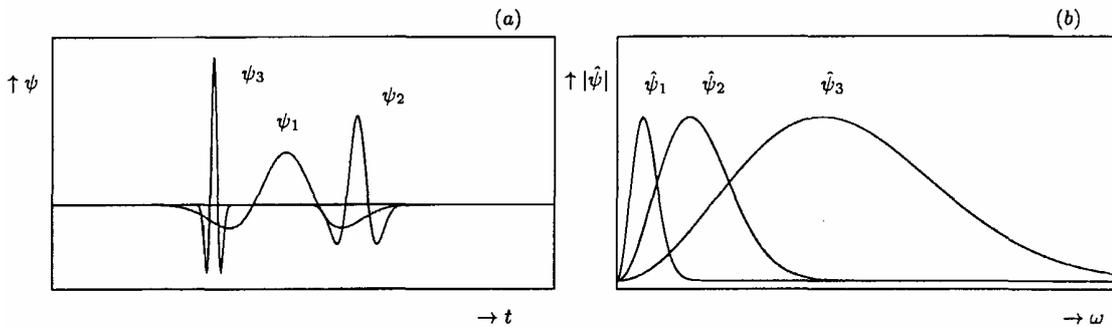


Рис. 3.1. Три анализирующих всплеска (wavelets):

$$\psi_1 = \psi_{\sigma,0}, \quad \psi_2 = \psi_{\sigma/2,\tau_0} \quad \text{и} \quad \psi_3 = \psi_{\sigma/4,-\tau_0}$$

(a) во временной области (b) в области частоты.

- c) *DOG-вейвлет* (Difference of Gaussians, разность гауссианов).

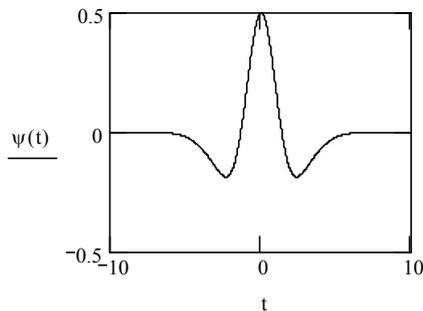


Рис. 3.4 DOG-wavelet

По этому же алгоритму строится так называемый *DOG-вейвлет*:

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t^2}{8}}$$

- 4) *Всплеск Морле*. Наиболее часто используемый комплексный базис строится на основе хорошо локализованного во временной и частотной области вейвлета Морле (*Morlet*):

$$\psi(t) = \pi^{1/4} \left(e^{-i\gamma t} - e^{-\frac{\gamma^2}{2}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \gamma \in \mathbf{R}.$$

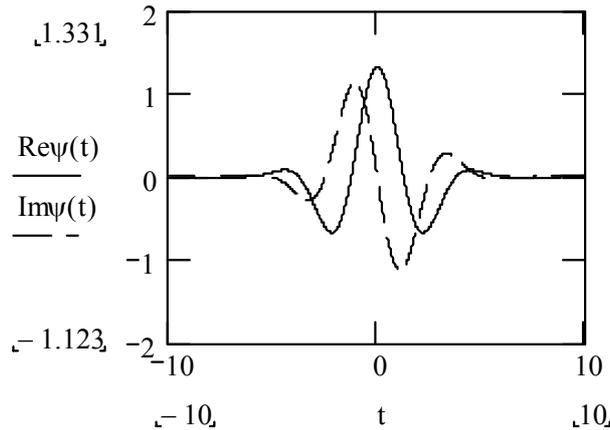


Рис. 3.5 Графики действительной и мнимой частей всплеска Морле.

5) *Всплеск Пауля*. В квантовой механике находит применение комплексный вейвлет Пауля (Paul)

$$\psi(t) = \Gamma(m + 1) \frac{i^m}{(1 - it)^{m+1}}$$

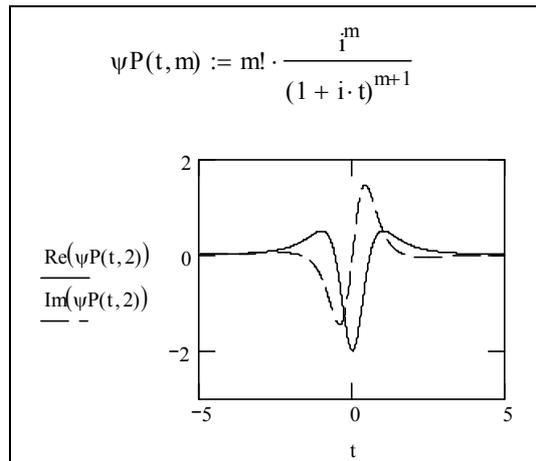


Рис.3.6. Вейвлет Пауля при $m=2$.

Пример. Графики непрерывного вейвлет-преобразования тестового сигнала, изображенного на рис. 2.1, на основе всплесков, являющихся первой и второй производной функции Гаусса, приведены на рис. 3.6.

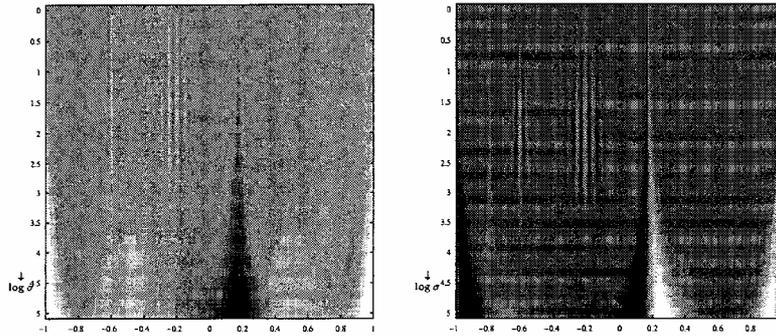


Рис. 3.6. Непрерывное вейвлет-преобразование тестового сигнала посредством всплесков, являющихся 1-ой и 2-ой производными гауссиана.

Сравним непрерывное вейвлет-преобразование с оконным преобразованием Фурье. Первое из них переводит произвольную функцию $f \in L^2(R)$ в скалярное произведение $\langle f, \psi_{\sigma, \tau} \rangle$, а второе – в скалярное произведение $\langle f, \gamma_{\omega, \tau} \rangle$ (см. (2.11')). Частотно-временной прямоугольник оконной функции γ имеет вид (см. рис. 3.7):

$$\Pi(\gamma) = [\bar{t} - \Delta_t, \bar{t} + \Delta_t] \times [\bar{\omega} - \Delta_\omega, \bar{\omega} + \Delta_\omega]$$

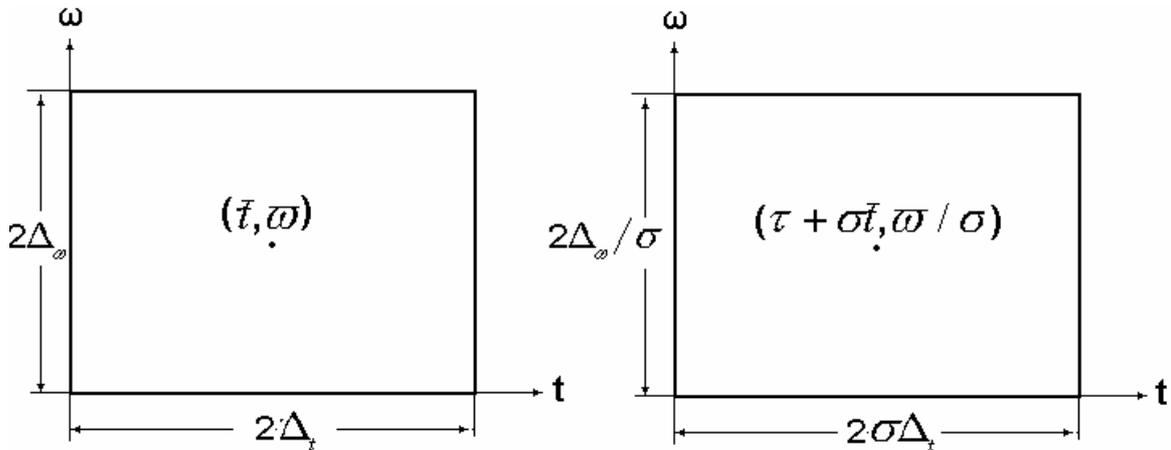


Рис. 3.7. Частотно-временные прямоугольники.

Площадь этого прямоугольника равна $4\Delta_t \Delta_\omega$ и, согласно (2.17), не меньше 2.

Для функции $\gamma_{\omega, \tau}(t) = e^{i\omega t} \gamma(t - \tau)$ размеры прямоугольника остаются такими же, как у $\Pi(\gamma)$, но центр перемещается в точку $(\bar{t} + \tau, \bar{\omega} + \omega)$. Прямоугольник имеет ширину $2\Delta_t$ и

длину $2\Delta_\omega$. Этот прямоугольник в случае преобразования Габора с

$$\gamma = \gamma_\alpha \text{ будет } \Delta_t = \alpha^{1/2}, \Delta_\omega = 1/\alpha^{1/2}.$$

Для функции $\psi_{\sigma,\tau}$ частотно-временной прямоугольник имеет вид (рис. 3.7.):

$$\Pi(\psi_{\sigma,\tau}) =$$

$$[\tau + \sigma\bar{t} - \sigma\Delta_t, \tau + \sigma\bar{t} + \sigma\Delta_t] \times [\bar{\omega}/\sigma - \Delta_\omega/\sigma, \bar{\omega}/\sigma + \Delta_\omega/\sigma]$$

где \bar{t}, Δ_t и $\bar{\omega}, \Delta_\omega$ определяются так же, как для функции γ (с заменой γ на $\psi_{\sigma,\tau}$). Для прямоугольника $\Pi(\psi_{\sigma,\tau})$ имеем: $(\tau + \sigma\bar{t}, \bar{\omega})$ - центр, $2\sigma\Delta_t$ -ширина, $2\Delta_\omega/\sigma$ - высота, $4\Delta_t\Delta_\omega$ - площадь. Ширина прямоугольника $\Pi(\psi_{\sigma,\tau})$ сужается для высоких частот ($\sigma > 0$ - мало) и расширяется для низких частот ($\sigma > 0$ - велико).

Формула обращения

Восстановим функцию $f(t)$ по ее непрерывному вейвлет-преобразованию (CWT) $(W_\psi f)(\sigma, \tau)$. Отправной точкой для этого является равенство Парсеваля:

$$\langle f(t), \psi_{\sigma,\tau}(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\omega), \hat{\psi}_{\sigma,\tau}(\omega) \rangle$$

где

$$\hat{\psi}_{\sigma,\tau}(\omega) = F \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \psi \left(\frac{t-\tau}{\sigma} \right) \right\} = \sqrt{|\sigma|} e^{-i\omega\tau} \hat{\psi}(\sigma\omega) \quad (3.4)$$

Таким образом, (3.3) принимает вид:

$$(W_\psi f)(\sigma, \tau) = \frac{\sqrt{|\sigma|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega\tau} \overline{\hat{\psi}(\sigma\omega)} d\omega, \quad (3.5)$$

где σ играет роль параметра. Эту формулу можно трактовать как обратное преобразование Фурье произведения функций $\hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\sigma\omega)}$. Применяя прямое преобразование Фурье по переменной τ к обеим частям последнего равенства, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi} f)(\sigma, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \sqrt{|\sigma|} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(\sigma\omega)} \quad (3.6)$$

Если теперь выразить отсюда $\widehat{f}(\omega)$, то функция $f(t)$ будет найдена. Мы не можем просто разделить на $\overline{\widehat{\psi}(\sigma\omega)}$, т.к. она может быть равна нулю. Вместо этого умножим обе части равенства (3.6) на $\widehat{\psi}(\sigma\omega)$ и проинтегрируем по положительным значениям параметра σ . Однако, из-за добавки $\sqrt{|\sigma|}$, необходимо будет умножить еще на весовую функцию $w(\sigma)$, которая пока неизвестна, но будет определена в процессе реконструкции исходной функции. Итак, имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} w(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi} f)(\sigma, \tau) \widehat{\psi}(\sigma\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ & = \widehat{f}(\omega) \int_0^{\infty} w(\sigma) \sqrt{|\sigma|} |\widehat{\psi}(\sigma\omega)|^2 d\sigma \end{aligned} \quad (3.7)$$

Обозначим:

$$C_{\psi}^{+}(\omega) := \int_0^{\infty} w(\sigma) \sqrt{|\sigma|} |\widehat{\psi}(\sigma\omega)|^2 d\sigma > 0$$

и предположим, что $C_{\psi}^{+}(\omega)$ и ее обратная величина ограничены всюду, кроме, может быть, множества меры нуль:

$$0 < A \leq C_{\psi}^{+}(\omega) \leq B < \infty$$

Тогда из (3.7) найдем:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{C_{\psi}^{+}(\omega)} \int_0^{\infty} w(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi} f)(\sigma, \tau) \widehat{\psi}(\sigma\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{C_{\psi}^{+}(\omega)} \int_0^{\infty} w(\sigma) \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi} f)(\sigma, \tau) \widehat{\psi}_{\sigma, \tau}(\omega) d\tau \end{aligned}$$

Весовую функцию $w(\sigma)$ выбирают таким образом, чтобы функции $C_{\psi}^{+}(\omega)$ была константой. Полагая $C_{\psi}^{+}(\omega) = C_{\psi}^{+} = const$, функция $f(t)$ может быть восстановлена посредством обратного Фурье-преобразования:

$$f(t) = F^{-1} \left\{ \frac{1}{C_{\psi}^{+}(\omega)} \int_0^{\infty} w(\sigma) \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi} f)(\sigma, \tau) \widehat{\psi}_{\sigma, \tau}(\omega) d\tau \right\} =$$

$$= \frac{1}{C_{\psi}^{+}} \int_0^{\infty} w(\sigma) \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi} f)(\sigma, \tau) F^{-1} \{ \widehat{\psi}_{\sigma, \tau}(\omega) \} d\tau$$

или

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}^{+}} \int_0^{\infty} w(\sigma) \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi} f)(\sigma, \tau) \psi_{\sigma, \tau}(t) d\tau$$

Покажем, как выбрать весовую функцию $w(\sigma)$ так, чтобы $C_{\psi}^{+}(\omega)$ была константой. Этого можно достигнуть, если положить:

$$w(\sigma) \sqrt{|\sigma|} d\sigma = \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \text{или} \quad \frac{w(\sigma)}{\sqrt{|\sigma|}} d\sigma = \frac{d\sigma}{\sigma^2},$$

тогда

$$C_{\psi}^{+}(\omega) := \int_0^{\infty} w(\sigma) \sqrt{|\sigma|} |\widehat{\psi}(\sigma\omega)|^2 d\sigma = \int_0^{\infty} |\widehat{\psi}(\sigma\omega)|^2 \frac{d\sigma}{\sigma}$$

Замена переменной $\xi = \sigma\omega$ дает:

$$C_{\psi}^{+}(\omega) = C_{\psi}^{+} = \int_0^{\infty} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} = \text{const}.$$

Формула обращения CWT примет вид:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}^{+}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi} f)(\sigma, \tau) \psi_{\sigma, \tau}(t) \frac{1}{\sigma^2} d\sigma d\tau. \quad (3.8_1)$$

Если в (3.7) выполнить интегрирование по интервалу $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ и потребовать выполнения равенства

$$w(\sigma)\sqrt{|\sigma|}d\sigma = \frac{d\sigma}{|\sigma|},$$

то придем к обратному wavelet-преобразованию в следующей форме:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(\sigma, \tau) \psi_{\sigma, \tau}(t) \frac{1}{\sigma^2} d\sigma d\tau. \quad (3.8_2)$$

Здесь

$$0 < C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|} < \infty.$$

Последнее соотношение называют *условием допустимости* для всплеска $\psi(t)$. Если это условие не выполняется, то восстановление функции $f(t)$ (оригинала) по $(W_\psi f)(\sigma, \tau)$ (изображению) невозможно.

3.2. Дискретное wavelet-преобразование (DWT)

Непрерывное wavelet-преобразование использует весь диапазон изменения величин σ и τ . Однако, на практике этого достичь невозможно. Требуется такой выбор отсчетов относительно σ и τ , то есть адекватная дискретизация фазового пространства, которая устраняла бы эту избыточность². Положим $\sigma = \sigma_0^j$, где $j \in \mathbf{Z}$ и $\sigma_0 > 1$. Это приводит к следующей дискретизации функций базиса:

$$\psi_{\sigma_0^j, \tau}(t) := \frac{1}{\sqrt{|\sigma_0|^j}} \psi\left(\frac{t - \tau}{\sigma_0^j}\right) \quad (3.9)$$

Тогда вейвлет-преобразование произвольного сигнала запишется в виде:

² Эта дискретизация не подразумевает дискретизацию по t .

$$\langle f(t), \psi_{\sigma_0^j, \tau}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|\sigma_0^j|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma_0^j}\right) dt \quad (3.10)$$

Дискретизируем теперь по τ . Пусть $\tau = k\tau_0\sigma_0^j$. Тогда формула (3.10) переписывается:

$$\langle f(t), \psi_{\sigma_0^j, k\tau_0\sigma_0^j}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|\sigma_0^j|}} \psi\left(\frac{t - k\tau_0\sigma_0^j}{\sigma_0^j}\right) dt \quad (3.11)$$

Формула (3.11) – вариант дискретного вейвлет-преобразования с уменьшением количества отсчетов при переходе от одного масштаба (j) к другому ($j+1$) (см. рисунок 3.8а).

