

УДК 550.37

О ДЕКОМПОЗИЦИИ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ШВАРЦА

© 2004 г. М. Н. Юдин, В. М. Юдин

Московский государственный геологоразведочный университет, г. Москва

e-mail: judin@msgpa.msgpa.ru

Поступила в редакцию 17.10.2002 г.

Рассмотрены актуальные проблемы численного моделирования электромагнитных полей. Предложена модификация декомпозиционного решения задач геоэлектрики на основе альтернирующего метода Шварца, которая обеспечивает высокую скорость сходимости итерационного процесса и уменьшает количество решаемых подзадач. Кроме того, алгоритм обеспечивает минимально возможные размеры сеточной области, в которой одна из подзадач решается численно. На простых моделях исследована сходимость описанного в работе итерационного процесса. Построены алгоритмы декомпозиции задач произвольной размерности и экономичные способы согласования численного и аналитического решений подзадач. Приведены результаты расчетов по полуаналитическому решению двумерной задачи МТЗ и данные о скорости сходимости итерационного процесса.

ВВЕДЕНИЕ

Типичной моделью среды в геоэлектрике является локальная неоднородность, содержащаяся в относительно простой по структуре неограниченной среде с регулярным распределением свойств. Чаще всего вмещающая среда является горизонтально-слоистой (электромагнитные зондирования на постоянном и переменном токе) или цилиндрически-слоистой (задачи каротажа или наземной электроразведки с источником поля в скважине). Решение для таких относительно простых моделей может быть найдено аналитически и представлено в виде несобственных интегралов (интегралов Фурье или Фурье-Бесселя). Задача состоит в изучении влияния достаточно сложно построенной локальной неоднородности на поле в слоистой среде.

Как известно, применение универсальных численных методов решения задач (метод конечных разностей или метод конечных элементов) в неограниченных областях требует решения ряда проблем. Основные из них состоят в следующем.

1. Нужно вместо неограниченной области перейти к области конечных размеров. Как ее выбрать?

2. На границе сеточной области нужно вместо условий на бесконечности задать краевые условия. Как это сделать, если граничные значения будут известны только после решения задачи?

Обе проблемы можно решить посредством алгоритмов, базирующихся на идеях альтернирующего метода Шварца. Декомпозиция сложных задач на ряд более простых подзадач и “сшивание” их решений посредством альтернирующего метода Шварца обсуждаются в работах [Канторович,

Крылов, 1962; Завадский, 1972; Юдин, 1982; Ваньян и др., 1984]. Обобщение алгоритма Шварца на задачи геоэлектрики получили название декомпозиционного альтернирующего метода (ДАМ) [Юдин, 1985]. Один из многочисленных вариантов декомпозиции является алгоритм глобальной декомпозиции (ГДАМ). Суть его состоит в последовательном решении внешних и внутренних краевых задач, связанных между собой в итерационном процессе через краевые условия. Для обеспечения связи между задачами необходимо иметь непустое пересечение областей, в которых решаются задачи, участвующие в итерационном процессе Шварца. В нем одновременно строится решение задачи и краевые условия на границе сеточной области. Скорость сходимости последовательных приближений к искомому решению зависит от величины перекрытия (наложения) областей.

Развиваемые нами декомпозиционные подходы к решению прямых задач математической физики, базирующиеся на использовании альтернирующего метода Шварца, нашли применение при численном моделировании процессов распространения загрязнений в атмосфере [Filatov и др., 2001; Alexandrov, Filatov, 2002].

ГДАМ в сочетании с численным решением краевых задач методом вейвлет-Галеркина [Юдин и др., 2001] позволяет справиться с проблемами, возникающими при аппроксимации граничных условий в вейвлет-базисе с большим числом коэффициентов фильтра быстрого дискретного вейвлет-преобразования [Юдин и др., 2002].

Одним из недостатков алгоритма глобальной декомпозиции является необходимость решения ряда внешних краевых задач [Юдин, 1985]. Цель

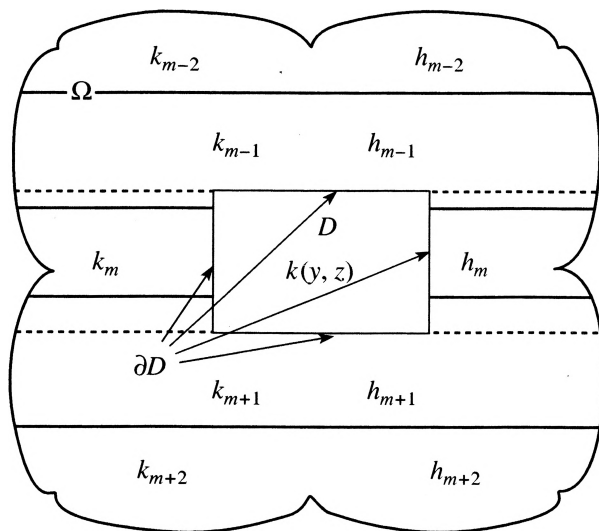


Рис. 1. Двумерная модель среды. Горизонтально-однородная слоистая среда содержит локальную двумерную неоднородность.

обсуждаемой в настоящей статье модификации ГДАМ состоит в достижении высокой скорости сходимости итерационного процесса Шварца за счет максимально возможной площади наложения областей, уменьшении количества решаемых подзадач и минимизации размеров области, в которой задача решается численно. Основные идеи этого варианта ГДАМ изложены в статье [Юдин М.Н., Юдин В.М., 2002].

