



**Министерство высшего и среднего специального  
образования СССР**  
**Редколлегия журнала "Известия высших учебных заведений", раздел  
"Геология и разведка"**

**№ 6153-84 Деп.**

**УДК 550.837:518**

**М. Н. Юдин**  
**АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ  
ОСНОВНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОЭЛЕКТРИКИ**

**Москва, 1984**

## Оглавление

<b>1. Расчет неоднородных электромагнитных полей в горизонтально-однородной слоистой среде [1,5].</b> .....	2
<i>Решение задачи (1)-(2) при <math>\psi_i = 0</math></i> .....	2
<i>Решение задачи (1)-(2) при <math>\psi_i \neq 0</math></i> .....	5
<b>2. Расчет трехмерно-неоднородных полей в слоистой среде (<math>E_z = 0</math>)</b> .....	8
<b>3. Специфика расчета полей в присутствии проводящих S-пленок</b> .....	12
<b>4. Специфика расчета полей искусственных источников в горизонтально-однородной слоистой среде</b> .....	13
<b>5. Алгоритмы расчета двумерных электрических и магнитных полей для типичных моделей слоистой среды.</b> .....	15
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	21
Приложение №1. ГОЛОВНАЯ ПРОГРАММА РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МТЗ (MTSEN1).....	22
Приложение №2. И Н С Т Р У К Ц И Я П О Р А Б О Т Е С П Р О Г Р А М М О Й М T S E N 1 (РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ).....	33
Приложение № 3. ПРИМЕР ФАЙЛА MTSEN1.DAT С ДАННЫМИ.....	36
Приложение №4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ДЛЯ ТЕСТОВЫХ ДАННЫХ.....	37

**Министерство высшего и среднего специального  
образования СССР**  
**Редколлегия журнала "Известия высших учебных заведений",  
раздел "Геология и разведка"**

№ 6153-84 Деп.

УДК 550.837:518

**М. Н. Юдин**

**АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ  
ОСНОВНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОЭЛЕКТРИКИ**

**Москва, 1984**

Для расчета неоднородных двух- и трехмерных полей в горизонтально-однородной слоистой среде полезно выполнить одномерное  $F$  (двумерные поля) или двумерное  $F_2$  (трехмерные поля) преобразование Фурье по пространственным координатам, совпадающим с простираем пластов. Тогда в области Фурье-изображений нужно решить краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_i(z)}{dz^2} = \eta_i^2 u_i(z) + \psi_i(z), & (1) \\ [u] = 0; \left[ \frac{1}{\gamma} \frac{du}{dz} \right] = 0; \\ u|_{z=z_{m-1}} = A_m, \quad u|_{z=z_{n-1}} = A_n, \quad 1 \leq m < n \leq N. & (2a) \end{cases}$$

Мощность подстилающего пласта слоистого разреза может быть неограниченна ( $h_N = \infty$ ), поэтому краевое условие (2а) иногда потребуется заменить другим:

$$u_N(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2б)$$

В системе (1)  $\eta_i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + k_i^2}$ , где  $\alpha, \beta$  - пространственные частоты,  $k_i$  - волновое число  $i$ -го пласта.

**1. Расчет неоднородных электромагнитных полей в горизонтально-однородной слоистой среде [1,5].**

Решение задачи (1)-(2) при  $\psi_i = 0$

В каждом из однородных по свойствам пластов дифференциальное уравнение системы (1), как известно, имеет общее решение:

$$u_i(z) = B_i e^{-\eta_i z} + C_i e^{\eta_i z}, \quad \eta_i \neq 0,$$

где  $B_i, C_i$ -коэффициенты, не зависящие от  $z$ . Недостатком последнего соотношения, является присутствие в нем экспонент с положительной степенью, что может приводить к переполнениям АУ в процессе расчетов на ЭВМ.