Рассмотрим версию DWT без уменьшения количества отсчетов, которая является более избыточной по сравнению с предыдущим вариантом. Рисунок 3.8б показывает соответствующую дискретизацию фазового пространства. Избыточность имеет то преимущество, что особенности входного сигнала могут прослеживаться вдоль различных масштабов на тех же самых отсчетах: на одном масштабе интересующие нас тончайшие детали будут заметны, а на других – нет. В дискретном wavelet-преобразовании без понижения числа отсчетов не принимается во внимание ширина всплеска. Он просто перемещается на величину τ_0 вне зависимости от масштаба. Wavelet-функция имеет вид:

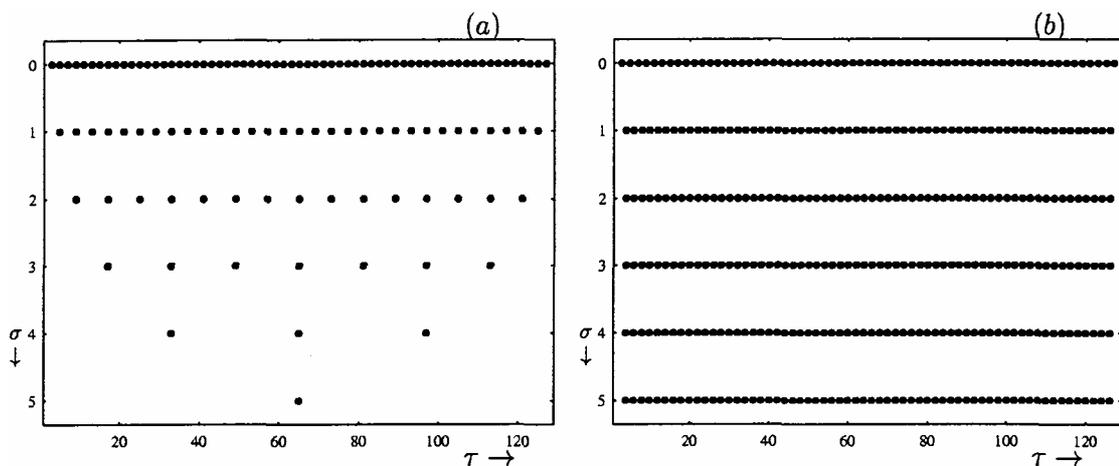


Рис. 3.8. Дискретизация фазового пространства:
 (а) с уменьшением числа отсчетов,
 (б) без уменьшения числа отсчетов.

$$\psi_{\sigma_0^j, n\tau_0}(t) := \frac{1}{\sqrt{|\sigma_0^j|}} \psi\left(\frac{t - k\tau_0}{\sigma_0^j}\right), \quad (3.12)$$

что соответствует выбору $\tau = k\tau_0$.

Можно показать, что ортонормированный вейвлет-базис получается, например, при $\sigma_0 = 2$, $\tau_0 = 1$ (Daubechies, 1988). Это – так называемая *dyadic grid*. Такой выбор для величин σ_0 и τ_0 ведет к конструкции кратно разрешающего анализа, о котором будет рассказано в следующем разделе.

3.3 Кратно разрешающий анализ

В этой разделе сосредоточим внимание на варианте WT с понижением числа отсчетов. Будет рассмотрен частный класс всплесков с параметрами $\sigma_0 = 2$, $\tau_0 = 1$.

Масштабирующие функции $\varphi(x)$ и подпространства V_j

Последовательность $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ замкнутых подпространств в $L^2(\mathbf{R})$ называется *кратно разрешающим анализом* (КРА), если:

$$1^0. V_j \subset V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbf{Z},$$

$$2^0. \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}),$$

$$3^0. \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\},$$

$$4^0. f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1},$$

$$5^0. f(\cdot) \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0, \quad \forall k \in \mathbf{Z},$$

$$6^0. \exists g \in V_0: \{g(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}} \text{ – базис Рисса в пространстве } V_0.$$

Свойство 6^0 можно заменить на $6^{0'}$: $\exists \varphi \in V_0: \{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ – ОНБ в пространстве V_0 . Действительно, из формулы суммирования Пуассона (1.14) следует, что система $\{\varphi(\cdot, -k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ ортонормированна в пространстве $L^2(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда

³ В некоторых работах можно встретить другой вариант определения: $V_{j+1} \subset V_j, \forall j \in \mathbf{Z}$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

Поэтому переход от условия 6^0 к условию $6^{0'}$ осуществляется по формуле

$$\varphi(\omega) = \frac{\widehat{g}(\omega)}{\left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Функция $\varphi(\cdot)$ называется *масштабирующей функцией (scaling function)* КРА. Свойство 4^0 позволяет по одному подпространству V_0 построить все семейство $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$. Из 4^0 и $6^{0'}$ следует, что $\forall j \in \mathbf{Z}$ система функций $\{\varphi_{jk}(\cdot)\}$, где $\varphi_{jk}(\cdot) := 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k)$, $k \in \mathbf{Z}$, – ОНБ в пространстве V_j . Поскольку $\varphi(\cdot) \in V_0$ и $V_0 \subset V_1$, то для $\varphi(\cdot)$ справедливо разложение в ряд Фурье по системе $\{\varphi_{1k}(\cdot)\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad (3.13)$$

где

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{1k} \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (3.14)$$

Обозначив $c_k := \sqrt{2} h_k$, формулу (3.13) можно переписать так:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi(2x - k). \text{ При выполнении условия нормировки}$$

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t) dt = 1$$

будет

$$\sum_k c_k = 2.$$

Всплески $\psi(x)$ и подпространства W_j

Поскольку $V_0 \subset V_1$, то разложим подпространство V_1 на прямую сумму: $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Для любого $j \in \mathbf{Z}$ определяем W_j как ортогональное дополнение V_j до V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (3.15)$$

Подпространства W_j содержат *детализирующую информацию* (*detail information*) при переходе от разрешения уровня $j+1$ к j . В силу определения кратно-разрешающего анализа и формулы (3.15) можно записать:

$$\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = \mathbf{L}^2(\mathbf{R}).$$

Теорема

Для всякого КРА $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ существует такой всплеск $\psi(t)$, что система $\psi(\cdot - k)_{k \in \mathbf{Z}}$ – ОНБ в W_0 . Более того, система функций

$$\psi_{jk}(\cdot) := 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - k)_{j \in \mathbf{Z}} \text{ является ОНБ в } \mathbf{L}^2(\mathbf{R}).$$

Поскольку ψ является элементом подпространства V_1 , то существует числовая последовательность $\{g_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ такая, что

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad (3.16)$$

Отметим, что в случае Хаара $\varphi(x) = \chi_{[0, 1)}$, $h_0 = h_1 = g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, а все остальные коэффициенты в формулах (3.13) и (3.16) равны нулю. Таким образом, всплеск Хаара имеет вид

$$\psi(x) = \chi_{[0, 1/2)}(x) - \chi_{[1/2, 1)}(x).$$

А в случае Котельникова-Шеннона масштабирующая функция и всплеск определяются формулами

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \text{sinc}(\pi t), \\ \psi(t) &= 2\text{sinc}(2\pi(t - 1/2)) - \text{sinc}(\pi(t - 1/2)). \end{aligned}$$

Для них

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \chi_{[-\pi, \pi)}(\omega)$$

и

$$\widehat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2} [\widehat{\varphi}(\omega/2) - \widehat{\varphi}(\omega)].$$

Ортогональные (ортонормированные) вейвлеты замечательны тем, что существует очень быстрый алгоритм разложения по ним любого сигнала! Этот алгоритм называется *алгоритмом Малла*. Исходная информация для него – сигнал, что на практике означает просто массив длины N .

Процедура такова: по исходной информации строятся два сигнала (два массива длиной $N/2$). Первый – исходный сигнал, сглаженный фильтром, соответствующим масштабирующей функции (коэффициенты $\{h_k\}$), и прореженный вдвое; второй – исходный сигнал, обработанный wavelet-фильтром (коэффициенты $\{g_k\}$), и также прореженный вдвое. На языке кратно-разрешающего

анализа первый сигнал – более грубая версия исходного, т.е. его проекция на подпространство V_{-1} . Второй – различия между версиями сигнала на разных масштабах, т.е. проекция на подпространство W_{-1} . Далее та же процедура применяется к сглаженному сигналу. Возникают два массива длиной $N/4$, и т.д. Результат работы алгоритма – набор высокочастотных деталей плюс самая сглаженная (т.е. самая грубая) версия исходного сигнала. Суммарная длина этих массивов равна N .

Процесс восстановления использует транспонированные (если записать процесс разложения в матричном виде) фильтры $\{h_k\}$ и $\{g_k\}$. На каждом шаге размерность массива, представляющего самую грубую версию сигнала, удваивается. В обратном порядке восстанавливаются его сглаженные версии, пока в конце концов не получится исходный сигнал.

К моменту создания теории кратно-разрешающего анализа (осень 1986 года) было несколько примеров ортогональных вейвлетов, более гладких, чем вейвлет Хаара. Найти их не так просто. Считается, что первый пример построил Ян Стромберг (Jan-Olov Stromberg) из университета Тромсе в Норвегии. Но у этих примеров был один практический недостаток: набор коэффициентов был бесконечным. Разумеется, коэффициенты с большими номерами были очень малы, но тем не менее...

В 1987 году Ингрид Добеши (Ingrid Daubechies) из Принстонского университета в США первой построила ортогональные всплески, которым соответствуют конечные фильтры. И не просто отдельные примеры: Добеши нашла бесконечную серию ортогональных вейвлетов, исходя из все того же базиса Хаара! Именно после ее работы и начался взрыв популярности всплесков в математике.

Теперь, когда есть коэффициенты фильтров $\{h_k\}$ и $\{g_k\}$, всевозможные сигналы можно раскладывать по различным базисам, пользуясь алгоритмом Малла, который на математическом языке выглядит так:

$$s_k^j = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_{n-2k} s_n^{j+1}, \quad d_k^j = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_{n-2k} s_n^{j+1}, \quad (3.17)$$

$$n = \overline{0, N-1}, \quad j = -1, -2, \dots$$

$$s_n^{j+1} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_{n-2k} s_k^j + \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_{n-2k} d_k^j, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad j = \dots, -2, -1 \quad (3.18)$$

Формула (3.17) – собственно разложение сигнала по базисам $\{\varphi_{jk}(\cdot)\}$ и $\{\psi_{jk}(\cdot)\}$ подпространств V_j и W_j , или *дискретный вейвлет-анализ*.
 Формула (3.18) – восстановление сигнала по его более грубой версии и деталям, или *дискретный вейвлет - синтез*.

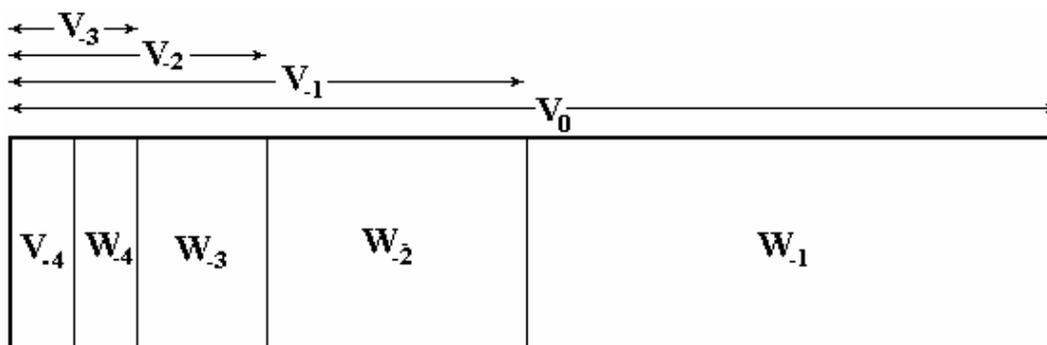


Рис. 3.9. Разложение V_0 в последовательные октавные полосы.
 Ось подразделяется в пространства V_{-j} и
 детализирующие пространства W_{-j} . Видно, что $V_{j-1} \subset V_j$

На рисунке 3.9 схематически изображен пирамидальный алгоритм Малла. Начиная с пространства V_0 , мы получаем более низкое разрешение, деля V_0 на две части: V_{-1} и W_{-1} . Затем тот же самый процесс приводит к пространству V_{-2} , и т.д.

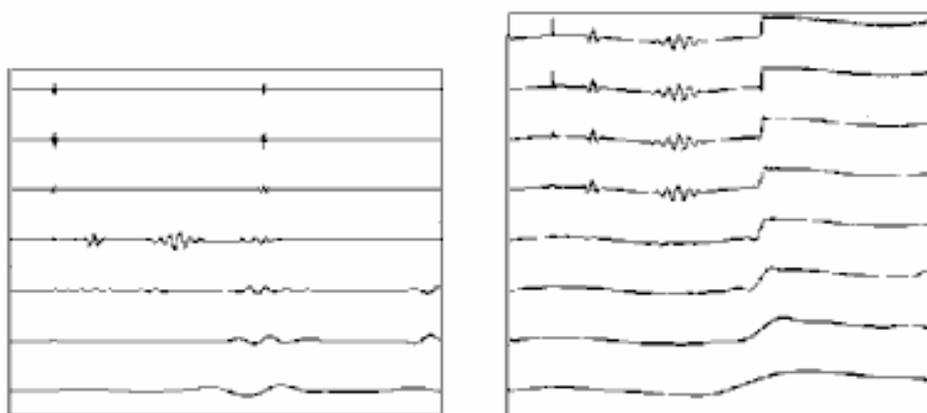


Рис. 3.10. Пирамидальный алгоритм Малла. Справа в верхней части – исходный сигнал в пространстве V_0 . Под ним – его более грубые версии,
 слева – различные детали, полученные на соответствующих масштабах.

На рис. 3.10 изображены различные этапы применения пирамидального алгоритма к тестовому сигналу, изображенному на рис. 2.1.

Глава 4. Численные алгоритмы дискретного wavelet-преобразования

Подобно дискретному преобразованию Фурье (DFT), дискретное wavelet-преобразование (DWT) оперирует вектором данных. Также, подобно DFT, wavelet-преобразование обратимо. И FT, и WT, следовательно, могут рассматриваться как отображения, действующие из пространства входного сигнала (области времени) в пространство изображений. Для FT функциями базиса является семейство синусов и косинусов. В wavelet-преобразовании функции базиса – масштабирующие функции ("father functions") и вейвлеты ("mother functions").

В отличие от преобразования Фурье, вейвлет-преобразование допускает использование, фактически, бесконечного многообразия различных всплесковых базисов. Различные всплески отличаются друг от друга локализацией в пространстве и тем, как они сглаживают исходный сигнал.

4.1. Всплески Добеши (Daubechies). Коэффициенты фильтра

Здесь мы ограничимся, главным образом, классом вейвлетов, открытым Добеши. Самый простой всплеск из этого класса, часто обозначаемый DAUB4, имеет только четыре коэффициента: h_0, h_1, h_2, h_3 . Далее, для простоты записи, обратимся к этому случаю.

Рассмотрим следующую матрицу преобразования, действующую на вектор-столбец данных справа (таблица 4.1). Здесь пустые ячейки соответствуют нулям. Первая строка умножается на вектор-столбец, представляющий сигнал: первые четыре элемента умножаются на коэффициенты фильтра h_0, \dots, h_3 соответственно, и складываются. Аналогично – третья, пятая и другие нечетные строки. В свою очередь, четные строки выполняют свертывание с коэффициентами $h_3, -h_2, h_1, -h_0$. Таким образом, действие матрицы в целом – два связанных свертывания и прореживание вдвое. Этому действию соответствуют формулы (3.17), или дискретный вейвлет-анализ.

Стоит отметить, что коэффициенты h_0, h_1, h_2, h_3 соответствуют масштабирующей функции $\varphi(t)$, а $g_k := (-1)^k h_{3-k}$ – всплеску $\psi(t)$, причем такой выбор для $\{g_k\}$ – не единственен!