Когда нормальная модель представляет собой слоистую среду, применение преобразования Фурье или Фурье-Бесселя к таким задачам понижает их размерность и обычно приводит к одномерным задачам для слоистых моделей среды с кусочно-постоянным распределением свойств. Поэтому сначала изучена сходимость модифицированного алгоритма Шварца на одномерных задачах, допускающих аналитические решения. Затем построен алгоритм вычислений применительно к стационарным и квазистационарным 2D и 3D задачам геоэлектрики и приведены результаты расчетов для двумерной задачи МТЗ (Е-поляризация).

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую математическую модель (рис. 1).

1. Имеется неограниченная область Ω с относительно простым распределением свойств среды. (Классическим примером является слоистая модель с кусочно-постоянным распределением свойств).

2. Ограниченная область D содержится в области Ω .

3. Существует алгоритм решения краевой задачи в области D . (Области D соответствует изучаемая относительно сложно построенная неоднородная часть модели).

4. Пусть известно решение в области $D \subset \Omega$. Существует алгоритм решения задачи в области Ω , учитывающий решение в D .

Ясно, что в такой модели обеспечивается максимально возможное наложение областей Ω и D , т.к. $D \cap \Omega = D$.

На начальном этапе вычислений решение задачи в D не известно. Для того, чтобы найти его первое приближение будем считать, например, что поле на границе ∂D этой области равно нормальному полю в слоистой среде в отсутствии неоднородностей.

Предлагаемый авторами алгоритм вычислений, базирующийся на альтернирующем методе Шварца, состоит в выполнении следующих шагов.

1. Найти решение задачи Дирихле в области D с приближенно заданными краевыми условиями.

2. Предполагая решение внутри области D известным, найти решение задачи в области Ω .

3. Используя решение в Ω , рассчитать поле на границе ∂D .

4. Если процесс не установился, перейти к пункту 1, иначе – к пункту 5.

5. Конец вычислений.

В зависимости от сложности модели среды решение задачи в ограниченной области D находится численно или аналитически. Ее численное решение здесь не будет обсуждаться, потому что оно рассмотрено в большом числе известных работ. Ниже сначала будет рассмотрено решение в кусочно-однородной слоистой среде (области Ω) в предположении, что каждый горизонтальный слой может содержать источники поля. Далее будет исследована сходимость метода Шварца применительно к одномерной модели среды.

РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерную модель реальной среды с кусочно-постоянными свойствами, которые описываются функциями $\eta(z)$ и $\gamma(z)$, определенными при $z \geq 0$, причем функция $\eta(z)$ зависит от $\gamma(z)$. Пусть эти функции имеют разрывы в точках

$$0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n-1} < \infty.$$

Далее потребуется решение следующей вспомогательной задачи. Найти функцию $U(z)$, удовлетворяющую неоднородному дифференциальному уравнению

$$U''(z) - \eta^2(z)U(z) = \psi(z), \quad 0 < z < \infty, \quad (1)$$

условиям сопряжения на границах разрыва функций $\eta(z)$ и $\gamma(z)$

$$[U] = 0, [\gamma^{-1}U'(z)] = 0, \quad (2)$$

краевому условию и условию на бесконечности

$$U|_{z=0} = U_0, U(z) \rightarrow 0; z \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Задачи вида (1)–(3) возникают при расчете электромагнитных полей в слоистых средах. В этом случае $\eta_m = \sqrt{\lambda^2 + k_m^2}$, $k_m^2 = -i\omega\mu\sigma_m$, где m – номер слоя, k – волновое число, ω – круговая частота, σ – проводимость, μ – магнитная проницаемость, i – мнимая единица. В формуле (2) параметру γ соответствует магнитная проницаемость (U соответствует компонента E -поля), удельная электропроводность (U соответствует компонента H -поля) или удельное сопротивление (U соответствует потенциал постоянного тока). Вещественный параметр λ появляется, если для решения задачи в слоистой среде применяется преобразование Ханкеля (Фурье-Бесселя) или преобразование Фурье. В одномерных задачах МТЗ $\lambda = 0$, $\eta_m = k_m$.

Решение задач типа (1)–(3) рассмотрено в большом числе работ различных авторов (см., например, [Бердичевский, Дмитриев, 1992]). Здесь мы приведем ее решение в виде, удобном для дальнейшего использования в настоящей статье [Юдин, 1985].

Обозначим

$$q_{1,m}(\bar{z}, \eta_m, h_m) := \begin{cases} \frac{\text{sh}[\eta_m(h_m - \bar{z})]}{\text{sh}(\eta_m h_m)}, & h_m \neq \infty, \\ e^{-\eta_m \bar{z}}, & h_m = \infty. \end{cases} \quad (4)$$

$$q_{2,m}(\bar{z}, \eta_m, h_m) := \begin{cases} \frac{\text{sh}(\eta_m \bar{z})}{\text{sh}(\eta_m h_m)}, & h_m \neq \infty, \\ 0, & h_m = \infty. \end{cases}$$

Здесь $h_m := z_m - z_{m-1}$, $\bar{z} := z - z_{m-1}$ – локальная координата, $z \in [z_{m-1}, z_m]$ и $\bar{z} \in [0, h_m]$.