Учитывая непрерывность полей на границах пластов с различными физическими свойствами, решение задачи (1) - (2) в пределах однородного пласта запишем в более удобном для расчетов виде:

$$u_i(z) = \begin{cases} A_i q_{1i}(\bar{z}) + A_{i+1} q_{2i}(\bar{z}), & i = \overline{1, N-1}, \\ A_N \exp(-\eta_N \bar{z}) & i = N, \end{cases} \quad (3)$$

$$q_{1i}(\bar{z}) = \begin{cases} sh[\eta_i(h_i - \bar{z})] / sh(\eta_i h_i), & \eta_i \neq 0, \\ 1 - \bar{z} / h_i & \eta_i = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$q_{2i}(\bar{z}) = \begin{cases} sh(\eta_i \bar{z}) / sh(\eta_i h_i), & \eta_i \neq 0, \\ \bar{z} / h_i & \eta_i = 0. \end{cases} \quad (5)$$

$A_i = u_i(z) = u_{i-1}(h_{i-1})$  - значение функции  $u_i(z)$  на границе раздела  $i$ -го и  $i-1$ -го пластов,  $h_i$  - мощности пластов, Формула (3) получена в предположении, что аппликата  $\bar{z}$  соответствует расстоянию от кровли того пласта, котором вычисляется поле (локальная координата).

Согласно (1) на границах пластов должна быть непрерывной функция  $\gamma^{-1} du / dz$ . Учет этого условия дает для вычисления значений  $A_i$  полей на границах пластов систему линейных алгебраических уравнений с матрицей трехдиагонального вида:

$$\begin{cases} A_{m+1}(C_m + C_{m+1}) + A_{m+2} b_{m+1} = -A_m b_m, \\ A_{i-1} b_{i-1} + A_i(C_{i-1} + C_i) + A_{i+1} b_i = 0, \quad i = \overline{m+1, n-2}, \\ A_{n-1} b_{n-2} + A_{n-1}(C_{n-1} + C_{n-2}) = -A_n b_n, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$b_i = q'_{1i}(h_i) / \gamma_i = -\eta_i / (\gamma_i sh(\eta_i h_i)), \quad (7)$$

$$C_i = q'_{2i}(h_i) / \gamma_i = -(\eta_i / \gamma_i) cth(\eta_i h_i). \quad (8)$$

Если в последнем уравнении системы  $n-1 = N$ , то для выполнения условия (2б) необходимо положить  $A_n b_{n-1} = 0$ .

Система (6) может быть решена методом прогонки. Для увеличения устойчивости расчетов целесообразно получить её аналитическое решение.

Рассмотрим частные случаи.

Двухслойная среда.

а) Краевые условия ( $m = 1$ )

$$u_1(0) = A_1; u_2(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty.$$

Система (6) сводится к одному уравнению:

$$A_2(C_1 + C_2) = -A_1b_1$$

откуда

$$A_2 = A_1 / (ch(\eta_1 h_1) + \eta_2 \gamma_1 sh(\eta_1 h_1) / \eta_1 \gamma_2),$$

так как

$$C_1 = \eta_1 cth(\eta_1 h_1) / \gamma_1; C_2 = \eta_2 / \gamma_2; b_1 = \eta_1 / (\gamma_1 sh(\eta_1 h_1)).$$

б) Краевые условия ( $m = 1, n = 3$ ):

$$u_1(0) = A_1; u_2(h_1 + h_2) = A_3.$$

Из системы (6) находим:

$$A_2(C_1 + C_2) = -A_1b_1 - A_3b_2,$$

поэтому

$$A_2 = -(A_1b_1 + A_3b_2) / (C_1 + C_2).$$

Трехслойная среда.

а) Краевые условия ( $m = 1$ ):

$$u_1(0) = A_1; u_3(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty.$$

Согласно (6) имеем:

$$\begin{cases} A_2(C_1 + C_2) + A_3b_2 = -A_1b_1, \\ A_2b_2 + A_3(C_3 + C_2) = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} A_2 &= -A_1b_1(C_3 + C_2) / [(C_1 + C_2)(C_3 + C_2) - b_2^2], \\ A_3 &= -A_1b_1b_2 / [(C_1 + C_2)(C_3 + C_2) - b_2^2]. \end{aligned}$$

б) Краевое условие ( $m = 1, n = 4$ ):

Система (6) принимает вид:

$$\begin{cases} A_2(C_1 + C_2) + A_3b_2 = -A_1b_1, \\ A_2b_2 + A_3(C_3 + C_2) = -A_4b_3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_2 &= [A_4b_2b_3 - A_1b_1(C_3 + C_2)] / [(C_1 + C_2)(C_3 + C_2) - b_2^2], \\ A_3 &= [A_1b_1b_2 - A_4b_3(C_1 + C_2)] / [(C_1 + C_2)(C_3 + C_2) - b_2^2]. \end{aligned}$$