Для восстановления первоначального вектора данных длины N из $N/2$ s-компонент и $N/2$ d-компонент матрицу требуется транспонировать (см. таблицу 4.2 и формулы (3.18)). Матрица (4.2) будет обратной к

Таблица 4.1

h_0	h_1	h_2	h_3			...				
h_3	$-h_2$	h_1	$-h_0$...				
		h_0	h_1	h_2	h_3	...				
		h_3	$-h_2$	h_1	$-h_0$...				
						...				
...
						...	h_0	h_1	h_2	h_3
						...	h_3	$-h_2$	h_1	$-h_0$
h_2	h_3					...			h_0	h_1
h_1	$-h_0$...			h_3	$-h_2$

матрице (4.1) тогда и только тогда, когда коэффициенты являются решением уравнений:

$$h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1, \quad h_2 h_0 + h_3 h_1 = 0 \quad (4.3)$$

Если дополнительно мы потребуем существования двух нулевых моментов ($p=2$), то появятся два дополнительных уравнения:

$$h_3 - h_2 + h_1 - h_0 = 0, \quad 0h_3 - 1h_2 + 2h_1 - 3h_0 = 0 \quad (4.4)$$

Таблица 4.2

h_0	h_3					...			h_2	h_1
h_1	$-h_2$...			h_3	$-h_0$
h_2	h_1	h_0	h_3			...				
h_3	$-h_0$	h_1	$-h_2$...				
						...				
...
						...	h_0	h_3		
						...	h_1	$-h_2$		
						...	h_2	h_1	h_0	h_3
						...	h_3	$-h_0$	h_1	$-h_2$

Уравнения (4.3) и (4.4) – четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Единственное решение таково:

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad (4.5)$$

Для шести коэффициентов вместо четырех будем иметь три требования ортогональности в уравнении (4.3) (со смещениями нуль, два, четыре) и 3 нулевых момента в уравнении (4.4) ($p=3$). В этом случае мы получим всплеск Добеши шестого порядка. Его коэффициенты таковы:

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}; \quad h_1 = \frac{5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$$

$$h_2 = \frac{10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}; \quad h_3 = \frac{10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}} \quad (4.6)$$

$$h_4 = \frac{5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}; \quad h_5 = \frac{1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{16\sqrt{2}}$$

Каждый раз при увеличении числа коэффициентов на два величина p увеличивается на единицу.

Для произвольного натурального N масштабирующая функция φ_N и всплеск Добеши ψ_N находятся по следующей схеме:

1) Найти полином

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N-1} q_j z^j$$

с вещественными коэффициентами q_0, q_1, \dots, q_{N-1} такой, что

$$|Q_N(e^{i\xi})|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-j-1}{j} \left(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^j.$$

2) Найти h_0, h_1, \dots, h_{N-1} такие, что

$$\sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{ik\xi} = \left(\frac{1 + e^{i\xi}}{2}\right)^N Q_N(e^{i\xi}).$$

3) Найти φ_N такую, что

$$\varphi_N(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi_N(2t-k)$$

4) Положить

$$\psi_N(t) = \sqrt{2} \sum_{k=2-2N}^1 (-1)^k h_{1-k} \varphi_N(2t-k).$$

Значение $N = 1$ отвечает случаю Хаара. При $N=2$

$$Q_N(e^{i\xi}) = \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})e^{i\xi}]$$

и получаются указанные выше значения h_0, h_1, h_2, h_3 . При больших N гладкость функций $\varphi_N(t)$ и $\psi_N(t)$ растет приблизительно как $0.2N$, при этом для любого N

$$\text{supp } \varphi_N = [0, 2N-1], \quad \text{supp } \psi_N = [1-N, N],$$

$$\int_R t^k \psi_N(t) dt = 0 \quad \text{для } k=0, 1, \dots, N-1.$$

Графики $\varphi_N(t)$ и $\psi_N(t)$ при $N > 1$ несимметричны. Известно, что не существует симметричного ортогонального всплеска с конечным носителем, кроме всплеска Хаара [Daubechies,].

4.2. Алгоритм дискретного wavelet-преобразования

Прямое WT состоит в многократном применении матрицы с wavelet-коэффициентами (таблица 4.1) сначала к полному вектору данных длины N , затем к “гладкому” (т.е. “грубому”) вектору длины $N/2$, затем к “гладкому-гладкому” (“грубому-грубому”) вектору длины $N/4$ и т.д., пока не останется только тривиальное число “гладких-...-гладких” компонент (обычно 2). Эта процедура, как уже говорилось в главе 3, называется алгоритмом Малла. На выходе у WT – эти оставшиеся компоненты и все компоненты с “детальями”, которые сохраняются в процессе вычислений.

Коэффициенты, получаемые в результате прямого вейвлет - преобразования, можно схематически представить в следующем виде:

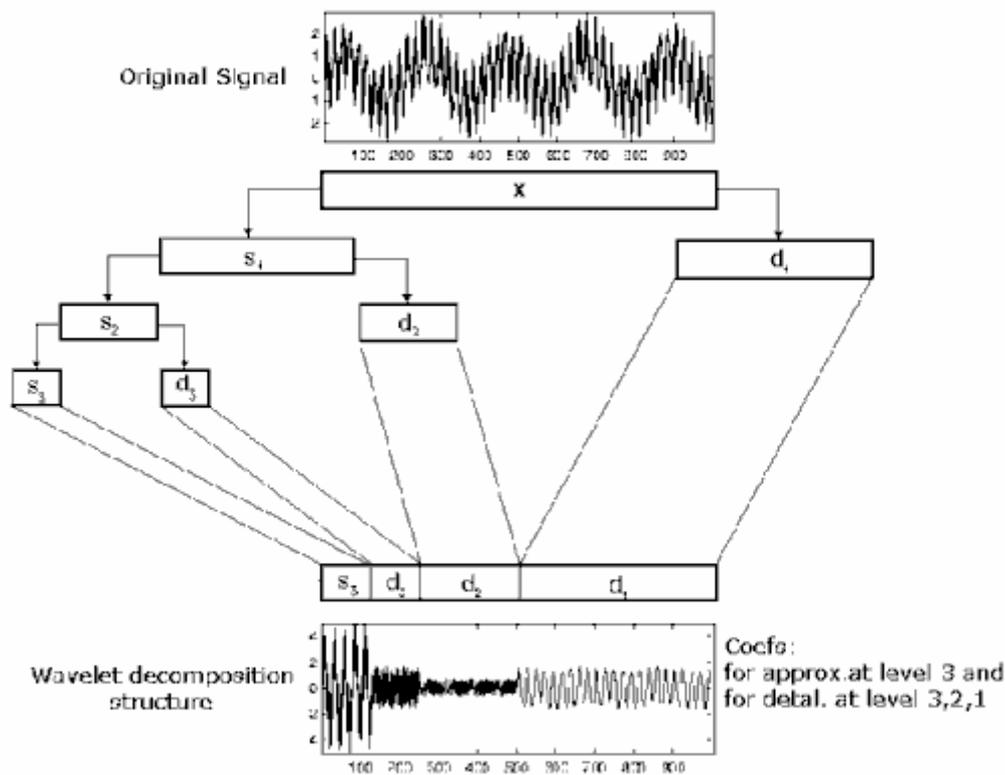


Рис. 4.1. Диаграмма декомпозиции (wavelet-анализа):
 x – исходный сигнал, s_i – аппроксимации, d_i – детализации

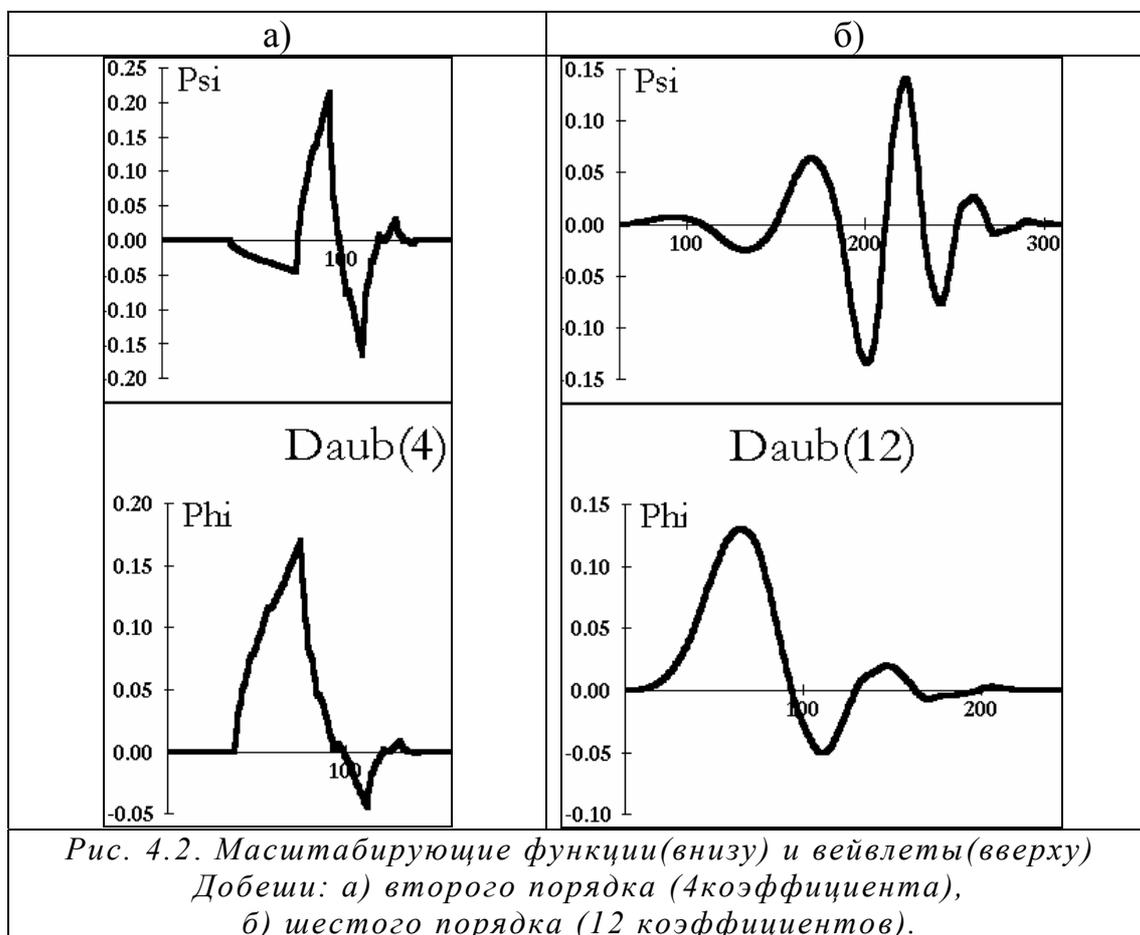
Диаграммы делают процедуру прямого WT понятной (см. таблицу 4.3 и рисунок 4.1). Обратное WT (синтез) – такая же простая процедура, как и wavelet-анализ. Она начинается с самого маленького уровня иерархии, и вместо матрицы 4.1 многократно применяется матрица 4.2. Последовательно поднимаясь с уровня j на уровень $j+1$, мы восстанавливаем первоначальный сигнал.

4.3. Как выглядят всплески?

Большинство масштабирующих функций и всплесков, используемых при быстром дискретном вейвлет-преобразовании, не имеют аналитического выражения. Их форма полностью определяется коэффициентами фильтра. Чтобы получить график анализирующей функции нужно взять единичный вектор и выполнять обратное DWT.

Посмотрим теперь на графики некоторых всплесков. На рисунке 4.2 представлено несколько масштабирующих функций и всплесков Добеши различных порядков. Хотя вейвлеты первых порядков не являются гладкими, это не является препятствием для точного представления некоторых гладких функций.

Выбор анализирующего вейвлета, как правило, определяется тем, какую информацию нужно извлечь из обрабатываемого сигнала. Каждый всплеск имеет характерные особенности во временной и частотной области, поэтому иногда с помощью разных всплесков можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства анализируемых данных.



Большой набор фильтров (вейвлет-коэффициентов) доступен для пользователей в пакете MatLab (версии 4.0, 5.0 и выше). В таблице 4.4 приведены вейвлет-коэффициенты семейств всплесков "coiflet" и "symlet", взятые из пакета MatLab 5.2.

Первая группа графиков, представленная на рис. 4.2 - 4.4, иллюстрирует ортогональные масштабирующие функции и всплески семейств «daub*», «coif*» и «sym*».

Вторую группу всплесков иллюстрируют рис. 4.5 –4.6 и 4.8 – 4.10. Это – биортогональные вейвлеты. Обращает на себя внимание, что на каждом рисунке представлено вдвое больше графиков, чем на рис. 4.2-4.5. При использовании этих всплесков прямое и обратное преобразование выполняется разными наборами коэффициентов. Соответствующие им сглаживающие функции и всплески образуют

пары графиков, изображенные в одной системе координат на этих рисунках.

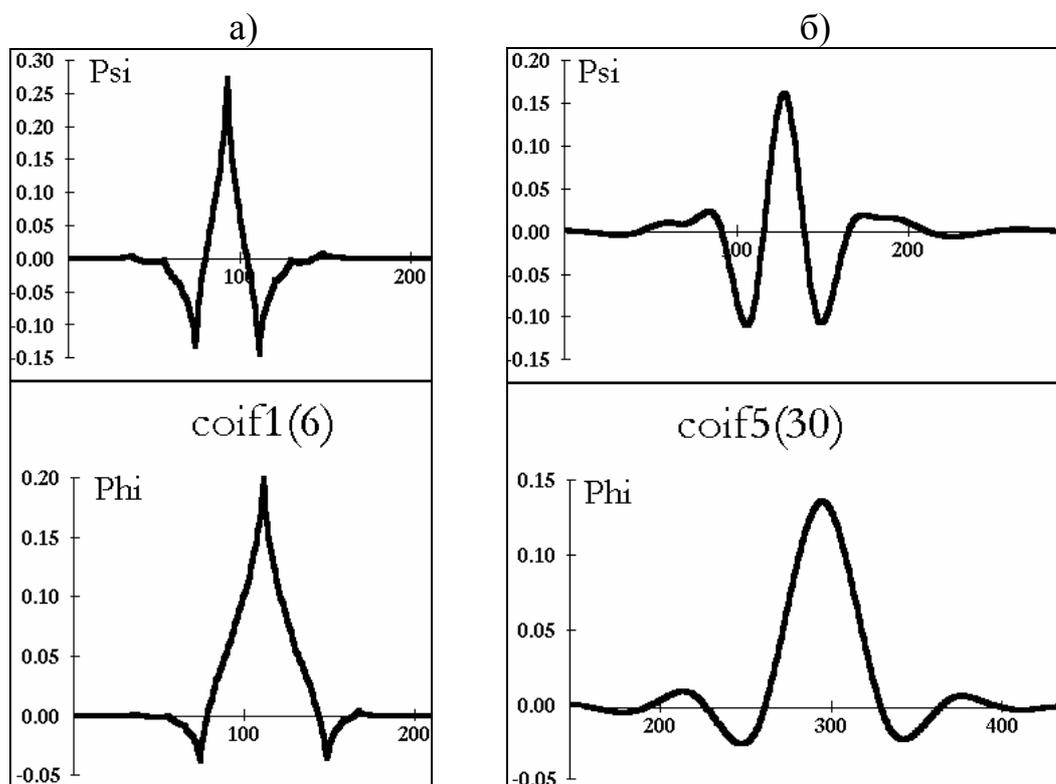


Рис. 4.3. Коифлеты (Coiflets). Масштабирующие функции (внизу) и вейвлеты (вверху): а) «coif1», б) «coif5».

4.4. Wavelet-фильтры в Фурье-области

Преобразование Фурье коэффициентов фильтра определяется соотношением:

$$H(\omega) := \sum_k h_k e^{-ik\omega}, \quad (4.7)$$

Функция $H(\omega)$ – это сглаживающий wavelet-фильтр в частотной области. Можно показать, что верно равенство:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad (4.8)$$

Из определения КРА (см. главу 3), а также из условия об ортогональности вейвлетов и масштабирующих функций следуют формулы:

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (4.9)$$

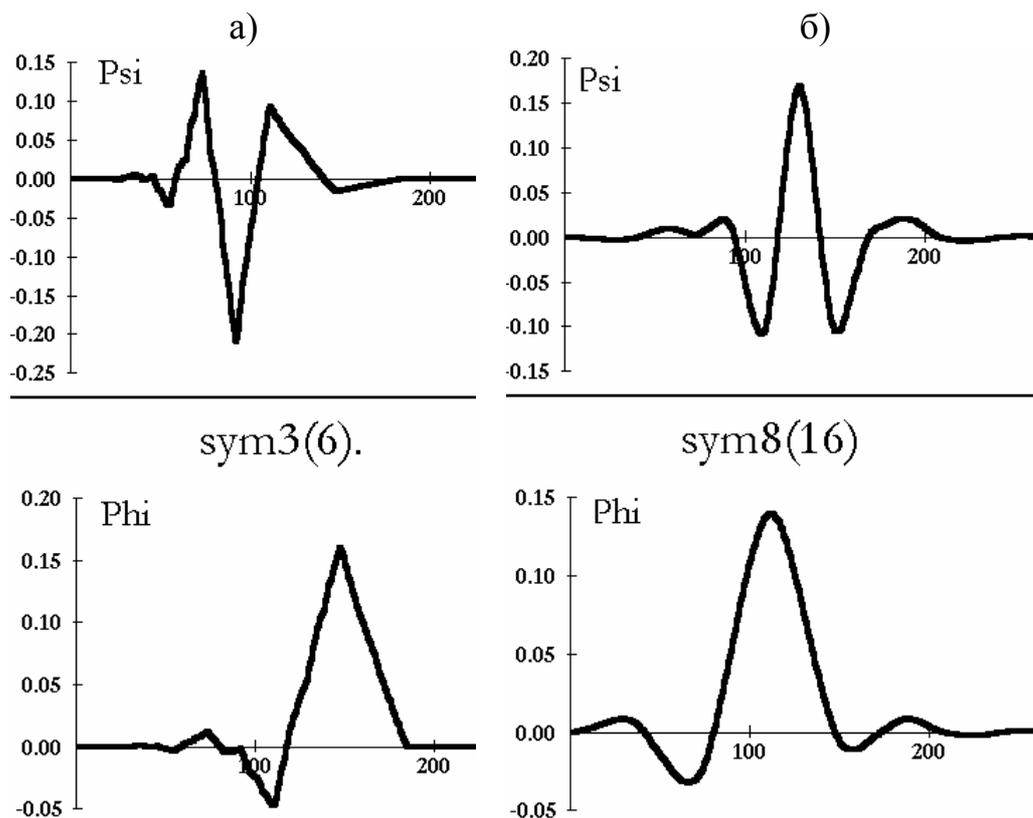


Рис. 4.4. Симлеты (Symlets). Масштабирующие функции (внизу) и вейвлеты (вверху): а) «sym3», б) «sym8».