Интервал $[z_{m-1}, z_m]$ с постоянными свойствами будем также называть m -тым слоем. Решение в m -том слое принимают вид

$$U_m(z) = A_{m-1}q_{1,m} + A_m q_{2,m} + \phi_m(\bar{z}), \quad (5)$$

где $\phi_m(\bar{z})$ – частное решение неоднородного уравнения. Оно может быть представлено в виде

$$\phi_m(\bar{z}) = \int_0^{h_m} \Psi(z_{m-1} + \zeta) G_m(\bar{z}, \zeta; \eta_m, h_m) d\zeta, \quad (6)$$

где $G_m(\bar{z}, \zeta; \eta_m, h_m)$ – функция Грина для уравнения (1) [Диткин, Прудников, 1972]

$$G_m(\bar{z}, \zeta; \eta_m, h_m) =$$

$$= \begin{cases} q_{1,m}(\zeta) \eta_m^{-1} \text{sh}(\eta_m \bar{z}), & \bar{z} \leq \zeta, \\ q_{2,m}(\zeta) \eta_m^{-1} \text{sh}[\eta_m(h_m - \bar{z})], & \bar{z} \geq \zeta, \end{cases} \quad (7)$$

удовлетворяющая однородным краевым условиям на границах пласта.

В таком представлении решения автоматически обеспечивается непрерывность функций на границах разрыва свойств модели. Действительно, $U_m(z_m) = U_{m+1}(z_m) = A_m$ т.к.

$$\begin{aligned} \phi_m(h_m) &= \phi_{m+1}(0) = 0; \quad q_{1,m}(h_m, \cdot, \cdot) = 0, \\ q_{2,m}(h_m, \cdot, \cdot) &= 1; \quad q_{1,m+1}(0, \cdot, \cdot) = 1, \\ q_{2,m+1}(0, \cdot, \cdot) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Выполнение второго условия сопряжения (2), граничного условия и условия на бесконечности (3) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений коэффициентов A_m с трехдиагональной матрицей коэффициентов следующего вида:

$$\begin{cases} A_1(C_1 + C_2) + A_2 b_2 = -U_0 b_1 + g_1, \\ A_{m-1} b_m + A_m(C_m + C_{m+1}) + A_{m+1} b_{m+1} = g_m, \\ m = 2, 3, \dots, n-2, \\ A_{n-2} b_{n-1} + A_{n-1}(C_{n-1} + C_n) = g_{n-1}, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$b_m = -\eta_m \gamma_m^{-1} / \text{sh}(\eta_m h_m), \quad C_m = \eta_m \gamma_m^{-1} \text{cth}(\eta_m h_m), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} g_m &= -\gamma_m^{-1} \int_0^{h_m} \Psi(z_{m-1} + \zeta) q_{2,m}(\zeta) d\zeta - \\ &\quad - \gamma_{m+1}^{-1} \int_0^{h_{m+1}} \Psi(z_m + \zeta) q_{1,m+1}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно (10), при $m = nh_n = \infty \Rightarrow b_n = 0, C_n = \eta_n / \gamma_n$.

Частный случай. Будем считать, что среда двухслойная и при $z > h_1$ $\Psi(z) = 0$. Тогда

$$U_1(z) = U_0 q_{1,1} + A_1 q_{2,1} + \phi_1(z), \quad 0 \leq z \leq z_1;$$

$$U_2(\bar{z}) = A_1 e^{-\eta_2 \bar{z}}, \quad z > z_1, \quad \bar{z} := z - z_1.$$

Величина A_1 равна

$$\begin{aligned} A_1 &= U_1(h_1) = (g_1 - U_0 b_1) / (C_1 + C_2), \\ g_1 &= -\gamma_1^{-1} \int_0^{h_1} \Psi(\zeta) q_{2,1}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (12)$$

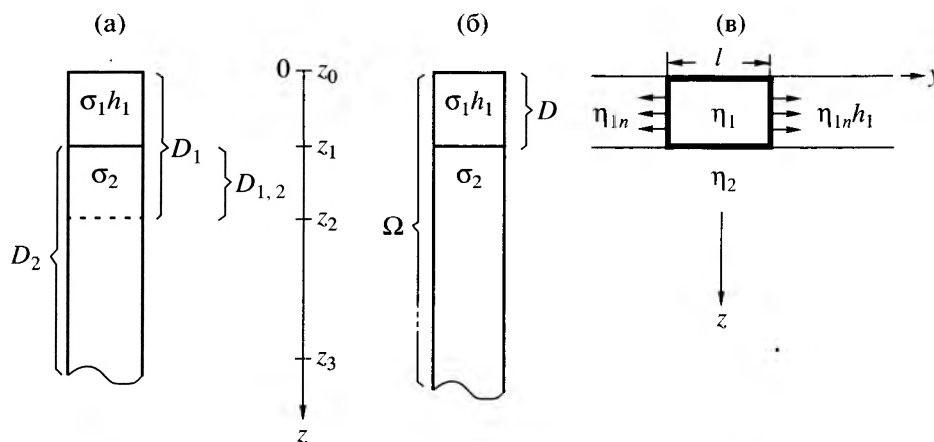


Рис. 2. (а) – выбор 1D областей в классическом алгоритме Шварца; (б) – выбор 1D областей в модифицированном алгоритме Шварца; (в) – двумерная модель среды (вставка в двухслойной вмещающей среде).

ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО АЛГОРИТМУ ШВАРЦА НА ПОЛУПРЯМОЙ

Поясним сущность алгоритма Шварца на простейшем примере.

Рассмотрим модель среды, изображенной на рис. 2. Пусть нужно найти решение задачи (1)–(3) с произвольным распределением свойств среды в первом слое и постоянными свойствами в основании. Такая задача в общем случае не имеет аналитического решения, поэтому ее решение находят численно. Дадим краткое описание алгоритмов численного решения одномерных задач на полубесконечном интервале.