N-слойная среда

б) Краевое условие

$$u|_{z=z_{m-1}} = A_m; u_N(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty.:$$

Коэффициенты  $A_j$  можно рассчитать по формуле

$$A_j = A_m \prod_{i=m}^{j-1} \varphi_i(h_i), \quad j = \overline{m+1, N}. \quad (10)$$

Если  $\bar{z}$  есть расстояние от кровли  $i$ -го пласта и  $\bar{z} \in [0, h_i]$ , то функция  $\varphi_i(\bar{z})$  имеет вид:

$$\varphi_j(\bar{z}) = \frac{e^{-\eta_i \bar{z}} + e^{-\eta_i(2h_i - \bar{z})}}{1 + e^{-\eta_i 2h_i}} \frac{\tau_{i,i+1} R_{j+1}^* + th[\eta_i(h_i - \bar{z})]}{\tau_{i,i+1} R_{j+1}^* + th \eta_i h_i}, \quad (10) \text{ где}$$

$$\tau_{i,i+1} = \gamma_{i+1} \eta_i / (\gamma_i \eta_{i+1}), \quad (11)$$

$$R_i^* = th[\eta_i h_i + arth(\tau_{i,i+1} R_{i+1}^*)], i = m+1, N-1 \quad (12)$$

$$R_N^* = 1.$$

б) Краевое условия общего вида

$$u|_{z=z_{m-1}} = A_m; u|_{z=z_{n-1}} = A_n, 1 \leq m < n \leq N.:$$

Коэффициенты  $\{A_j\}$ ,  $j = \overline{m+1, n-1}$  находятся из системы методом прогонки.

### Решение задачи (1)-(2) при $\psi_i \neq 0$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения может быть найдено методом вариации произвольных постоянных

$$u_i^*(z) = A_i(z) q_{1i}(z) + B_i(z) q_{2i}(z).$$

В соответствии с этим методом, как известно, приходим к системе

$$\begin{cases} A_i' q_{1i}' + B_i' q_{2i}' = \psi_i(\bar{z}), \\ A_i' q_{1i} + B_i' q_{2i} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Относительно производных неизвестных функций  $A_i(\bar{z})$ ,  $B_i(\bar{z})$ . Определитель этой системы не равен нулю, поэтому получаем в пределах  $i$ -того пласта

$$A'(z) = \eta_i^{-1} \psi_i(\bar{z}) sh(\eta_i \bar{z}),$$

$$B'(z)_i = \eta_i^{-1} \psi_i(\bar{z}) sh[\eta_i(h_i - \bar{z})]$$

или

$$A'(z) = \eta_i^{-1} \int_0^{\bar{z}} \psi_i(\zeta) sh(\eta_i \zeta) d\zeta,$$

$$B'(z) = \eta_i^{-1} \int_0^{\bar{z}} \psi_i(\zeta) sh[\eta_i(h_i - \zeta)] d\zeta.$$

Таким образом, частное решение  $u_i^*(z)$  в  $i$ -том пласте принимает вид:

$$\begin{aligned} u_i^*(\bar{z}) &= -\frac{q_{1i}(\bar{z})}{\eta_i} \int_0^{\bar{z}} \psi_i(\zeta) sh(\eta_i \zeta) d\zeta + \\ &+ \frac{q_{2i}(\bar{z})}{\eta_i} \int_0^{\bar{z}} \psi_i(\zeta) sh[\eta_i(h_i - \zeta)] d\zeta = \eta_i^{-1} \int_0^{\bar{z}} \psi_i(\zeta) sh[\eta_i(\bar{z} - \zeta)] d\zeta, \end{aligned}$$

а общее решение есть функция

$$u_i(\bar{z}) = A_i q_{1i}(\bar{z}) + B_i q_{2i}(\bar{z}) + u_i^*(\bar{z}). \quad (15)$$