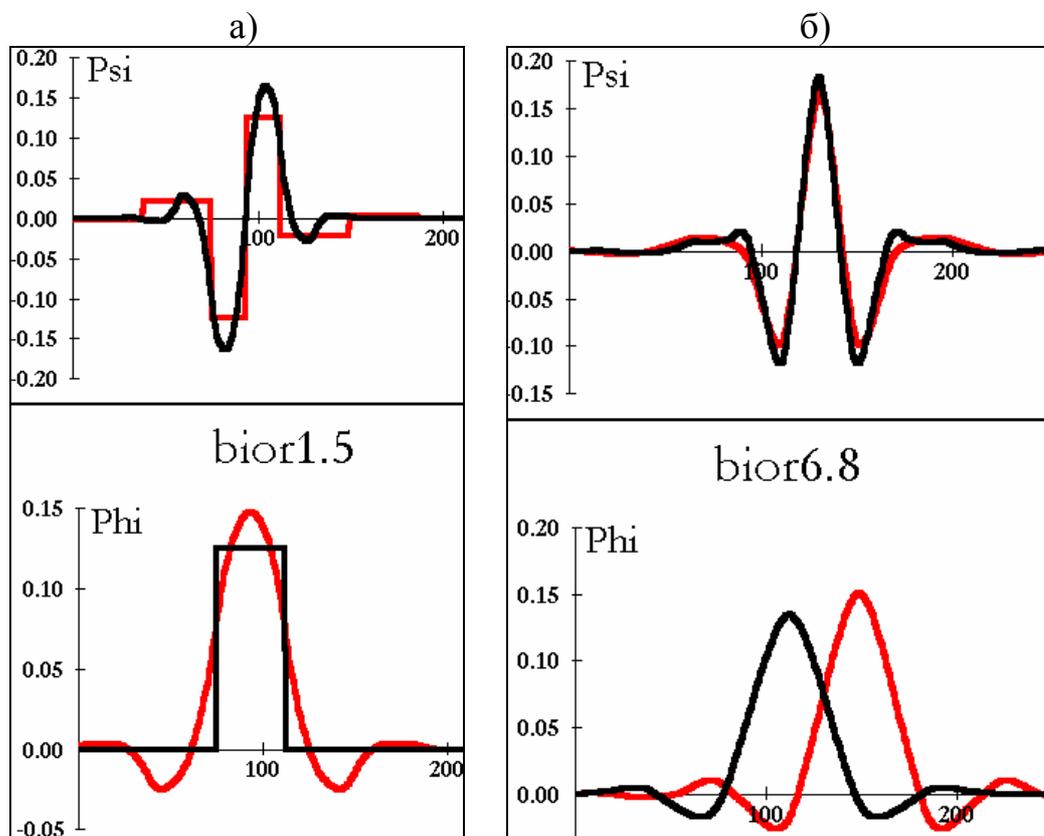


Рис. 4.5. Биортогональные всплески. Масштабирующие функции (внизу) и вейвлеты (вверху): а) «bior1.5», б) «bior6.8».

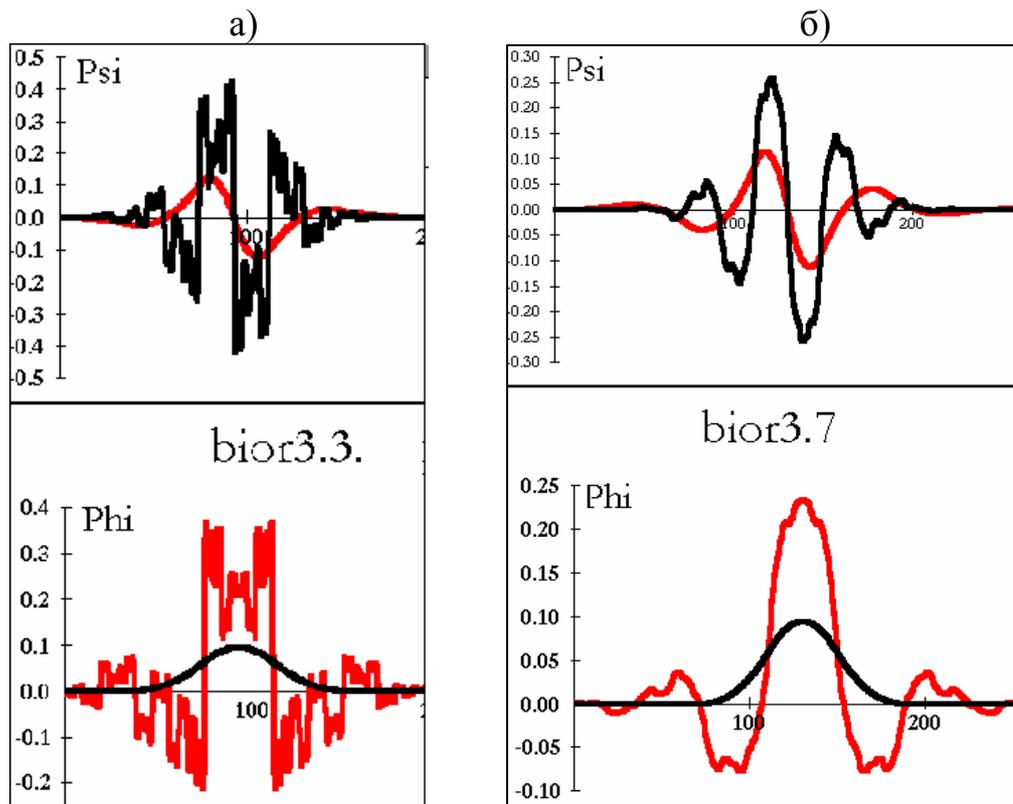


Рис. 4.6. Биортогональные всплески. Масштабирующие функции (внизу) и вейвлеты (вверху): а) «bior3.3», б) «bior3.7».

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega/2} v_{\psi}(\omega) \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (4.10)$$

где $v_{\psi}(\omega)$ – произвольная 2π -периодическая функция, причем $|v_{\psi}(\omega)| = 1$. Формулы (4.9) и (4.10) позволяют строить вейвлеты в Фурье-области, лишь определив функцию $H(\omega)$. Для получения фактических коэффициентов фильтров $\{h_k\}$ и $\{g_k\}$, применяемых к данным, нужно обратить формулу (4.7):

$$h_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{\frac{2\pi k i j}{N}}$$

Остается некоторый произвол в выборе функции $v_{\psi}(\omega)$. Если положить $v_{\psi}(\omega) \equiv 1$, то для коэффициентов фильтра, соответствующих всплеску, верно:

$$g_k = (-1)^k h_{N-1-k},$$

где N – число коэффициентов фильтра.

Вообще говоря, применение вышеупомянутой процедуры вовсе не гарантирует построение wavelet-фильтров с компактным

носителем. С другой стороны, порой компактность носителя и не требуется. Это допускает построение более гладких всплесков, а также симметричных базисов. К таким вейвлетам относятся, например, сплайновые всплески.

4.5. Сплайновые всплески

Всплески Лемарье-Баттла

Кардинальный В-сплайн порядка 1 – это характеристическая функция на полуинтервале $[0, 1)$:

$$N_1(x) := \chi_{[0,1)}, \quad (4.11)$$

Для $m > 1$ кардинальный В-сплайн N_m определяется как свертка:

$$N_m(x) := N_{m-1}(x) * N_1(x), \quad (4.12)$$

Система $\{N_m(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ является базисом Рисса в подпространстве $V_0 = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})} \text{span}\{N_m(\cdot - k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$

V_0 ,

и для этих функций при каждом фиксированном $m \in \mathbf{N}$ справедливо равенство:

$$N_m(x) = 2^{m-1} \sum_{k=0}^m C_m^k N_m(2x - k). \quad (4.13)$$

Как отмечалось при определении КРА, процесс ортогонализации сводится к определению масштабирующей функции $\varphi(x)$, порождающей ортонормированный базис, через масштабирующую функцию $g(x)$, система целочисленных сдвигов которой является базисом Рисса. Этот процесс связывает преобразования Фурье двух функций и определяется формулой

$$\widehat{\varphi}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\widehat{g}(\omega)}{\sqrt{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{g}(\omega + 2\pi k)|^2}}, \quad (4.14)$$

Таким образом, если в качестве функции $g(x)$ выбрать кардинальный В-сплайн порядка m и провести процесс ортогонализации, то полученная система будет ортонормированной в $L^2(\mathbf{R})$. Она называется *базисом Лемарье-Баттла*.

Ниже представлены соответствующие выкладки.

Поскольку $\varphi(x) \in S_{m-1}(\mathbf{Z}) \cap L^2(\mathbf{R})$, имеет место разложение:

Таблица 4.4

"Symlet", коэффициенты сглаживающего фильтра H					
Sym3	sym4	sym5	sym6	sym7	sym8
0.03522629	-0.07576571	0.02733307	1.540411e-002	0.002681815	-0.003382416
0.08544127	-0.02963553	2.951949e-002	3.490712e-003	-0.001047385	-0.0005421323
0.1350110	0.4976187	-3.913425e-002	-1.179901e-001	-0.0126363	0.03169509
0.4598775	0.8037388	1.993975e-001	-4.831174e-002	0.03051551	0.007607487
0.8068915	0.2978578	7.234077e-001	4.910559e-001	0.06789269	-0.1432942
0.0326706	-0.09921954	6.339790e-001	7.876411e-001	-0.04955283	-0.06127336
	-0.01260397	1.660211e-002	3.379294e-001	0.01744126	0.4813597
	0.03222310	-1.753281e-001	-7.263752e-002	0.5361019	0.7771858
		-2.110183e-002	-2.106029e-002	0.7677643	0.3644419
		1.953888e-002	4.472490e-002	0.2886296	-0.05194584
			1.767712e-003	-0.1400472	-0.02721903
			-7.800708e-003	-0.1078082	0.04913718
				0.004010245	0.003808752
				0.01026818	-0.01495226
					-0.0003029205
					0.00188995
"Coiflet", коэффициенты сглаживающего фильтра H					
coif1		coif3		coif5	
-1.565572813546454e-002		-3.4599772836212559e-005		-9.517657273819165e-008	
-7.273261951285390e-002		-7.09833031381413e-005		-1.6744288576823e-007	
3.848648468642029e-001		0.00046621696011288631		2.0637618513646814e-006	
8.525720202122554e-001		0.0011175187708906		3.7346551751414e-006	
3.378976624578092e-001		-0.0025745176887502236		-2.1315026809955787e-005	
-7.273261951285390e-002		-0.00900797613666158		-4.13404322725125e-005	
		0.015880544863615904		0.00014054114970203437	
		0.0345550275730616		0.000302259581813063	
		-0.082301927106885983		-0.00063813134304511142	
		-0.071799821619312		-0.00166286370201308	
		0.42848347637761874		0.0024333732126576722	
		0.793777222625621		0.00676418544805308	
		0.4051769024096169-		-0.0091642311624818458	
		-0.0611233900026729		-0.0197617789425726	
		-0.0657719112818555		0.032683574267111833	
		0.0234526961418363		0.0412892087501817	
		0.0077825964273254182		-0.10557420870333893	
		-0.00379351286449101		-0.0620359639629036	
				0.43799162617183712	
				0.774289603652956	
				0.42156620669085149	
				-0.0520431631762438	
				-0.091920010559696244	
				0.0281680289709364	
				0.023408156785839195	
				-0.0101311175198498	
				-0.004159358781386048	
				0.00217823635810902	
				0.00035858968789573785	
				-0.000212080839803798	

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k N_m(x - k), \quad (4.15)$$

Здесь $S_{m-1}(\mathbf{Z})$ – множество сплайнов степени $(m-1)$ с узлами в целочисленных точках. Применяя преобразование Фурье к обеим частям равенства, получаем:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k e^{-ik\omega} \widehat{N}_m(\omega), \quad (4.16)$$

где

$$\widehat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m.$$

С другой стороны, согласно формуле (4.14),

$$\widehat{\varphi}(\omega) := \frac{\widehat{N}(\omega)}{\sqrt{\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\widehat{N}(\omega + 2\pi n)|^2}}, \quad (4.17)$$

Приравнявая (4.16) и (4.17), получаем формулу для коэффициентов:

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\omega}}{\sqrt{\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\widehat{N}_m(\omega + 2\pi n)|^2}} d\omega, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (4.18)$$

По формуле Пуассона

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\widehat{N}_m(\omega + 2\pi n)|^2 = \sum_{n=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+n) e^{-in\omega}$$

и, следовательно,

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\omega}}{\sqrt{\sum_{n=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+n) e^{-in\omega}}} d\omega, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (4.19)$$

Определив таким образом коэффициенты α_k , получаем масштабирующую функцию $\varphi(x)$, система целочисленных сдвигов которой представляет собой ОНБ в подпространстве V_0 .

Теперь займемся подпространством всплесков W_0 .

Определив $\psi(x)$ через преобразование Фурье по формуле (4.10), аналогично (4.15) можем записать:

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} \beta_k N_m(2x - k). \quad (4.20)$$

Переходя в частотную область, получаем:

$$\widehat{\psi}(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \beta_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \widehat{N}_m\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (4.21)$$

Приравняв правые части формул (4.10) и (4.21), определяем коэффициенты β_k :

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\frac{\omega}{2}} G\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{n \in \mathbf{Z}} |N_m\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi n\right)|^2}} d\omega, \quad k \in \mathbf{Z} \quad . \quad (4.22)$$

Возникает вопрос – как вычислить $G(\omega)$? Из условия ортогональности следует:

$$G(\omega) = v_\psi(\omega) \overline{H(\omega + \pi)},$$

где $v_\psi(\omega)$ – некоторая 2π -периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $v_\psi(\omega + \pi) = -v_\psi(\omega)$ и $|v_\psi(\omega)| = 1$ (обычно полагают $v_\psi(\omega) = e^{-i\omega}$). Используя формулу (4.9), получаем выражение для $H(\omega)$ как отношение двух преобразований Фурье:

$$H(\omega) = \sqrt{2} \frac{\widehat{\varphi}(2\omega)}{\widehat{\varphi}(\omega)},$$

где $\widehat{\varphi}(\omega)$ определяется по формуле (4.17).

Замечание. На основе В-сплайнов построено несколько биортогональных базисов из всплесков. Например, масштабирующая функция и всплеск Малла-Зонга определяются через свои преобразования Фурье следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \left(\frac{\sin \omega / 2}{\omega / 2} \right)^{2n+1} \quad (4.23)$$

$$\widehat{\psi}(\omega) = \left(\frac{\sin \omega / 4}{\omega / 4} \right)^{2n+2} \quad (4.24)$$

Функция сглаживания $\varphi(t)$ и вейвлет-функция $\psi(t)$ показаны на рисунке 4.3.

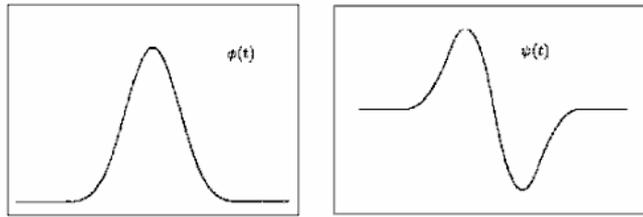


Рис. 4.8. Масштабирующая функция $\varphi(t)$ – кубический сплайн, вейвлет функция $\psi(t)$ – квадратичный сплайн

Отметим, что в случае биортогональных всплесков для прямого и обратного преобразования нужно использовать различные фильтры.