Стандартное численное решение задачи (рис. 2). Численное разностное решение краевой задачи на неограниченном интервале приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений. Поэтому обычно находят решение на *конечном интервале* (z_0, z_3) . При этом остается открытым вопрос о способе задания граничного значения на искусственно созданной дополнительной нижней границе $z = z_3$. На этой границе чаще используются импедансные или асимптотические краевые условия [Жданов и др., 1990].

Классический алгоритм Шварца (рис. 2а). Классический алгоритм Шварца позволяет найти решение задачи на *бесконечном интервале* (полупрямой). Он состоит в последовательном решении двух краевых задач:

- на интервале $(0, z_2)$ (в области D_1) задача решается численно,
- на интервале (z_1, ∞) (область D_2) задача решается аналитически.

При этом нужно, чтобы $D_1 \cap D_2 = D_{1,2} \neq \emptyset$. Заддим достаточно произвольно краевое условие на границе $z = z_2$. В этом случае приближенное решение задачи в области D_1 позволяет найти об-

новленное граничное значение в точке $z = z_1$ для задачи в области D_2 . В свою очередь, аналитическое решение задачи в D_2 дает следующее приближение к краевому условию в точке $z = z_2$ для задачи в D_1 . Сходимость такого алгоритма для горизонтально-слоистой среды можно доказать аналитически [Ваньян и др., 1984; Юдин, 1985].

Модифицированный алгоритм Шварца (рис. 2б). Подобно классическому алгоритму, модифицированный алгоритм Шварца [Юдин М.Н., Юдин В.М., 2002] дает возможность найти решение задачи на *бесконечном интервале* (полупрямой Ω).

Алгоритм вычислений состоит в последовательном решении двух краевых задач:

- на интервале $(0, z_1)$ (в области D) краевая задача решается численно,
- на интервале $(0, \infty)$ (в области Ω) задача решается аналитически.

Так же как в классическом алгоритме Шварца, сначала (достаточно произвольно) возьмем краевое условие на границе $z = z_1$. Далее граничное значение при $z = z_1$ уточняется в итерационном процессе Шварца посредством последовательного решения задач в областях Ω и D .

Основное отличие модифицированного алгоритма от классического состоит в том, что область Ω содержит область D . Это обещает получить два важных преимущества:

1. Повысить скорость сходимости метода Шварца за счет максимально возможного наложения областей ($\Omega \cap D = D$).
2. Численно решать задачу в области минимально возможных размеров (только в области D , рис. 2б).

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЛГОРИТМА ШВАРЦА

Получим условия сходимости алгоритма на примере двухслойной среды. Будем полагать, что в первом слое имеется вставка шириной l (рис. 2в). Устремляя l к бесконечности, получим двухслойную среду, свойства которой описывает функция

$$\eta(z) = \begin{cases} \eta_1(z), & 0 \leq z \leq h_1, \\ \eta_2 = \text{const}, & z \geq h_1. \end{cases}$$

Рассмотрим две задачи вида (1)–(3). Первая задача относительно функции $U(z)$

$$\begin{cases} U''(z) - \eta^2(z)U(z) = 0, & 0 < z < \infty, \\ [U]_{z=h_1} = 0, & [\gamma^{-1}U'(z)]_{z=h_1} = 0; \\ U|_{z=0} = U_0, & U(z) \rightarrow 0; \quad z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (13)$$

Вторая задача относительно функции $U_n(z)$ отличается от первой только тем, что в ней $\eta_1(z) = \eta_{1n} = \text{const}$. Из этих двух задач для аномальной составляющей U_a получим задачу

$$\begin{cases} U_a''(z) - \eta_n^2(z)U_a(z) = \psi(z), & z > 0, \\ [U_a]_{z=h_1} = 0, & [\gamma^{-1}U_a'(z)]_{z=h_1} = 0; \\ U_a|_{z=0} = 0, & U_a(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$U_a := U - U_n; \quad \psi(z) := (\eta^2 - \eta_n^2)U. \quad (15)$$

Следует отметить, что, согласно (15), в правую часть уравнения в (14) входит неизвестное (искомое) решение.

Построим итерационный процесс Шварца и покажем, что он сходится к решению задачи (13) в любой точке полупрямой Ω . Для получения аналитических оценок сходимости метода в задаче (13) заменим в первом слое функцию $\eta(z)$ константой η_1 , причем $\eta_1 \neq \eta_{1n}$. Например, можно принять величину η_1 равной интегральному среднему функции $\eta(z)$ в первом слое. В этом случае известны точные решения обеих задач, поэтому легко найти условия сходимости метода последовательных приближений. Будем аналитически решать пару связанных задач.