Найдем выражения для  $u_i(z)$  в кровле ( $\bar{z} = 0$ ) и подошве ( $\bar{z} = h_i$ )  $i$ -го пласта:

$$u_i|_{\bar{z}=0} = A_i; \quad u_i|_{\bar{z}=h_i} = B_i + u_i^*(h_i).$$

Обозначим

$$A_{i+1} = B_i + u_i^*(h_i),$$

тогда  $B_i = A_{i+1} - u_i^*(h_i)$ . Следовательно,

$$u_i(\bar{z}) = A_i q_{1i}(\bar{z}) + A_{i+1} q_{2i}(\bar{z}) + \varphi_i(\bar{z}), \quad (16)$$

где

$$\varphi_i(\bar{z}) = u_i^*(\bar{z}) - u_i^*(h_i) q_{2i}(\bar{z}).$$

Очевидно, что  $\varphi_i(0) = \varphi_i(h_i) = 0$ , поэтому система уравнений для вычисления коэффициентов  $A_i$ , равных значениям функции  $u(z)$  на границах пластов, сводится к решению системы уравнений с матрицей трехдиагонального вида. Система получается из выполнения требования непрерывности функции  $\gamma^{-1} du/dz$  на границах раздела пластов:

$$\gamma_{i-1}^{-1} du_{i-1}/dz|_{\bar{z}=h_{i-1}} = \gamma_i^{-1} du_i/dz|_{\bar{z}=0}.$$

Вычислим производные в кровле ( $\bar{z} = 0$ ) и подошве ( $\bar{z} = h_i$ )  $i$ -го пласта а:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_i} \frac{du_i}{dz} \Big|_{\bar{z}=0} &= (A_i C_i + A_{i+1} b_i) + \varphi_i'(0) \frac{1}{\gamma_i}, \\ \frac{1}{\gamma_i} \frac{du_i}{dz} \Big|_{\bar{z}=h_i} &= (A_i b_i + A_{i+1} C_i) + \varphi_i'(h_i) \frac{1}{\gamma_i}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i'(0) \frac{1}{\gamma_i} &= u_i^*(h_i) b_i; \\ \varphi_i'(h_i) \frac{1}{\gamma_i} &= \frac{1}{\gamma_i} (u_i^*)'(h_i) - u_i^*(h_i) C_i. \end{aligned}$$

Производная  $du_i^*/dz$  равна

$$\frac{du_i^*(\bar{z})}{d\bar{z}} = \int_0^{\bar{z}} \psi_i(\zeta) ch[\eta_i(\bar{z} - \zeta)] d\zeta, \quad (17)$$

поэтому

$$\frac{du_i^*(\bar{z})}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = 0; \quad \frac{du_i^*(\bar{z})}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=h_i} = \int_0^{h_i} \psi_i(\zeta) ch[\eta_i(h_i - \zeta)] d\zeta.$$

С учетом последних соотношений получаем систему

$$\begin{cases} A_{m+1}(C_m + C_{m+1}) + A_{m+2}b_{m+1} = -A_m b_m + f_{m+1}, \\ A_{i-1}b_{i-1} + A_i(C_{i-1} + C_i) + A_{i+1}b_i = f_i, \quad i = \overline{m+1, n-2}, \\ A_{n-1}b_{n-2} + A_{n-1}(C_{n-1} + C_{n-2}) = -A_n b_n + f_{n-1}, \end{cases} \quad (18)$$

аналогичную системе (6).

Здесь

$$f_i = u_i^*(h_i)b_i + u_{i-1}^*(h_{i-1})C_{i-1} - (u_{i-1}^*)'(h_{i-1})\gamma_{i-1}^{-1}.$$

Коэффициенты  $A_i$  системы (18) вычисляются по алгоритму прогонки.

При вычислении интегралов (15), (17) целесообразно использовать экспоненциальную интерполяцию функции  $\psi_i(\bar{z})$ . Рассмотрим расчет интегралов в  $i$ -том пласте слоистого разреза. Интервал интегрирования  $[0, z)$  разобьем на  $M$  частичных интервалов точками  $\zeta_j, j = \overline{1, M+1}$ .