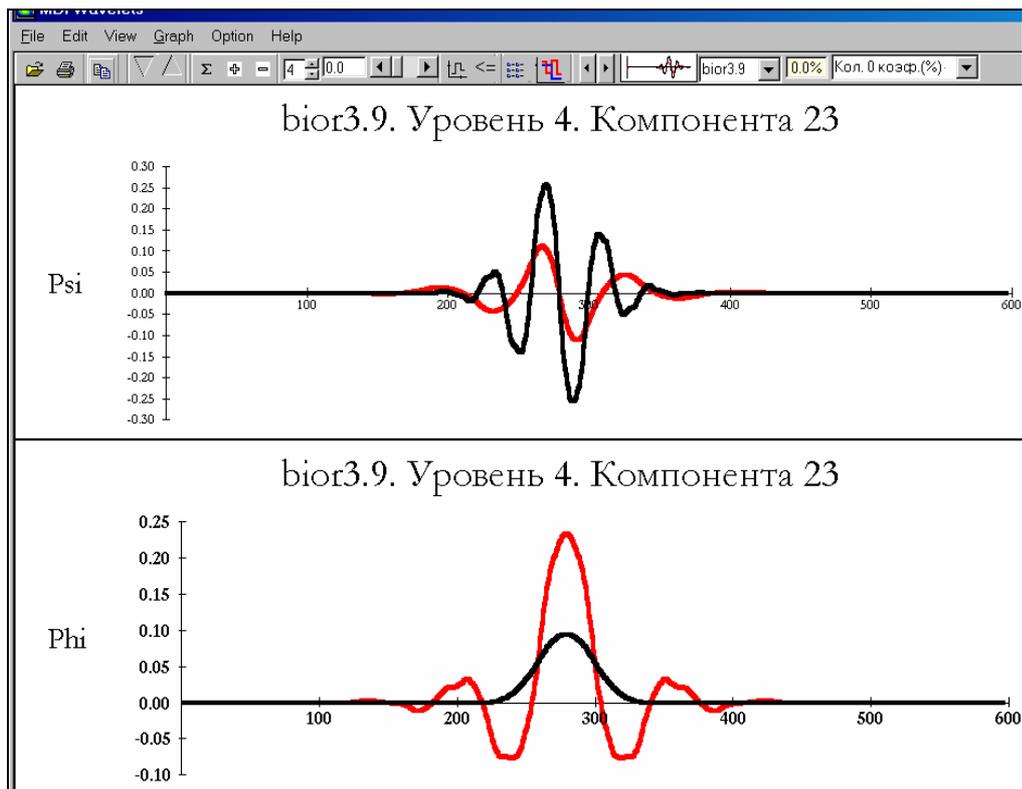


Рис. 4.9. Графики биортогональных функций «bior3.9» (см. MatLab).
На верхнем рисунке – всплески.
На нижнем рисунке – масштабирующие функции.

Здесь будут представлены некоторые результаты работы программы Wave12D, разработанной авторами. По этой же программе получены многие иллюстрации в тексте настоящего пособия. В их числе графики на рис. 4.4 - 4.9.

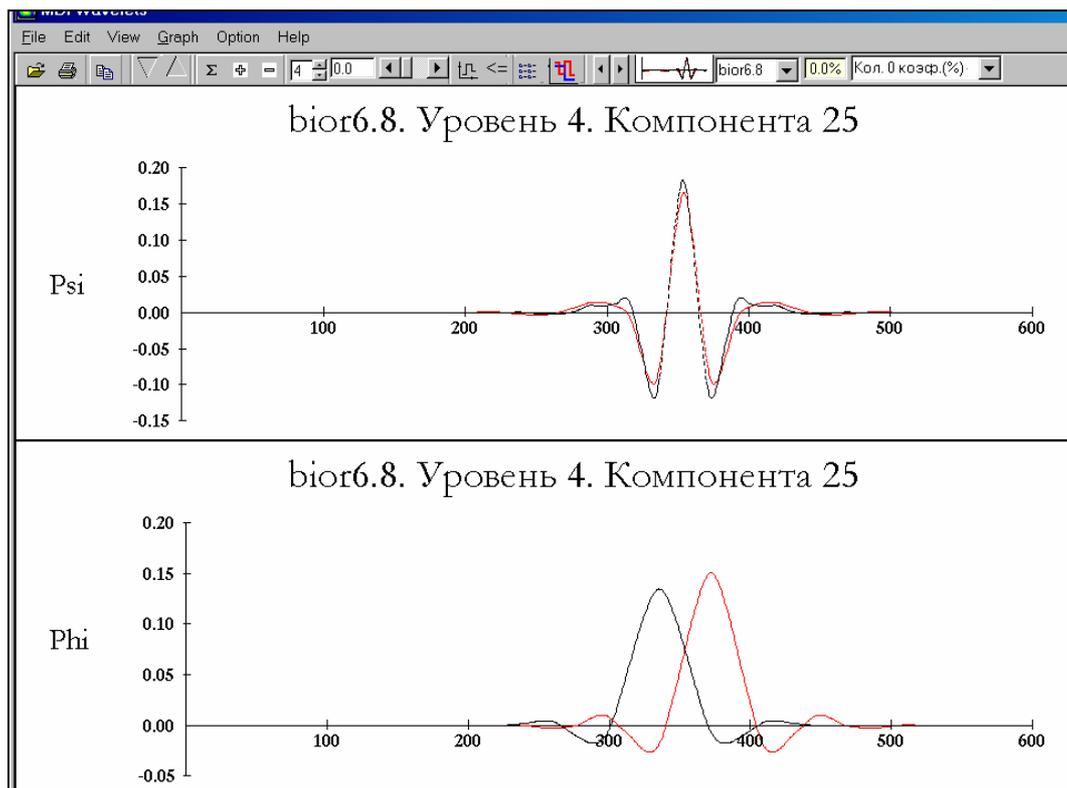


Рис. 4.10. Графики биортогональных функций «bior6.8». Вверху- всплески, внизу масштабирующие функции

4.6. Иллюстрация кратно разрешающего анализа

Рис. 4.11 и 4.12 отображают результаты кратно разрешающего анализа (КРА) реальной сейсмологической трассы.

На рис. 4.12 видно, что различные графики вейвлет-коэффициентов характеризуют детали соответствующего уровня и величина каждого коэффициента имеет тесную связь с интервалом сигнала, равном ширине всплеска. Правые части обоих рисунков совпадают. Здесь приведены графики функций, получаемых в результате обратного преобразования только коэффициентов соответствующего уровня, изображенных в левой колонке рис. 4.12. Следует отметить, что количество коэффициентов, связанных с деталями мелкого масштаба, значительно больше количества коэффициентов на грубых масштабах. Если мелкомасштабные детали связаны с шумом, то замена их нулями позволит избавиться относительно высокочастотной помехи на всей трассе или (в отличие от частотной фильтрации на основе преобразования Фурье) на любой ее части. Если вместо зарегистрированного вектора исходных данных хранить вейвлет-коэффициенты, то можно не запоминать нули и тем самым существенно сжать информацию (см.

рис. 4.11). Это бывает важно при регистрации больших объемов информации.

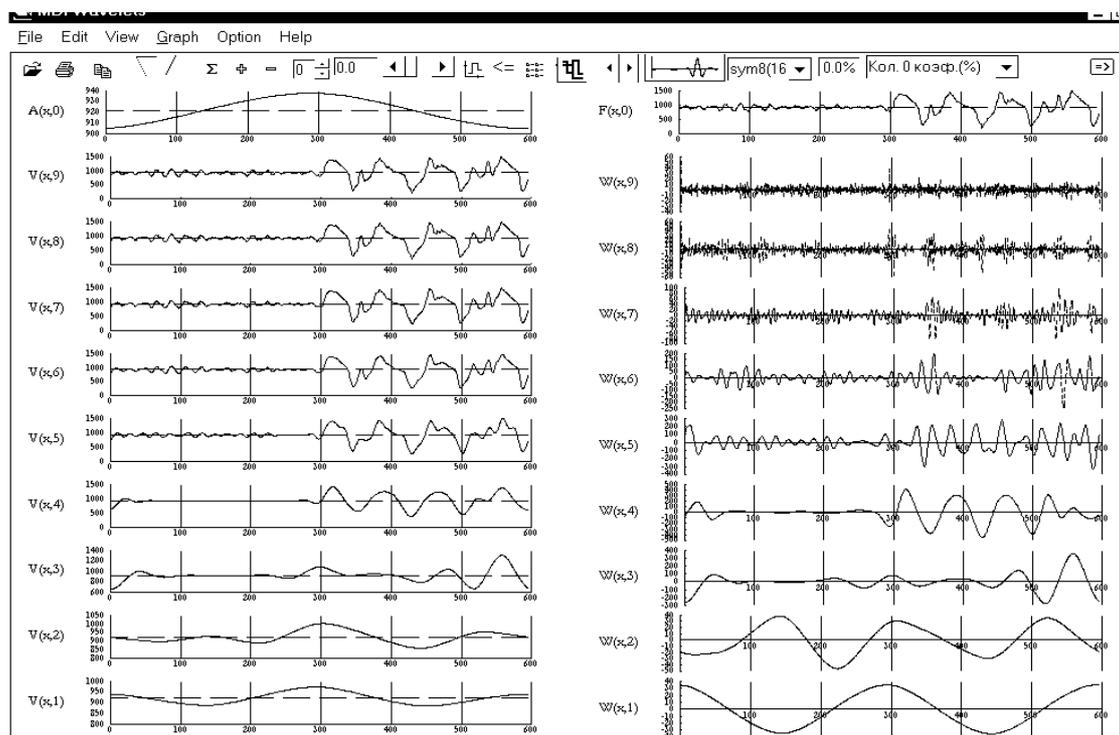


Рис. 4.11. Иллюстрация КРА. Справа в верхней части – исходный сигнал в пространстве V_0 . Слева – его различные аппроксимации, справа – детали, полученные при различных масштабах.

Самый верхний график слева на рис. 4.12 соответствует двум аппроксимационным коэффициентам, а на рис. 4.11 представлена аппроксимация трассы на самом грубом масштабе по этим коэффициентам.

На рис. 4.13 в увеличенном виде изображены фрагменты рисунков 4.11 и 4.12. Сейсмограмма анализируется всплеском одного из масштабов, который определяется его эффективной шириной. Сейсмологическая трасса нарисована сплошной линией. Пунктиром изображен график коэффициентов выбранного уровня, получающихся в результате работы пирамидального алгоритма Малла. График деталей, получающихся в результате применения обратного DWT к всплесковым коэффициентам, нарисован точками. Видим, что графики вейвлет-коэффициентов и деталей в правой половине трассы по месту на оси времен хорошо согласуются с особенностями сейсмограммы соответствующего масштаба. Левая часть трассы содержит более мелкомасштабные изменения, поэтому здесь коэффициенты имеют существенно меньшие величины.

Рис. 4.14 иллюстрирует график деталей, извлекаемых из трассы всплеском самого мелкого масштаба. Из рисунка видно, что детали этого уровня можно отнести скорее к шуму, чем к полезной информации.

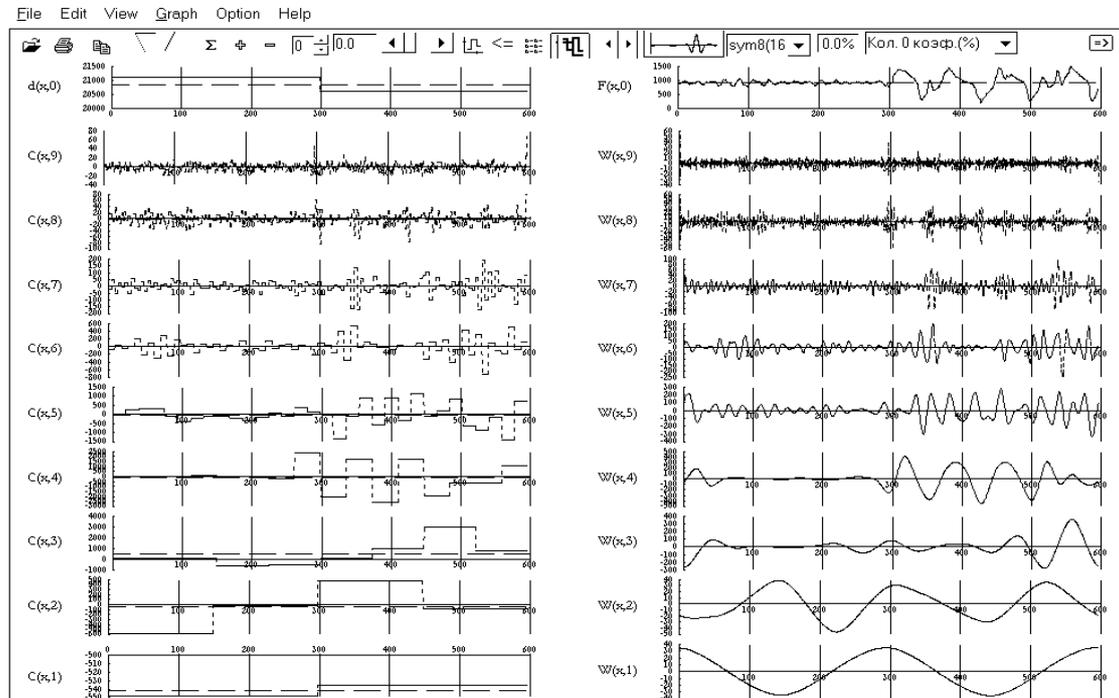


Рис. 4.12. Иллюстрация КРА. Справа в верхней части – исходный сигнал в пространстве V_0 . Слева – вейвлет-коэффициенты на различных масштабах, справа – детали, соответствующие этим коэффициентам

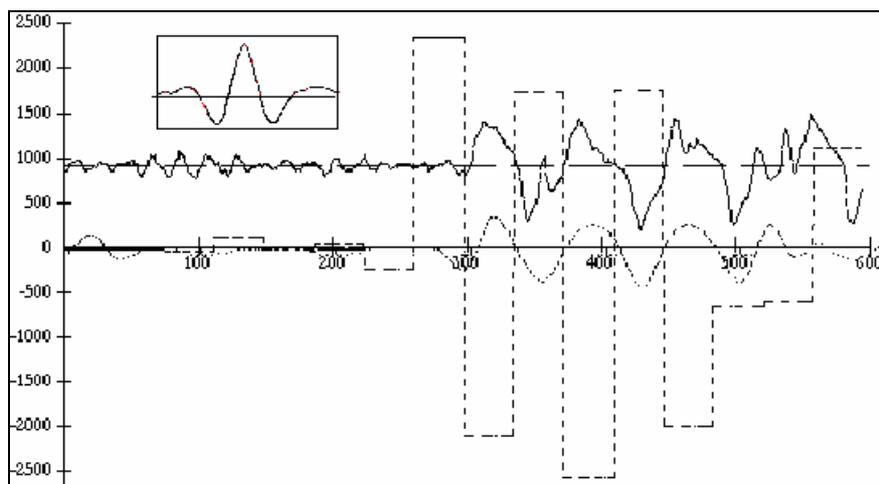


Рис. 4.13. Иллюстрация КРА. Анализ сейсмотрассы всплеском одного уровня.

Сплошной линией изображена трасса, пунктиром – вейвлет-коэффициенты, точками - соответствующие им детали.

Слева вверху в рамке изображен всплеск «sym8» (в одном масштабе с трассой).

Напомним, что общее число вейвлет-коэффициентов равно количеству дискретных значений сейсмотрассы. Количество коэффициентов разных уровней образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Если общее число коэффициентов равно N , то для описания самых мелких деталей потребуется $N/2$ коэффициентов,

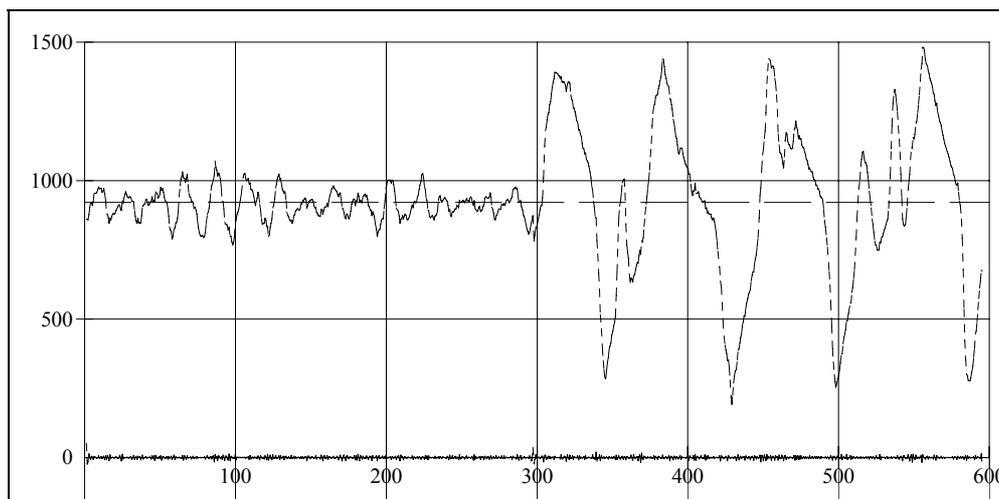


Рис. 4.14. Иллюстрация КРА. Анализ сейсмотрассы всплеском самого мелкого масштаба. Вверху – график трассы, внизу – ее самые мелкие детали.