1). Сначала решим задачу

$$\begin{cases} U^{(1)''}(z) - \eta_1^2 U^{(1)}(z) = 0, & 0 < z < h_1, \\ U^{(1)}|_{z=0} = U_0, & U^{(1)}|_{z=h_1} = U_1. \end{cases} \quad (16)$$

Граничное значение U_1 не известно, поэтому примем $U_1 = U_n(h_1)$. Тогда ее решением является функция

$$U^{(1)}(z) = \tilde{U}_n(z) := U_0 q_{1,1}(z) + U_n(h_1) q_{2,1}(z). \quad (17)$$

2). Следующий шаг вычислений состоит в решении задачи (14), в которой в качестве нулевого приближения к $\psi(z)$ возьмем функцию $\psi(z) \approx \psi^{(0)}(z) := (\eta^2 - \eta_n^2) \tilde{U}_n$. Согласно (9),

$$U_a^{(0)}(h_1) = A_1^{(0)} = g_1^{(0)} / (C_{1,n} + C_2),$$

где

$$\begin{aligned} g_1^{(0)} &= -\gamma_{1,n}^{-1} \int_0^{h_1} \psi^{(0)}(\zeta) q_{2,1n}(\zeta) d\zeta = \\ &= -\gamma_{1,n}^{-1} (\eta_1^2 - \eta_{1,n}^2) \int_0^{h_1} \tilde{U}_n(\zeta) q_{2,1,n}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (18)$$

Индексы 1 и 2 у η и γ указывают на номер пласта двухслойной модели среды.

Подставим (17) в (18) и вычислим интегралы, тогда получим

$$g_1^{(0)} := U_0 Q_{1,2} + U_n(h_1) Q_{2,2},$$

где

$$\begin{aligned} Q_{1,2}(\eta_1, \eta_{1,n}, h_1) &:= \\ &= -\gamma_1^{-1} (\eta_1^2 - \eta_{1,n}^2) 2^{-1} \int_0^{h_1} q_{1,1}(\zeta) q_{2,1,n}(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Q_{2,2}(\eta_1, \eta_{1,n}, h_1) &:= -\gamma_1^{-1} 2^{-1} (\eta_1^2 - \eta_{1,n}^2) \times \\ &\times \int_0^{h_1} q_{2,1}(\zeta) q_{2,1,n}(\zeta) d\zeta = C_{1,n} - C_1. \end{aligned} \quad (19_2)$$

Таким образом, уточненное полное поле при $z = h_1$ после первого шага равно

$$U^{(0)}(h_1) = U_n(h_1) + A_1^{(0)},$$

$$A_1^{(0)} = [U_0 Q_{1,2} + U_n(h_1) Q_{2,2}] / (C_{1,n} + C_2).$$

3). Следующее решение задачи из пункта 1) принимает вид

$$\begin{aligned} U^{(1)}(z) &= U_0 q_{1,1}(z) + (U_n(h_1) + A_1^{(0)}) q_{2,1}(z) = \\ &= \tilde{U}_n(z) + A_1^{(0)} q_{2,1}(z). \end{aligned}$$

4). Уточненное решение задачи из пункта 2) дают формулы

$$\psi^{(1)}(z) := (\eta^2 - \eta_n^2) [\tilde{U}_n(z) + A_1^{(0)} q_{2,1}(z)],$$

$$U_a^{(1)}(h_1) = A_1^{(1)} = g_1^{(1)} / (C_{1,n} + C_2),$$

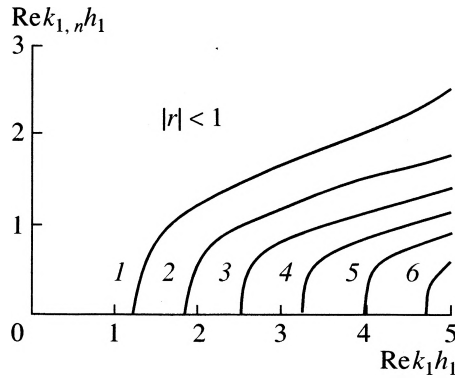


Рис. 3. Карта изолиний функции $|r|$ при $k_2 = 0$.

$$g_1^{(1)} := -\gamma_{1,n}^{-1}(\eta^2 - \eta_n^2) \times$$

$$\times \int_0^{h_1} [\tilde{U}_n(\zeta) + A_1^{(0)} q_{2,1}] q_{2,1,n}(\zeta) d\zeta = \quad (20)$$

$$= g_1^{(0)} + A_1^{(0)} Q_{2,2}, \quad A_1^{(1)} := A_1^{(0)}(1+r);$$

$$r := Q_{2,2}/(C_{1,n} + C_2) = (C_{1,n} - C_1)/(C_{1,n} + C_2).$$

После первых N итераций получим

$$A_1^{(N)} = A_1^{(0)} \sum_{m=0}^N r^m = A_1^{(0)} (1 - r^{N+1}) / (1 - r).$$

Таким образом, итерационный процесс будет сходиться, если $|r| < 1$. В этом случае величина аномального поля на нижней границе пласта равна

$$A_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} A_1^{(N)} = A_1^{(0)} \frac{1}{1-r} = \frac{g_1^{(0)}}{(C_1 + C_2)} \frac{1}{1-r} =$$

$$= \frac{U_0 Q_{1,2} + U_n(h_1) Q_{2,2}}{(C_1 + C_2)} \frac{1}{1-r}.$$

Итак, на нижней границе верхнего слоя получаем

$$U(h_1) = U_n(h_1) + A_1 = U_n(h_1) +$$

$$+ \left[U_0 \frac{Q_{1,2}}{Q_{2,2}} + U_n(h_1) \right] \frac{r}{1-r} = \quad (21)$$

$$= \left[U_0 \frac{Q_{1,2}}{Q_{2,2}} r + U_n(h_1) \right] \frac{1}{1-r}.$$

Отметим, что точное решение рассматриваемой задачи для двухслойной среды с параметрами $\eta_1 = k_1$ и $\eta_2 = k_2$ при $z = h_1$ дает формула (12), в которой нужно принять $g_1 = 0$. Подстановкой в правую часть (21) формул (19) и (20) можно показать, что формула (21) дает точное решение задачи, совпадающее с (12), если только $|r| < 1$. Линии уровня функции $|r|$ приведены на рис. 3. По осям координат этого рисунка отложены величины