Обозначим

$$\psi_{ij} = \psi_i(\zeta_j), \quad d_j = \zeta_{j+1} - \zeta_j,$$

тогда на  $j$ -том частичном интервале интерполирующая функция примет вид:

$$\tilde{\psi}_i(z) = \psi_{ij}q_{1ij}(z) + \psi_{i,j+1}q_{2ij}(z),$$

причем

$$q_{1ij}(\bar{z}) = sh[\eta_i(d_j - \bar{z})] / sh(\eta_i d_j),$$

$$q_{2ij}(\bar{z}) = sh(\eta_i \bar{z}) / sh(\eta_i d_j).$$

После интегрирования по каждому частичному промежутку и после дующего суммирования, для вычисления интеграла

$$G_i(\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \psi_i(\zeta) sh[\eta_i(\bar{z} - \zeta)] d\zeta$$

получим квадратуру:

$$G_i(\bar{z}) \cong \sum_{j=1}^M (\psi_{ij}r_j + \psi_{i,j+1}t_{j+1}), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} r_j &= \frac{1}{2\eta_i} ch[\eta_i(z - 2\zeta_j)] - \frac{d_j}{2sh(\eta_i d_j)} ch[\eta_i(d_j - z)]; \\ t_{j+1} &= \frac{d_j ch(\eta_i d_j)}{2sh(\eta_i d_j)} - \frac{1}{2\eta_i} ch[\eta_i(z - 2\zeta_j - d_j)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично для интеграла (17) найдем:

$$\frac{du^*(z)}{dz} \cong \sum_{j=1}^M (\psi_{ij}r'_j + \psi_{i,j+1}t'_{j+1}), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
 r'_j &= \frac{1}{2\eta_i} \operatorname{sh}[\eta_i(z - 2\zeta_j)] + \frac{d_j}{2\operatorname{sh}(\eta_i d_j)} \operatorname{sh}[\eta_i(d_j - z)]; \\
 t'_{j+1} &= \frac{d_j \operatorname{sh}(\eta_i d_j)}{2\operatorname{sh}(\eta_i d_j)} - \frac{1}{2\eta_i} \operatorname{sh}[\eta_i(z - 2\zeta_j - d_j)].
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Приведенные соотношения позволяют выполнять расчет полей  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ , или их спектральных плотностей в произвольной точке нижнего полупространства без вычисления экспонент с положительными показателями степени. Если предполагается расчет полей в большом числе узлов по оси  $z$ , то целесообразно сначала рассчитать коэффициенты, соответствующие значениям поля на границах раздела сред с различными физическими свойствами, а затем производить вычисления по формуле (3). На основе (3) легко рассчитать производные по оси  $z$ .

Рассмотрим частные случаи полученных соотношений.

Одномерный случай. При  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\eta_i = k_i$ ,  $\varphi_i = 0$  формулы пригодны для расчета магнитотеллурического поля в произвольной точке нижнего полупространства (земле). При расчете электрических полей величина  $\gamma$  соответствует магнитной проницаемости  $\mu$ , а при вычислении магнитных полей - проводимости пластов  $\sigma$ .

Двумерный случай. Если двумерная краевая задача геоэлектрики для слоистого полупространства решается посредством применения преобразования Фурье по координате, совпадающей с направлением границ пластов, то снова приходим к задаче (1)-(2), в которой следует положить  $\beta = 0$ . Величина  $\gamma$  имеет тот же смысл, что и в одномерной задаче (случай 1).

Трехмерный случай. Если вертикальная составляющая напряженности электрического поля  $E_z$  равна нулю, то формулы позволяют рассчитать спектральные плотности (Фурье-спектры) компонент  $e_x(\alpha, \beta, z)$  и  $e_y(\alpha, \beta, z)$  в произвольной точке горизонтально-однородного слоистого полупространства, когда задано краевое условие на границе раздела одного из пластов.

В процессе численного решения задач геоэлектрики на основе альтернирующего метода Шварца возникает необходимость расчета аномальных полей в слоистом полупространстве, расположенном над двух- или трехмерной неоднородностью. Полученные соотношения позволяют решать и эту задачу с очевидными изменениями индексов в расчетных формулах (3) - (22).

В некоторых простейших случаях удается решение двух- и трехмерных задач применительно к горизонтально-однородной среде выразить через элементарные и специальные функции или ряды.

## 2. Расчет трехмерно-неоднородных полей в слоистой среде ( $E_z = 0$ )

Пусть требуется рассчитать трехмерно-неоднородные аномальные электромагнитные поля в полупространстве

$$\Omega_1^n = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x \in R, y \in R, z > z_n\},$$

заполненном горизонтально-однородной слоистой средой, по заданным при  $z = z_m$  граничным значениям поля  $\mathbf{E}^a(x, y, z)$

$$\mathbf{E}^a(x, y, z) \Big|_{z=z_m} = \vec{\Phi}_1(x, y). \quad (23)$$

Границы пластов (слоев) соответствуют плоскостям  $z = z_j$ ,  $j = \overline{m, N}$ . В интервалах ( $z_j = z_{j+1}$ ) значения  $\mu$  и  $k$  постоянны и равны  $\mu_j, k_j$ . Источники поля в области  $z > z_m$  отсутствуют.