следующему уровню соответствует $N/4$ чисел и т.д. Если часть мелкомасштабных уровней заменить нулями и сделать обратное DWT, то сейсмотрассу можно не только очистить от шума, но и описать ее существенно меньшим количеством чисел вейвлет-спектра (вейвлет-коэффициентов). Как правило, зануление вейвлет-коэффициентов производится в результате сравнения их с некоторым пороговым значением. Количество ненулевых чисел спектра зависит от выбранной формы анализирующих функций (масштабирующей функции и всплеска). Чем лучше согласие между формой импульса и сигналом, тем меньшим числом коэффициентов он может быть аппроксимирован с заданной точностью или заданным коэффициентом сжатия. При сжатии данных это соображение служит основой для выбора «оптимального» фильтра.

Глава 5. О двумерных всплесках

До сих пор, рассказывая о различных конструкциях всплесков, подразумевалось (а в формулах указывалось явно), что мы находимся в одномерном пространстве, т.е. на прямой. Конечно же, вейвлет-базисы обобщаются и на случаи больших размерностей, в частности, на случай двух переменных. При этом возможны различные варианты всплесков, равно как и различные варианты построения кратно разрешающего анализа. О двух из них будет рассказано более подробно.

5.2. Тензорное произведение

В простейшем случае для построения кратно разрешающего анализа и всплесковых базисов в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n)$ используется так называемое *тензорное произведение* одномерной конструкции.

Ограничимся случаем $n = 2$. Предположим, что в $L^2(\mathbf{R})$ выбран некоторый КРА с масштабирующей функцией φ и всплеском ψ . Определим четыре функции двух переменных:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \varphi(x)\varphi(y), \quad \Psi^{(1)}(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \\ \Psi^{(2)}(x, y) &= \psi(x)\varphi(y), \quad \Psi^{(3)}(x, y) = \psi(x)\psi(y) \end{aligned} \tag{5.1}$$

В результате получим одну масштабирующую функцию $\Phi(x, y)$ и три вейвлета $\Psi^{(i)}(x, y)$ $i = 1, 2, 3$. Графики двумерных всплесков $\Psi^{(i)}(x, y)$, изображены на рис. 5.1.

Оказывается, что эти четыре функции генерируют кратно разрешающий анализ в $L^2(\mathbf{R}^2)$. А именно, если для каждого $j \in \mathbf{Z}$ обозначить через V_j подпространство в $L^2(\mathbf{R}^2)$, совпадающее с замкнутой линейной оболочкой функций

$$\Phi_{kl}^j(x, y) = 2^j \varphi(2^j x - k) \varphi(2^j y - l), \quad k, l \in \mathbf{Z}$$

то будут выполнены условия

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \bigcup \overline{V_j} = L^2(\mathbf{R}^2). \tag{5.2}$$

Всплесковые подпространства W_j определяются как ортогональные дополнения V_j до V_{j+1} в $L^2(\mathbf{R}^2)$. При этом оказывается, что

$W_0 = V_1 - V_0$ есть прямая сумма трех подпространств

$$W_0^{(i)} = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R}^2)} \text{span} \{ \Psi^{(i)}(x - k, y - l) \mid k, l \in \mathbf{Z} \}, \quad (i=1, 2, 3, j=0),$$

где $W^{(i)}$ определены в (5.1), а сами всплески определяются по формулам

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \varphi(x)\psi(y),$$

$$\Psi^{(2)}(x, y) = \psi(x)\varphi(y),$$

$$\Psi^{(3)}(x, y) = \psi(x)\psi(y).$$

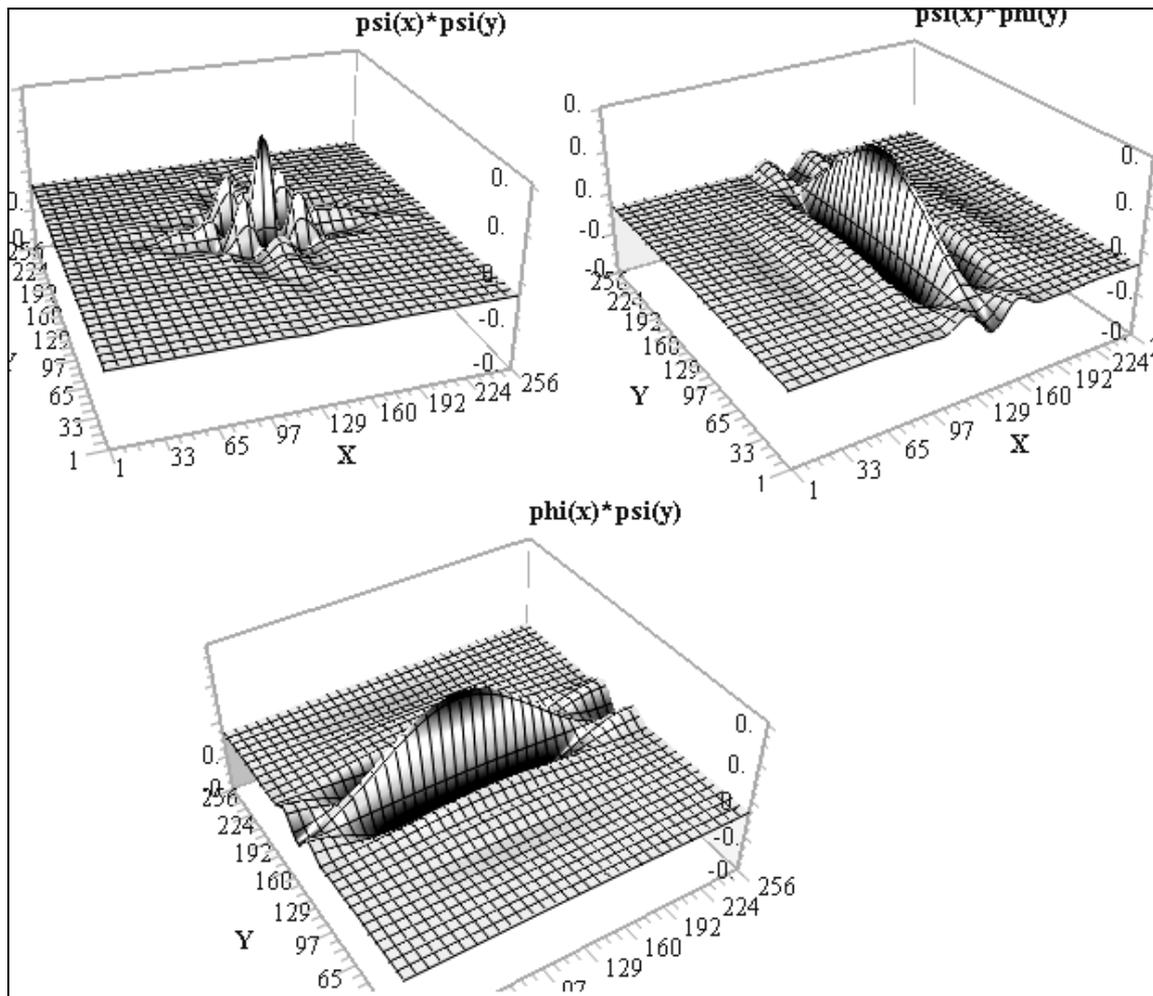


Рис. 5.1. Двумерные всплески, построенные посредством тензорного произведения одномерных вейвлетов «Coif5».

На рисунке 5.2 представлены двумерные всплесковые базисы Лемарье-Баттла, при построении которых, как и в одномерном варианте, использовались В-сплайны различных порядков.

Более общий путь построения многомерного кратко разрешающего анализа – использование матрицы растяжений.

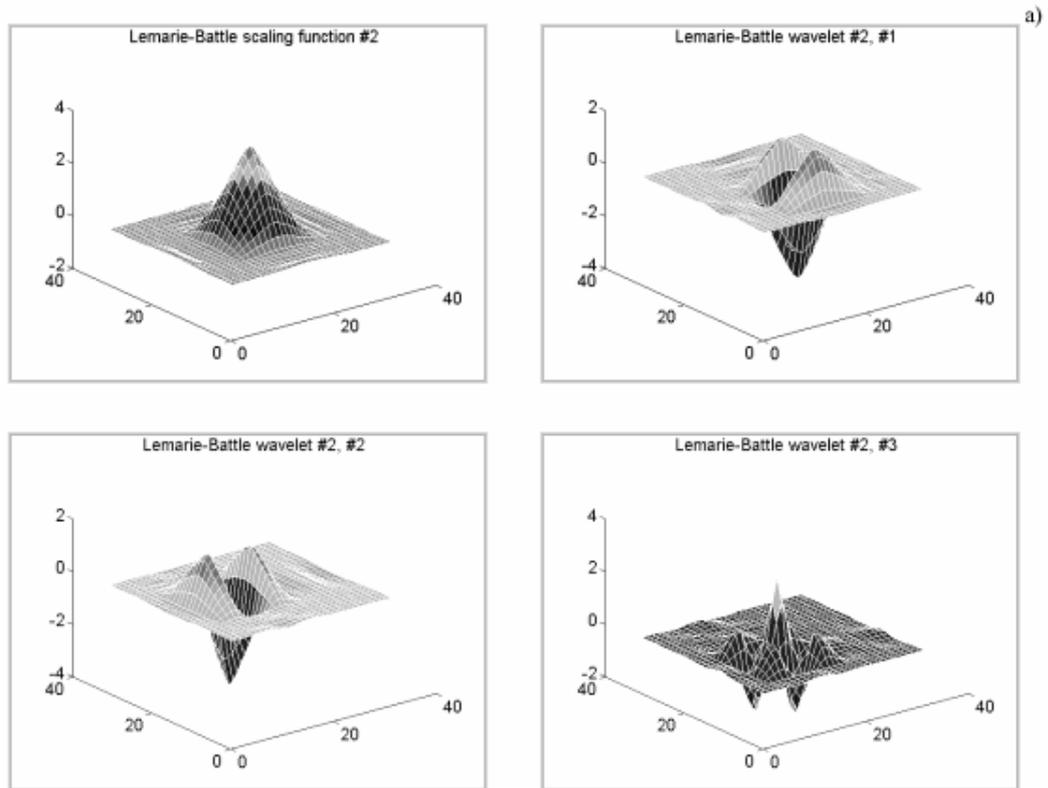


Рис. 5.2. Базисы Лемарье-Баттла, построенные по B-сплайну второго порядка.

Квадратная матрица D порядка n называется целочисленной квадратной матрицей, если выполнены два условия:

- 1) При умножении произвольного вектора x из Z^n на матрицу D вектор Dx также принадлежит Z^n ;
- 2) Все собственные значения матрицы D (среди них могут быть комплексные) имеют модули, большие 1.

Определение КРА в $L^2(R^n)$, ассоциировано с данной матрицей растяжений D , вводится как в случае $n=1$, только семейство V_j записывается в виде

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(Dx) \in V_{j+1}.$$

При этом масштабирующая функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(x, y) = \sum_{\bar{k} \in Z} a_{\bar{k}} \varphi(Dx - \bar{k}),$$

где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$, $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)^T \in Z^n$. В частности, при

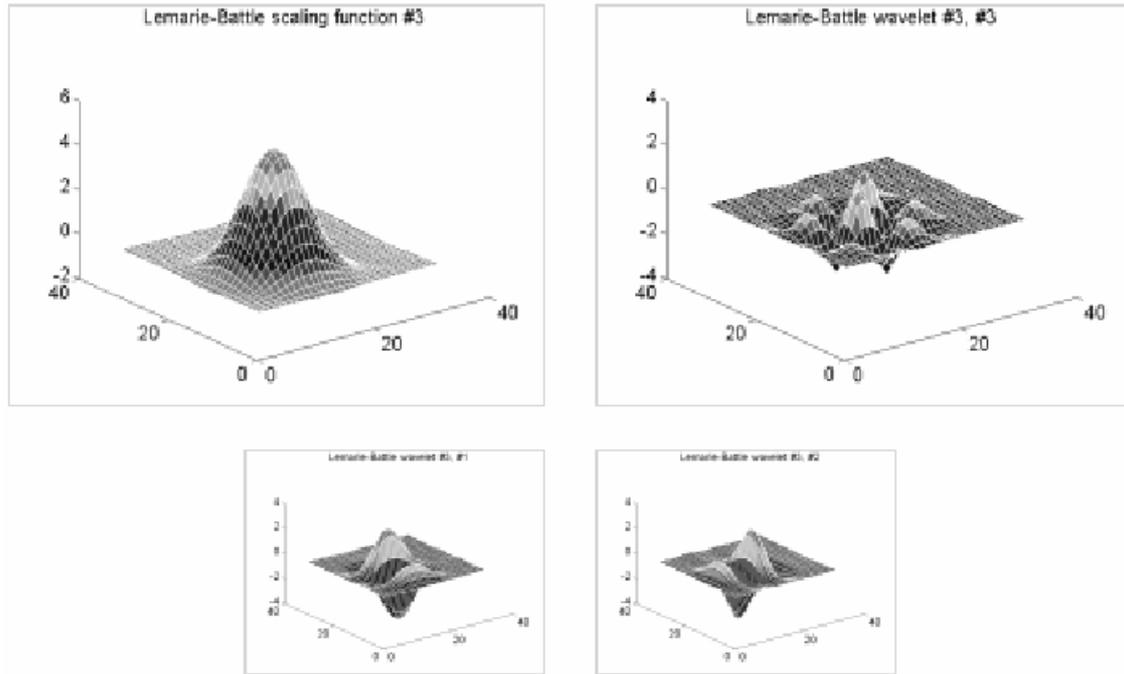


Рис. 5.3. Базисы Лемарье-Баттла, построенные по В-сплайну третьего порядка.

$n=2$ и $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ получается простейшая тензорная конструкция.

Уместен вопрос: а зачем вообще использовать матрицу, если можно обойтись тензорным произведением?

Дело в том, что всплески, построенные с использованием тензорного произведения, имеют три четко выделенные “оси чувствительности”: горизонтальную, вертикальную и диагональную. Но в реальном изображении могут присутствовать совершенно другие направления, к которым полезно уметь адаптироваться. Этого можно достичь, используя матрицу. При этом вместо Z^n можно выбрать другую решетку в R^n .

5.2 Гексагональная решетка

Одним из вариантов подобного выбора является гексагональная решетка

$$\Gamma := \{n_1 a_1 + n_2 a_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}, \quad (5.3)$$

где

$$a_1 = (1, 0)^T, \quad a_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$$

Решетка Γ получается в результате преобразования целочисленной решетки Z^2 с помощью матрицы A , столбцы которой совпадают с векторами a_1 и a_2 . Выбор гексагональной решетки связан с уже упоминавшимися осями чувствительности. При отображении с помощью матрицы A единичный квадрат превращается в параллелограмм F (рис.5.4а):

$$F := \{u_1 a_1 + u_2 a_2 \mid 0 \leq u_1 < 1, 0 \leq u_2 < 1\}, \quad (5.4)$$

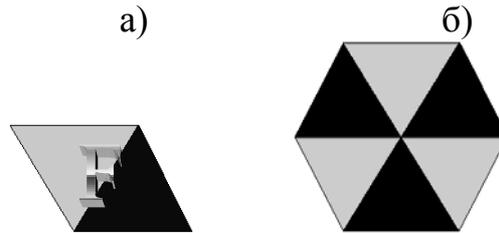


Рис. 5.4. К построению гексагональной решетки.

При повороте на 120° , а затем еще на 120° это множество превращается в “пчелиную соту” (рис. 5.4б). Эта “сота” более “идеальна” (т.е. близка к кругу, на котором, конечно, выделенных направлений нет), чем квадрат. Кроме того, такими сотами можно замостить всю плоскость. Из этих замечаний и возникает идея о построении всплесков, ассоциированных с решеткой Γ . Тем самым ослабляется влияние “осей чувствительности”.

Опуская выкладки, подобные тем, что были представлены в главе 4 (см. пункт 4.6.1), приведем рисунки, на которых показаны двумерные базисы Лемарье-Баттла и сами В-сплайны с гексагональным носителем (см. рис. 5.5).

5.4. Варианты числа вейвлетов

Ранее упоминалось, что на плоскости при построении КРА появляется не один, а три вейвлета. Это объясняется следующим образом.