$Re k_\alpha h_1$, $\alpha = 1, 1n$. Наихудшие условия сходимости будут при $k_1 h_1 \rightarrow \infty$ и $k_{1n} h_1 \rightarrow \infty$. Этот предельный случай не представляет большого практического интереса. Обсуждаемый здесь алгоритм решения задач имеет смысл использовать лишь тогда, когда мощность первого слоя соизмерима или превосходит величину скин-слоя, т.е. при $Re k_1 h_1 < 1$, $Re k_{1n} h_1 < 1$. В этом практически важном диапазоне изменений свойств модели среды и частот, согласно рис. 3, итерационный алгоритм Шварца сходится. Сходимость тем лучше, чем меньше отличаются свойства неоднородного слоя от свойств нормального разреза.

При произвольном изменении свойств верхнего слоя представляет интерес аппроксимация неоднородного слоя конечным количеством слоев с кусочно-постоянными свойствами. Для такой модели можно получить аналитическое решение задачи для аппроксимирующего разреза и оценить условия сходимости итерационного процесса.

Можно надеяться на то, что полученные оценки условий сходимости метода Шварца для слоистой среды будут оценками сверху для моделей большей размерности, представляющие собой локальные неоднородности в горизонтально-слоистой среде. Соответствующие априорные оценки можно сделать по приведенным выше формулам.

Следует все же отметить, что существуют модели, для которых процесс Шварца может расходиться.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Приведем алгоритм решения двумерной задачи в декартовой системе координат. Он без труда может быть обобщен на 2D и 3D задачи в других системах координат.

Простейшим примером вмещающей среды является слоистая среда. Этот частный случай фоновой модели принято называть *нормальным* разрезом, а поля – *нормальными* полями.

Пусть нам нужно решить на плоскости двумерную задачу. Нужно найти функцию $u(y, z)$, которая

1) удовлетворяет дифференциальному уравнению эллиптического типа

$$\operatorname{div}(\gamma^{-1} \operatorname{grad} u) - k^2 \gamma^{-1} u = f, \quad (22)$$

2) удовлетворяет условиям сопряжения и надлежащим условиям на бесконечности, обеспечивающим единственность решения задачи в неограниченной области.

Правая часть уравнения (22) $f(y, z)$ – заданная функция, описывающая распределение источников поля.

Эту же задачу рассмотрим для нормальной (фоновой) модели среды с параметрами $\eta_n(z)$, $k_n^2(z)$ и теми же источниками поля. Уравнение (22) примет вид

$$\operatorname{div}(\gamma_n^{-1} \operatorname{grad} u^n) - k_n^2 \gamma_n^{-1} u^n = f. \quad (23)$$

Обозначим

$$(k^2 \gamma^{-1})_a := k^2 \gamma^{-1} - k_n^2 \gamma_n^{-1}, \quad \gamma_a^{-1} := \gamma^{-1} - \gamma_n^{-1}, \\ k_a^2 := k^2 - k_n^2, \quad u^a(y, z) := u(y, z) - u^n(y, z).$$

Вычитая из (22) уравнение (23), после преобразований получим задачу относительно аномальных полей, включающую дифференциальное уравнение, условие на бесконечности и условия сопряжения на границах разрыва свойств среды

$$\begin{cases} u_{yy}^a(y, z) + u_{zz}^a(y, z) - k_a^2 u^a = f_a, \\ f_a := P_a u, \quad P_a := \gamma_n [(k^2 \gamma^{-1})_a - \operatorname{div} \gamma_a^{-1} \operatorname{grad}], \\ u^a \rightarrow 0, \quad \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \\ [u^a] = 0, \quad [\gamma^{-1} \partial u^a / \partial n] = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Здесь $\partial u^a / \partial n$ – производная по нормали к границам разрыва свойств среды. Будем полагать, что $f_a(y, z)$ отлична от нуля в ограниченной односвязной области D . С точки зрения численного решения удобно погрузить эту область в прямоугольник. Будем сразу полагать, что область D имеет прямоугольную форму. Применяя к задаче (24) преобразование Фурье по координате y

$$\hat{u}^a(z, \alpha) := F(u^a(y, z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^a(y, z) e^{-i\alpha y} dy,$$

с учетом того, что $F(u_{yy}^a) = -\alpha^2 \hat{u}^a(z, \alpha)$ в области изображений придем к задаче вида (1)–(3).

Поэтому можно считать, что решение этой задачи известно.

При решении двумерных задач модифицированный алгоритм Шварца состоит в выполнении следующих шагов:

1. Положим $m = 0$ и $u^a = 0$, $u_0 = u^n$. Правая часть уравнения в (24) примет вид $f_a^{(0)} := P_a u_0$.

2. Найдем решение задачи (24) с этой правой частью и обозначим его u_1^a .

3. Построим краевое условие на границе ∂D области D : $u(y, z)|_{\partial D} \approx \phi_1 := u^n + u_1^a$.

4. Положим $m \leftarrow m + 1$. Найдем решение $u_{2m}(y, z)$ задачи Дирихле в области D

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma^{-1} \operatorname{grad} u_{2m}) - k^2 \gamma^{-1} u_{2m} = f, \\ u_{2m}(y, z)|_{\partial D} = u_{2m-1}(y, z)|_{\partial D} \equiv \phi_{2m-1}. \end{cases} \quad (25)$$

5. Найдем решение задачи (24) с правой частью $f_a^{(2m)} := P_a u_{2m}$ и обозначим его u_{2m+1}^a .