Ортогональное дополнение W_0 порождается системой сдвигов базисных всплесков на множестве Z^n ; в то же время подпространство V_0 есть замыкание линейной оболочки сдвигов масштабирующей функции на Z^n , а V_1 – ее сдвигов на DZ^n . Таким образом, каждую из базисных функций можно сопоставить с одним из подмножеств фактор-множества Z^n / DZ^n , кроме одного – того, что относится к масштабирующей функции. Следовательно,

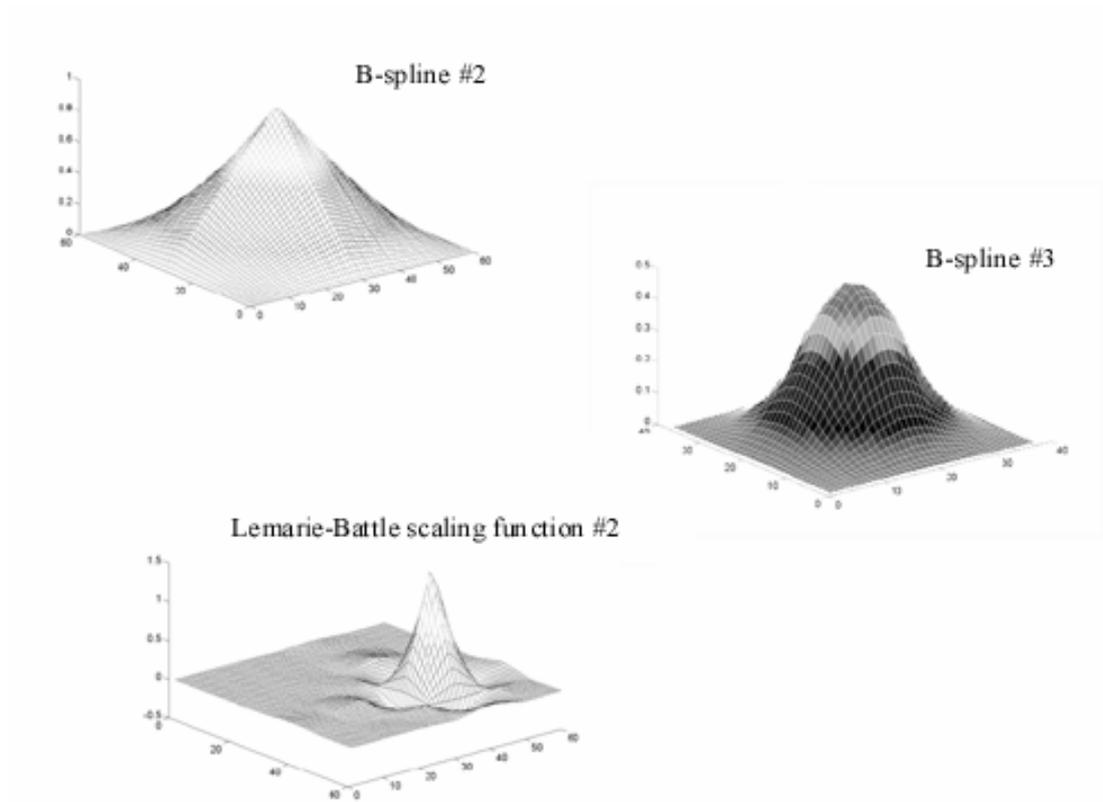
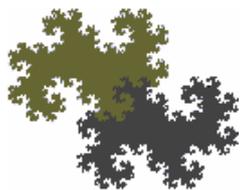


Рис. 5.5. В-сплайны и масштабирующая функция Лемарье-Баттла на гексагональной решетке.

(поскольку $d = \text{card}(\mathbf{Z}^n / D\mathbf{Z}^n)$). То же справедливо и для гексагональной решетки, т.е. $d = \text{card}(\mathbf{\Gamma} / D\mathbf{\Gamma})$.

Примером того, что на плоскости не всегда требуется три вейвлета, является следующее построение КРА. Если в качестве матрицы перехода выбрать

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$



то всплеск будет всего один, а масштабирующая функция – характеристическая функция множества, называемым «двуглавым драконом» (“twin dragon”)

(рис. 5.6)

Рис.5.6. «Двуглавый дракон»

Глава 6. Некоторые приложения вейвлет-анализа

6.1. Решение систем линейных уравнений

Одно из наиболее интересных приложений всплесков относится к линейной алгебре. Рассмотрим матрицу интегрального оператора. Предположим, что двумерное вейвлет-преобразование позволяет хорошо выполнить сжатие информации за счет того, что большая часть вейвлет-коэффициентов настолько мала, что ими можно пренебречь. В этом случае система линейных уравнений, аппроксимирующая интегральный оператор, становится разреженной системой в вейвлет-базисе.

Итак, пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6.1)$$

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}^T, \quad \tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{W} \cdot \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} \quad (6.2)$$

Применим одномерное вейвлет-преобразование к обеим частям уравнения (6.1):

$$\mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{W} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}^T) \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{b}$$

Тогда вместо (6.1) получим систему уравнений:

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} \quad (6.3)$$

Применяя к решению системы (6.3) обратное DWT, найдем решение системы (6.1):

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}} \quad (6.4)$$

Остается заметить, что матрица $\tilde{\mathbf{A}}$, как правило, сильно разрежена и имеет иерархическую ленточную структуру, поэтому для ее обращения можно применять известные эффективные алгоритмы.

6.2. Анализ операторов

Исторически интерес к всплескам отчасти рос благодаря тому, что они являются эффективным инструментом для исследования задач теории операторов и численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. В особенности, они полезны для понимания свойств так называемых операторов Кальдерона-Зигмунда.

Сначала рассмотрим в общем виде представление линейного оператора T в wavelet-базисе. Предположим, что функция f разлагается по базису следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(x)$$

Тогда

$$Tf(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{jk} \rangle T\psi_{jk}(x)$$

и, используя вейвлет-представление функции, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \langle f, \psi_{jk} \rangle \sum_{i,l} \langle T\psi_{jk}, \psi_{il} \rangle \psi_{il}(x) &= \\ = \sum_{i,l} \left(\sum_{j,k} \langle T\psi_{jk}, \psi_{il} \rangle \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{il}(x) \right) & \end{aligned} \quad (6.5)$$

Другими словами, действие оператора T непосредственно на функцию f переведено в действие бесконечной матрицы $A_T = \left\| \langle T\psi_{jk}, \psi_{il} \rangle \right\|$ на последовательность $\left\{ \langle f, \psi_{jk} \rangle \right\}$.

Представление (6.5) оператора T посредством матрицы A_T часто называют “стандартным представлением” T . Существует также “нестандартное представление” оператора. Например, для интегральных линейных операторов вида

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y) dy$$

нестандартное представление T – просто набор [двумерных] wavelet-коэффициентов ядра K , получающихся при разложении $\left\{ \langle K, \psi_{k_1 k_2}^j \rangle \right\}$.

Для большого класса операторов матричное представление, стандартное или нестандартное, имеет довольно точную структуру со многими малыми элементами. В этом представлении мы можем сжать оператор, просто опуская малые элементы. По существу, это та же самая ситуация, что и в случае сжатия изображений. Теперь “изображением” является ядро $K(x, y)$. Следовательно, основные действия типа инверсии и умножения можно выполнять со сжатыми матрицами вместо дискретной версии оператора T . Это позволит значительно ускорить их численное обращение.

6.3. Решение задач математической физики

Из-за близких подобий между масштабирующей функцией и конечными элементами кажется естественным использовать всплески в задачах, где традиционно используются методы

конечных элементов (например, для решения краевых задач). В этом направлении имеются интересные результаты, показывающие плодотворность использования всплесков вместо конечных элементов.

Типичная тестовая задача – уравнение теплопроводности. Для дискретизации по времени обычно используется стандартная схема Кранка-Николясона или Адамса-Моултона. Всплески же используются для дискретизации по пространственным координатам. Иногда они используются как для дискретизации по пространственным координатам, так и по времени.

Wavelet-галеркинская аппроксимация функций

Кратно разрешающий анализ позволяет представить пространство $L^2(\mathbf{R})$ в виде:

$$L^2(\mathbf{R}) = V_{j_0} \oplus \sum_{j \geq j_0} W_j \quad (6.6)$$

Следовательно, любая функция из $L^2(\mathbf{R})$ может быть представлена в виде линейной комбинации сдвигов масштабирующей функции $\varphi(x)$ при некотором фиксированном масштабе j_0 и сдвигов всплесков $\psi(x)$:

$$f(x) = \sum_k v_{j_0 k} \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k w_{jk} \psi_{jk}(x) \quad (6.7)$$

Второе слагаемое в формуле (6.7) соответствует высокочастотным компонентам функции $f(x)$, которыми мы пренебрегаем в силу их незначительности (близости к нулю). Поэтому $f(x)$ может быть записана в виде так называемого “вейвлет-галеркинское разложения” (обозначим j_0 через N):

$$f(x) \approx \sum_k v_{Nk} \varphi_{Nk}(x) \quad (6.8)$$

Поскольку

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1},$$

то можно записать:

$$V_N = V_{N_0} \oplus W_{N_0} \oplus W_{N_0+1} \dots \oplus W_{N-1}$$

для некоторого масштаба $N_0 < N$. Это разложение приводит к следующему приближенное конечному разложению функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_k v_{N_0 k} \varphi_{N_0 k}(x) + \sum_{j=N_0}^{N-1} \sum_k w_{jk} \psi_{jk}(x) \quad (6.9)$$

Здесь первое слагаемое представляет собою аппроксимацию $f(x)$ на “грубом” масштабе N_0 . Второе слагаемое – коррекции на более тонких масштабах. Уравнение (6.9) полностью описывает функцию $f(x)$ в пределах точности проекции (6.8).

* * *

Предположим, что вейвлет $\psi(x)$ удовлетворяет условиям компактности, ортогональности, регулярности и симметричности.

Первым трем условиям удовлетворяют всплески Добеши (условие регулярности говорит о полиномиальном содержании пространств V_j (т.е. масштабирующая функция регулярности r допускает точное представление полиномов степени r в пространствах V_j)). Выполнение условия симметричности ведет к построению комплексных базисов.

Если все четыре условия выполняются, то в этом случае масштабирующая функция $\varphi(x)$ и ассоциированный с ней вейвлет $\psi(x)$ должны быть четными и нечетными соответственно относительно точек:

$$x_{jk} = 2^{-j-1} + k2^{-j} \quad (6.10)$$

Из свойства симметричности масштабирующей функции следует также формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{1}{2})^k \overline{\varphi(x)} dx = 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (6.11)$$

Все это позволяет вычислить коэффициенты v_{Nk} в представлении (6.8). Выполняя разложение сигнала $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_{jk} и пользуясь формулой (6.10), а также учитывая вышеприведенные свойства, можно показать, что проекция $f(x)$ на подпространство V_N приводит к следующему выражению для коэффициентов:

$$v_{Nk} = \langle \varphi_{Nk}, f \rangle = 2^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(2^N x - k)} f(x) dx \approx$$

$$\approx 2^{-N/2} \left[f(x_{Nk}) - i\gamma 2^{-(2N+1)} \frac{d^2 f(x_{Nk})}{dx^2} + \dots \right]$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ – коэффициент, зависящий от порядка вейвлета.

Следуя определению КРА, можем записать:

$$v_{j-1,k} = \sum_m \overline{h_m} v_{j,2k+m}, \quad w_{j-1,k} = \sum_m \overline{g_m} v_{j,2k+m}. \quad (6.12)$$

Справедлива также формула обращения:

$$v_{j+1,k} = \sum_m h_{k-2m} v_{jm} + g_{k-2m} w_{jm} \quad (6.13)$$

Wavelet-аппроксимация производных

Рассмотрим аппроксимацию дифференциального оператора $\frac{d^n}{dx^n}$ в терминологии кратно-разрешающего анализа. В пространстве V_0 элементы матрицы дифференциального оператора имеют вид:

$$c_k^{(n)} = \left\langle \varphi_{0k}, \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x-k)} \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} dx \quad (6.14)$$

Используя (3.1), посредством замены переменной получим (здесь

$$a_k := \frac{h_k}{\sqrt{2}}):$$

$$c_k^{(n)} = 2^{n+1} \sum_{m=-2J}^{2J} \sum_{m'=-J}^{J+1} a_{m+m'-2k} a_{m'} c_m^{(n)} \quad (6.15)$$

Отметим, что здесь имеются в виду описанные выше комплексные симметричные всплески Добеши, для которых $a_k \neq 0$ при $k = -J, -J+1, \dots, J, J+1$. Уравнение (6.15) может быть записано в матричной форме:

$$\mathbf{A} \mathbf{c}^{(n)} = \frac{1}{2^{n+1}} \mathbf{c}^{(n)},$$

где матрица \mathbf{A} размера $(4J+1) \times (4J+1)$ – “матрица Лоутона” (Lawton) с элементами $A_{kk'}$, равными:

$$A_{kk'} = \sum_{m=-J}^{J+1} a_{m+k'-2k} a_m \quad (6.16)$$

Следовательно, элементы матрицы оператора n -ной производной в пространстве V_0 являются компонентами собственного вектора матрицы \mathbf{A} , соответствующие собственному значению $\lambda_n = 1/2^{n+1}$. Такой собственный вектор должен быть единственным. Можно показать, что для произвольного собственного вектора $\mathbf{r}^{(n)}$ коэффициенты $c^{(n)}$ удовлетворяют равенству:

$$c_k^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{\sum_{l=-2J}^{2J} l^n r_l^{(n)}} r_k^{(n)} \quad (6.17)$$

Отметим, что этот результат однозначно определяет n -ую производную только для $n \leq J$. Коэффициенты $c_i^{(2)}$ приведены в таблице 6.1:

Таблица 6.1

$c_k^{(2)} (=c_{-k}^{(2)})$	J=2	J=4	J=8
$c_0^{(2)}$	-885/168	-3.834994313783547318	-3.518861054010038
$c_1^{(2)}$	356/105	2.41479035119287232	2.1940726865794941
$c_2^{(2)}$	-92/105	-0.6495021899807847862	-0.6109291120912149
$c_3^{(2)}$	12/105	0.1809535500934093201	0.2473323226946289
$c_4^{(2)}$	3/360	-0.02990798043765740196	-0.09497084475051718
$c_5^{(2)}$		0.0007946205571436	0.0300686136125544
$c_6^{(2)}$		0.00036714538389	-0.00724847869285098
$c_7^{(2)}$		0.00000165654413604	0.001230499099443004
$c_8^{(2)}$		0.000000003538760056	-0.000133610006425686
$c_9^{(2)}$			0.0000091309307386
$c_{10}^{(2)}$			-0.00000073434669
$c_{11}^{(2)}$			0.0000000475557959
$c_{12}^{(2)}$			0.000000006327051767
$c_{13}^{(2)}$			0.0000000000492836
$c_{14}^{(2)}$			0.0000000000002793
$c_{15}^{(2)}$			2.95325×10^{-16}
$c_{16}^{(2)}$			1.7699×10^{-21}

Пример численного решения задачи методом Галеркина на основе wavelet-аппроксимации

С учетом всего вышеизложенного рассмотрим алгоритмы численного решения одномерного уравнения теплопроводности:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.18)$$

Предположим, что функция (поле) $u(x, t)$ на интервале $x \in [-1/2, 1/2]$ представлена дискретным набором из 2^N равномерно расположенных точек.

1. Проектируя $u(x, t)$ на V_N , получим (ср. с формулой (6.8) и выражением для V_{Nk}):

$$u(t, x) \approx \sum_{k=-2^{N-1}}^{2^{N-1}-1} 2^{-N/2} u_{Nk}(t) \varphi_{Nk}(x), \quad (6.19)$$

где

$$u_{Nk}(t) := u(t, x_{Nk}), \quad x_{Nk} := \frac{1 + 2k}{2^{N+1}}$$

Подставим (6.19) в уравнение (6.18), умножив слева на $\overline{\varphi}_{Nl}(x)$ и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$. Кроме того, воспользуемся свойством ортогональности сдвигов масштабирующей функции. Это позволит аппроксимировать уравнение (6.18) и представить его в следующей форме:

$$\frac{du_N}{dt} = \frac{1}{2} i \mathbf{T}_N u_N, \quad (6.20a)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_N)_{kl} &:= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi}_{Nk}(x) \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{Nl}(x) dx = \\ &= 2^{2N+3} \sum_{m=-J}^{J+1} \sum_{m'=-J}^{J+1} \overline{a}_m a_{m'} c_{2(k-l)+m-m'}^{(2)} \end{aligned} \quad (6.20b)$$

Матрица \mathbf{T}_N – ленточная диагональная, имеющая $4J+1$ ненулевых элементов в каждой строке. Решение уравнения (6.20a) может быть записано в виде:

$$u_N(t_2) = u_N(t_1) e^{i(t_2-t_1)T_N/2}$$

2. Используя кратно разрешающий анализ, представим функцию $u(x,t)$ в следующем виде (ср. с формулой (6.9)):

$$u(t, x) \approx \sum_{k=-2^{N_0-1}}^{2^{N_0-1}-1} v_{N_0 k}(t) \varphi_{N_0 k}(x) + \sum_{j=N_0}^{N-1} \sum_{k=-2^{j-1}}^{2^{j-1}-1} w_{jk}(t) \psi_{jk}(x) \quad (6.21)$$

Масштабные и всплесковые коэффициенты являются соответственно “усредненной” и “детализирующей” информацией о функции $u(x, t)$ в фиксированный момент времени t . Подставим (6.21) в уравнение (6.18) и умножим слева на функции $\overline{\varphi_{N_0 l}(x)}$ и $\overline{\varphi_{q l}(x)}$, а затем проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$. Кроме того, учтем ортогональность базисных функций (масштабирующей функции и всплеска). В результате мы получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{1}{2} iQU(t), \quad (6.22)$$

где вектор $U(t)$ и матрица Q имеют следующий вид:

$$U(t) := \begin{pmatrix} w_{N-1} \\ \vdots \\ w_{N_0+2} \\ w_{N_0+1} \\ w_{N_0} \\ v_{N_0} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A_{N-1} & \dots & A_{N_0+2}^{N-1} & A_{N_0+1}^{N-1} & A_{N_0}^{N-1} & B_{N_0}^{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N-1}^{N_0+2} & \dots & A_{N_0+2}^{N_0+2} & A_{N_0+1}^{N_0+2} & A_{N_0}^{N_0+2} & B_{N_0}^{N_0+2} \\ A_{N-1}^{N_0+1} & \dots & A_{N_0+2}^{N_0+1} & A_{N_0+1}^{N_0+1} & A_{N_0}^{N_0+1} & B_{N_0}^{N_0+1} \\ A_{N-1}^{N_0} & \dots & A_{N_0+2}^{N_0} & A_{N_0+1}^{N_0} & A_{N_0}^{N_0} & B_{N_0}^{N_0} \\ \Gamma_{N-1}^{N_0} & \dots & \Gamma_{N_0+2}^{N_0} & \Gamma_{N_0+1}^{N_0} & \Gamma_{N_0}^{N_0} & T_{N_0} \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

Здесь A, B, Γ, T – ленточные матрицы, элементы которых суть:

$$(A_m^n)_{kl} := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_{nk}} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{ml} dx, \quad A_m^m \equiv A_m$$

$$(B_m^n)_{kl} := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi}_{nk} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{ml} dx, \quad B_m^m \equiv B_m$$

$$(\Gamma_m^n)_{kl} := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi}_{nk} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{ml} dx, \quad \Gamma_m^m \equiv \Gamma_m$$

$$(T_m)_{kl} := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi}_{mk} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{ml} dx$$

Матрицы A_m , B_m , Γ_m и T_m имеют $4J+1$ ненулевых элементов в каждой строке. Матрицы A_m и T_m действительны и симметричны, а $\Gamma_m = (B_m)^T$. Для комплексно-симметричных всплесков матрица Q является комплексной и эрмитовой, а для вещественных всплесков – симметричной. Решение уравнения (6.18) может быть записано в следующем виде:

$$U(t_2) = U(t_1) e^{i(t_2-t_1)Q/2}$$

6.4. Нахождение точек быстрого изменения функций с помощью всплесков

При внимательном рассмотрении вейвлет-преобразования обнаруживается, что оно имеет ненулевые коэффициенты, если сигнал изменяется быстро относительно размера анализирующего всплеска. Другими словами, локальные особенности или локальные быстрые изменения дадут значительные по величине вейвлет-коэффициенты. При анализе сигнала посредством вейвлет-преобразования имеем очень мощное средство описания и извлечения локальных особенностей. Более того, сигнал может быть эффективно описан только по точкам резкого его изменения. Эти точки - среди наиболее важных особенностей сигнала и его изображения.

Одномерные данные.

Рассмотрим всплески $\psi^{(1)}(t)$ и $\psi^{(2)}(t)$, являющиеся соответственно первой и второй производной функции сглаживания $\phi(t)$. Мы теперь определим

$$\psi_{\sigma}^{(1)}(t) = \sigma^{-1} \psi^{(1)}(t/\sigma) \text{ и } \psi_{\sigma}^{(2)}(t) = \sigma^{-1} \psi^{(2)}(t/\sigma),$$

которые найдены так, чтобы

$$\psi_{\sigma}^{(1)}(t) = \sigma \frac{d\phi_{\sigma}(t)}{dt}$$

с $\psi_{\sigma}(t) := \sigma^{-1} \phi(t/\sigma)$. всплесков Вейвлет преобразование функции $f(t)$ посредством $\psi^{(1)}(t)$ и $\psi^{(2)}(t)$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} W\{f, \psi_{\sigma}^{(1)}(t)\}(t) &= f(t) * \psi_{\sigma}^{(1)}(t) = \\ f(t) * \left(\sigma \frac{d\phi_{\sigma}(t)}{dt}\right) &= \sigma \frac{d}{dt} (f(t) * \phi_{\sigma}(t)) \end{aligned} \quad (6.24)$$

и

$$\begin{aligned} W\{f, \psi_{\sigma}^{(2)}(t)\}(t) &= f(t) * \psi_{\sigma}^{(2)}(t) = f(t) * \left(\sigma^2 \frac{d^2 \phi_{\sigma}(t)}{dt^2}\right) \\ &= \sigma \frac{d^2}{dt^2} (f(t) * \phi_{\sigma}(t)) \end{aligned}$$

Таким образом, вейвлет-преобразования $W\{f, \psi_{\sigma}^{(1)}(t)\}(t)$ и $W\{f, \psi_{\sigma}^{(2)}(t)\}(t)$ соответствуют первой и второй производным от функции $f(t)$, сглаженной посредством $\phi_{\sigma}(t)$. При некотором масштабе σ локальный экстремум функции $W\{f, \psi_{\sigma}^{(1)}(t)\}(t)$ вдоль оси t соответствует пересечением нулевой линии $W\{f, \psi_{\sigma}^{(2)}(t)\}(t)$ с точками перегиба свертки функций $f(t) * \phi_{\sigma}(t)$ (см. рис. 6.1).

На рисунке 6.1 визуализированы две процедуры обнаружения точек перегиба исходного сигнала. Локальные экстремума $W\{f, \psi_{\sigma}^{(1)}(t)\}(t)$ дают точное положение этих точек благодаря специальному выбору всплеска. Локальные экстремумы при различных шкалах часто используются при анализа и обработке сигнала. Положение точек перегиба исходного сигнала совпадает с прохождением через нуль функции $W\{f, \psi_{\sigma}^{(2)}(t)\}(t)$.

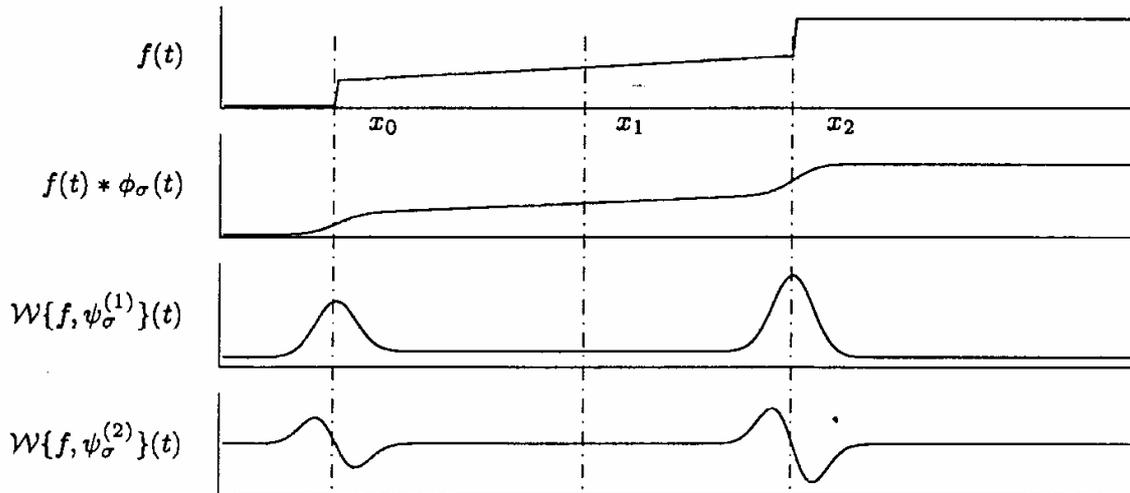


Рис. 6.1. Экстремум функции $W\{f, \psi_{\sigma}^{(1)}(t)\}(t)$ и прохождение через нуль функции $W\{f, \psi_{\sigma}^{(2)}(t)\}(t)$ является точками перегиба свертки $f(t) * \phi_{\sigma}(t)$. Точки с абсциссами x_0 и x_2 - резкие изменения $f(t) * \phi_{\sigma}(t)$ и - локальный максимум $|W\{f, \psi_{\sigma}^{(1)}(t)\}(t)|$. Локальный минимум функции $|W\{f, \psi_{\sigma}^{(1)}(t)\}(t)|$ при x_1 - также точка перегиба, но это - точка медленного изменения.

Двумерные данные.

Пусть масштабирующая функция (scaling function) $\phi(x, y)$ такова, что

$$\int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \phi(x, y) dx dy = 1$$

и стремится к нулю при $x, y \rightarrow \infty$. Примером такой функции может служить двумерная функция Гаусса

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - y^2}.$$

Для функции $U(x, y)$ сглаженную функцию $U^s(x, y)$ определим посредством двумерной свертки $U(x, y)$ с $\phi(x, y)$

$$U^s(x, y) := U(x, y) ** \phi_{\sigma}(x, y), \quad (6.26)$$

где

$$\phi_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{\sigma^2} \phi\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{y}{\sigma}\right) \quad (6.27)$$

По аналогии с одномерным случаем первую производную масштабирующей определим посредством соотношения:

$$\vec{\psi}_\sigma(x, y) := \begin{bmatrix} \psi_\sigma^x(x, y) \\ \psi_\sigma^y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \psi^x\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{y}{\sigma}\right) \\ \frac{1}{\sigma^2} \psi^y\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{y}{\sigma}\right) \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

где

$$\psi_\sigma^x(x, y) = \sigma \frac{\partial}{\partial x} \phi_\sigma(x, y), \quad \psi_\sigma^y(x, y) = \sigma \frac{\partial}{\partial y} \phi_\sigma(x, y). \quad (6.29)$$

Подобно (6.24) двумерное вейвлет-преобразование может быть записано в виде

$$\begin{aligned} W\{U, \vec{\psi}_\sigma\}(x, y) &= U(x, y) ** \vec{\psi}_\sigma(x, y) \\ &= U(x, y) ** \mathit{grad} \phi_\sigma(x, y) = \\ &= \sigma \mathit{grad}(U(x, y) ** \phi_\sigma(x, y)) = \sigma \mathit{grad} U^s(x, y). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Равенство (6.30) показывает, что двумерное вейвлет-преобразование функции $U(x, y)$ посредством всплесков (6.28)-(6.29) пропорционально первым производным от сглаженной функции $U^s(x, y)$ (см. формулу (6.26)).

Локальные экстремумы $W\{U, \vec{\psi}_\sigma\}(x, y)$ точно соответствуют точкам наиболее быстрого изменения величин $U(x, y) ** \phi_\sigma(x, y)$. Кроме того, можно найти направление наиболее резкого изменения функции $W\{U, \vec{\psi}_\sigma\}(x, y)$, совпадающее с направлением вектора $\mathit{grad} U^s(x, y)$.

6.5. Сжатие изображений

Одним из возможных применений вейвлетов в двумерном пространстве является сжатие изображений. К настоящему времени разработано много форматов хранения графических данных. Например, хорошо известный формат JPEG, который использует косинусное преобразование. Однако, как уже говорилось, недостатком Фурье-анализа является бесконечность носителя его базисных функций, чего лишены вейвлеты.

Идея сжатия посредством вейвлетов состоит в следующем. К исходному изображению применяется двумерное дискретное

вейвлет- преобразование (с уменьшением числа отсчетов), т.е. двумерный алгоритм Малла. В результате чего образуются четыре блока вейвлет-коэффициентов. Один блок (I_0) получается после применения масштабирующей функции, а три других I_1, I_2, I_3) - при прохождении фильтрами, соответствующими трем всплескам (см. главу 5, часть 2)). задается порог отсечения вейвлет-коэффициентов в области изображений, и все те участки коэффициентов I_1, I_2, I_3 , которые меньше этого порога, зануляются. После чего сохраняются только оставшиеся ненулевые детали и I_0 . За счет этого зануления и происходит сжатие. При восстановлении первоначального изображения применяется обратное DWT.

Отметим, что DWT можно применить далее, увеличив глубину сжатия. Это позволит еще более уменьшить размер первоначального изображения.

Ниже представлено изображение, сжатое с помощью вейвлетов. Приведены характеристики применявшегося базисного всплеска и уровня сжатия.



Рис. 6.2. Изображение "Barton" (Matlab 4.0).

Слева – оригинал (256 Кб),

справа – реконструкция (16-20 Кб).

Для сжатия применялся базис Добеши №20, уровень сжатия

2

Заключение

Авторами разработан пакет программ "Wavelet12D", который ориентирован, главным образом, для обучения студентов основам одномерного и двумерного вейвлет-преобразования. Кроме того, программы находят применение при решении различных практических задач.

Интерфейс программ написан на языке *Visual Basic 5.0*. Вычислительные процедуры используют язык *Visual Fortran 6.0* и оформлены в виде *DLL*-библиотеки. Обращение к библиотечным модулям происходит из интерфейсных программ.

Пакет программ построен на основе библиотечных процедур *Numerical Recipes*. Набор вейвлет-фильтров *Добечи* дополнен семействами “*Simlet*” “*Coiflet*” и “*Biort*”. Соответствующие коэффициенты взяты из пакета программ *Matlab*. Это потребовало некоторого изменения ряда базовых подпрограмм *Numerical Recipes*.

Программы одномерного вейвлет преобразования используют графические инструментальные средства, встроенные в *Visual Basic (Graph32.ocx)*. При работе с двумерным вейвлет-преобразованием для визуализации результатов в качестве внешнего объекта используется графический пакет *Surfer* фирмы *Golden Software*, а также *Compaq Array Viewer*. В частности, ввод двумерных данных, зарегистрированных на нерегулярной сети, и их проектирование на равномерную сетку, с которой работает двумерное вейвлет-преобразование, выполняется посредством процедур *Surfer*'а.

По вопросам приобретения программ и настоящего пособия по теории вейвлет-преобразования можно обращаться по электронному адресу

judin@msgpa.ru

или телефону кафедры высшей математики и математического моделирования МГГА

(095) 433-62-33, доб. 12-42 или 11-01

Литература

1. Левкович-Маслюк Л. Дайджест вейвлет-анализа в двух формулах 22 рисунках. Компьютерра, № 8 (1998).
2. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. Учебное пособие. СПб.: Изд. ООО “МОДУС+”, 1999, 152 с.
3. Фарков Ю.А. Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах. Функциональный анализ и его приложения, №4, 31 (1997).
4. Buckheit J. and Donho D. WaveLab and Reproducible Research. Stanford University, Stanford CA 94305, USA.
5. Chui C. An Introduction to Wavelets. Academic Press, San Diego, CA, 1992.
6. Cohen A. and Daubechies I. Non-separable bidimensional wavelet bases. Revista Matematica Iberoamericana, №1, 9 (1993).
7. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992.

8. Daubechies I. Orthonormal Bases of compactly supported wavelets. *Comm. PureAppl. Math.*, 41, 1988, pp. 909-996.
9. Different perspectives on Wavelets. Ed. I. Daubechies. American Mathematical Society. Short Course. San Antonio, Texas, 1993.
10. Gagnon L. and Lina J.M. Symmetric Daubechies' wavelets and numerical solutions of NLS2 equations. *J. Phys.A: Math. Gen.* 27, 1994, pp. 8207-8230.
11. Hoekstra E.V. Multiscale Analisis of seismic data by the wavelet transform. M. Sc. Thesis. Delft, 1996.
12. Jaerth B. and Swedlens W. An Owerview of Wavelet Based Multiresolution Analyses. *SIAM Review.* Vol.36, pp. 377-412, 1994.
13. Kaiser J. A Friendly Guide to Wavelets. Birkhauser. ISBN G-8176-3711-7, Boston, 1994.
14. Kölzow D. Wavelets. A Tutorial and a Bibliography, Erlangen, 1994.
15. Mallat S. Multiresolution approximation and wavelets. *Trans.Amer. Mayh. Soc.* 315, 1989, pp.69-88.
16. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and Applications. SIAM, Philadelphia, 1993.
17. Numerical Recipes. ISBN 0-521-43108-5, Cambrige University Press, 1992-1998.
18. Self-Similar Systems. Ed. V.B.Priezzhev, V.P.Spiridonov. Dubna, 1999.
19. Resnikoff H. L., Wells R.O. Wavelet Analysis. Springer, 1991.
20. Wavelets and their Applications. Ed. Jones and Barlett. Boston, 1992.