6. Если не выполняется некоторый критерий окончания расчетов, то перейти к пункту 4, иначе перейти к пункту 7.

7. Конец вычислений.

Пример. МТЗ. Е-поляризация. Пусть двумерная неоднородность содержится в горизонтально-однородной слоистой среде. Примем $\gamma_n = \mu_n = \mu_0 = \text{const}$. Тогда аномальное поле $u^a(y, z) \equiv E_x^a$ удовлетворяет уравнению

$$u_{yy}^a(y, z) + u_{zz}^a(y, z) - k_n^2 u^a = k_a^2(y, z)(E_x^n(z) + u^a(y, z)), \quad (26)$$

где $u^n(z) \equiv E_x^n(z)$ – нормальное электрическое поле. В каждом j -том пласте фонового разреза функция $\hat{u}^a(z, \alpha)$ должна удовлетворять следующим требованиям.

1. Являться решением обыкновенного дифференциального уравнения, формально совпадающего с (1),

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{u}^a(z, \alpha)}{dz^2} - \eta_j^2 \hat{u}^a(z, \alpha) &= \hat{f}(z, \alpha), \\ \eta_j &:= \sqrt{k_j^2(z) + \alpha^2}, \\ \hat{f}(z, \alpha) &:= F[k_a^2 u(y, z)] = \\ &= F[k_a^2 u^n(y, z)] + F[k_a^2 u^a(y, z)]. \end{aligned} \quad (27)$$

2. На границах пластов в области изображений обеспечивать выполнение условий сопряжения

$$[\hat{u}^a] = 0, \quad [\mu^{-1} d\hat{u}^a(z)/dz] = 0. \quad (28)$$

$$3. \hat{u}^a(z, \alpha) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Будем полагать, что двумерной неоднородности соответствует ограниченная область D на плоскости переменных (y, z) . Тогда правая часть $\hat{f}(z, \alpha)$ уравнения (27), благодаря множителю $k_a^2 := k^2 - k_n^2$, может быть отлична от нуля только в точках области D , а в области изображений – в точках проекции этой области на ось z . Приходим к задаче вида (1)–(3). Отличие состоит в том, что теперь в процессе итераций нужно многократно решать двумерную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца, в которой граничные условия полу-

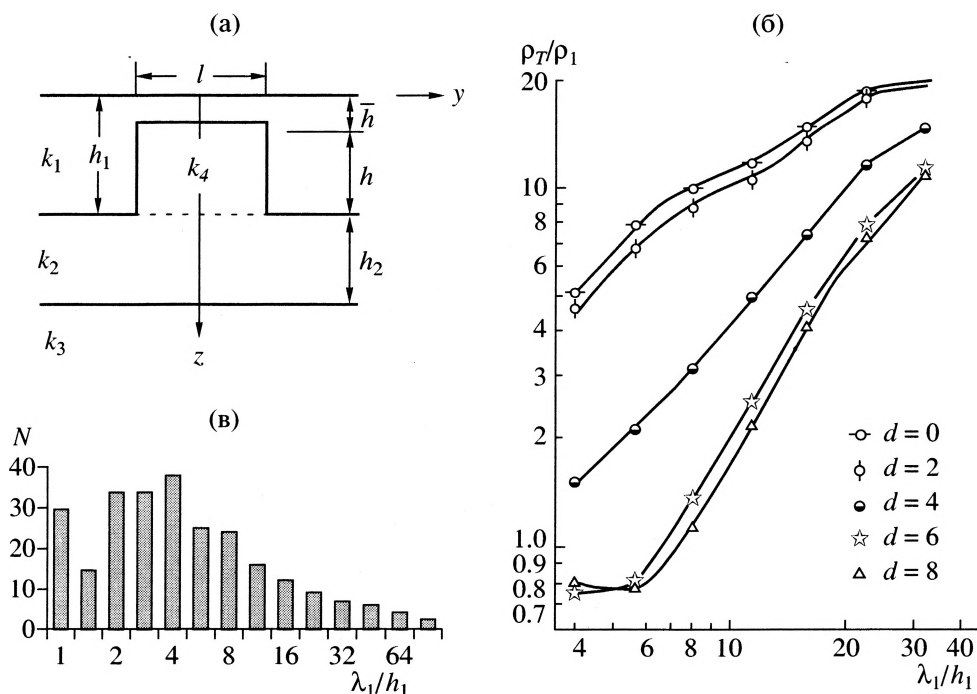


Рис. 4. (а) – модель горста; (б) – графики модуля кажущегося сопротивления $|\rho_T|/\rho_1$ в зависимости от относительной длины волны в первом слое нормального разреза λ_1/h_1 ; (в) – график зависимости количества итераций N от λ_1/h_1 .

чаем из решения одномерной задачи (27)–(29) в точках границы ∂D области D .

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Определение. Будем называть решение задачи произвольной размерности *квазианалитическим*, если оно конструируется из аналитических решений нескольких подзадач.

Найдем по алгоритму Шварца Е-поляризованное магнитотеллурическое поле для модели горста (рис. 4а) [Дмитриев, Кокотушкин, 1971]. Параметры нормального разреза: $h_1 = 1000$ м, $h_2 = 20000$ м, $\rho_1 = 1$ Ом · м, $\rho_2 = \rho_4 = \infty$, $\rho_3 = 0$ Ом · м. Параметры горста: $h = 800$ м, $l = 8000$ м, $k_4 = k_2 = 0$. Проводимость горста равна нулю, поэтому в прямоугольной двумерной области, соответствующей горсту, нужно решать первую краевую задачу для уравнения Лапласа. Ее аналитическое решение методом разделения переменных дано, например, в работе [Канторович, Крылов, 1962].

Квазианалитическое решение получим на основе алгоритма Шварца путем последовательного аналитического решения двух более простых задач:

- 1) неоднородной задачи вида (1)–(3) в горизонтально-слоистой среде, содержащей горст.
- 2) задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри горста.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ДЛЯ МОДЕЛИ ГОРСТА

Для решения обеих задач использовали программы быстрого комплексного преобразования Фурье (БПФ). В горизонтально-слоистой среде вычисления выполнялись на равномерной сетке 256×32 , в двумерной неоднородности (горсте) – на сетке 64×32 . Шаги сетки по горизонтали – 125 м, по вертикали – 25 м. Для пересчета электрических полей в магнитные также использовалось БПФ [Юдин, 1985].

На рис. 4б приведены результаты расчета кажущегося сопротивления для горста. По оси абсцисс отложены относительные длины волн $\lambda_1/h_1 := \sqrt{10^7 \rho_1 T/h_1}$ на периоде T . Сплошными линиями изображены графики, приведенные в альбоме [Дмитриев, Кокотушкин, 1971]. Различными символами изображено решение по модифицированному алгоритму Шварца. Шифр кривых $d = y/h_1$ соответствует различным относительным расстояниям от центра горста. На рис. 4в изображен график зависимости количества итераций по модифицированному алгоритму ГДАМ (N) от длины волн λ_1/h_1 .

Расчеты свидетельствуют о высокой скорости сходимости к решению и удовлетворительной точности вычислений. Последовательность вычислений, рассмотренная на примере горста, с очевидными изменениями обобщается на произ-

вольное конечное число вставок любой формы и произвольного местоположения в горизонтально-слоистой среде, если для каждой из них известны аналитические решения краевых задач.

ВЫВОДЫ

1. На одномерной модели исследована сходимость итерационного процесса, лежащего в основе модифицированного алгоритма ГДАМ. Полученные результаты могут рассматриваться в качестве достаточных условий сходимости метода Шварца для слоистой среды, содержащей локальные неоднородности.

2. Если в рамках ГДАМ используется численное решение внутренней краевой задачи в области D (рис. 1), то размеры этой области могут совпадать с размерами изучаемой локальной неоднородности (как в методе интегральных уравнений).

3. Обобщение алгоритма позволяет сконструировать решения класса весьма сложных двумерных и трехмерных задач для уравнений эллиптического и параболического типов в неограниченных областях путем итерационного “сшивания” аналитических или численных решений более простых подзадач. Алгоритм обеспечивает вычисление полей в произвольной точке плоскости или пространства.

5. Численные эксперименты дают основания надеяться на высокую скорость сходимости итерационного процесса Шварца, используемого для “сшивания” решений частных подзадач.

Работа выполнена при поддержке департамента электроразведки ЗАО “НПЦ Геонефтегаз”. Авторы выражают глубокую благодарность генеральному директору департамента Е.С. Киселеву за внимание к результатам исследований и полезное обсуждение результатов расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. МТ-зондирования горизонтально-однородных сред. М.: Недра. 1992. 250 с.

Ваньян Л.Л., Дебабов А.С., Юдин М.Н. Интерпретация магнитотеллурических зондирований неоднородных сред. М.: Недра. 1984. 197 с.

Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука. 1974. 542 с.

Дмитриев В.И., Кокотушкин Г.А. Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах. М.: МГУ. 1971. 67 с.

Жданов М.С., Варенцов И.М., Голубев Н.Г., Крылов В.А. Методы ЭМ моделирования (материалы международного проекта COMMEMI). М.: Наука. 1990. 198 с.

Завадский Ю.В. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука. 1972. 558 с.

Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., Л.: Физматгиз. 1962. 708 с.

Юдин М.Н. Применение альтернирующего метода Шварца для численного решения задач геоэлектрики. М.: Деп в ВИНТИ 12 марта 1982 № 1047-82 Деп.1982. 19 с.

Юдин М.Н. Математическое обеспечение численного решения прямых задач электромагнитных зондирований неоднородных сред. Дисс... докт. физ.-мат. наук. М.: МГРИ. 1985.

Юдин М.Н., Фарков Ю.А., Филатов Д.М. Введение в вейвлет-анализ. М.: МГТА. 2001. 72 с.

Юдин М.Н., Юдин В.М. Об одном алгоритме декомпозиции прямых задач геоэлектрики по методу Шварца. Геология и полезные ископаемые Западного Урала / Под ред. Ибламинова Р.Г. Пермь. 2002. С. 151–154.

Юдин М.Н., Калишенко Т.В., Юдин В.М. О применении вейвлет-преобразования и альтернирующего метода Шварца для решения некоторых задач геоэлектрики. V международная конференция “Новое в науках о земле”. Избранные доклады. М. 2002. С. 311–325.

Alexandrov M.A., Filatov D.M. Yudin's Technique of Alternating Decompositions in Mass Transportation Problem. Mexico: Cocoyoc, Morelos. January 7–11. 2002.

Filatov D.M., Alexandrov M.A., Yudin M.N. Alternating Decomposition Method and its applications to solving partial differential equations. 19th Biennial Conference on Numerical Analysis. England: University Of Dundee. 26–29 June. 2001.