Представляет интерес также рассмотреть краевую задачу для пачки пластов в области

$$\Omega_1^n = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x \in R, y \in R, z_m < z < z_n\} \quad (24)$$

с краевыми условиями вида (23) при  $z = z_n$

$$\mathbf{E}^a \Big|_{z=z_n} = \vec{\Phi}_2(x, y). \quad (25)$$

Аппликата  $z_n$  соответствует подошве пласта с номером "n".

Для решения задачи будем использовать вектор-потенциал, связанный с полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  равенствами [5]:

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}, \quad (26)$$

$$\mathbf{E} = i\omega \left[ \mathbf{A} - \text{grad} \left( \mu k^{-2} \text{div} (\mathbf{A} \mu^{-1}) \right) \right]$$

В  $j$ -том пласте формула (26) принимает вид:

$$\mathbf{E}_j = i\omega \left( \mathbf{A}_j - k_j^{-2} \text{grad} \text{div} \mathbf{A}_j \right) \quad (27)$$

Итак, нужно решить задачу:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = k^2 \mathbf{A} \quad (28)$$

с условиями сопряжения на границах пластов [5]:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_\tau] &= 0, \quad [\mu^{-1} \partial \mathbf{A}_\tau / \partial z] = 0, \quad \tau = x, y, \\ [k^{-2} \text{div} \mathbf{A}] &= 0, \quad [\mu^{-1} \mathbf{A}_z] = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

и граничными значениями

$$i\omega \left( \mathbf{A}_m - k_m^{-2} \text{grad} \text{div} \mathbf{A}_m \right) \Big|_{z=z_m} = \Phi_1(x, y). \quad (30)$$

Кроме того, для единственности решения задачи нужно потребовать выполнения условия на бесконечности или удовлетворения краевому условию (24):

$$i\omega \left( \mathbf{A}_n - k_n^{-2} \text{grad} \text{div} \mathbf{A}_n \right) \Big|_{z=z_n} = \Phi_2(x, y). \quad (31)$$

при отыскании решения в области  $\Omega_2^n$ .

Нас интересует расчет аномальных полей в слоистой среде, индуцированных локальной трехмерной неоднородностью, поэтому на больших удалениях от трехмерного

тела их можно аппроксимировать полем диполя, эквивалентного аномалиеобразующему объекту. Как известно электромагнитное поле на достаточно больших расстояниях  $r$  от источника затухают не медленнее, чем  $O(r^{-3})$ , а составляющие вектор-потенциала –  $O(r^{-2})$ . Поэтому для решения задачи (28) – (31) можно применить двумерное преобразование Фурье  $F$  по переменным  $x$  и  $y$  в направлениях, совпадающих с простиранием пластов. В спектральной области для вектор-потенциала получим задачу:

$$\frac{d^2 \mathbf{a}}{dz^2} = \eta^2 \mathbf{a}, \quad (32)$$

$$[\mathbf{a}_\tau] = 0, \left[ \mu^{-1} d\mathbf{a}_\tau / dz \right] = 0, \left[ \mu^{-1} \mathbf{a}_z \right] = 0, \quad (33)$$

$$\left[ \mu k^{-2} \left( i\alpha a_x + i\beta a_y + \frac{da_z}{dz} \right) \right] = 0, \quad (34)$$

$$\begin{cases} i\omega \left( a_{xm} - k_m^{-2} i\alpha \left( i\alpha a_{xm} + i\beta a_{ym} + \frac{da_{zm}}{dz} \right) \right) \Big|_{z=z_m} = \varphi_{x_1}(\alpha, \beta), \\ i\omega \left( a_{ym} - k_m^{-2} i\beta \left( i\alpha a_{xm} + i\beta a_{ym} + \frac{da_{zm}}{dz} \right) \right) \Big|_{z=z_m} = \varphi_{y_1}(\alpha, \beta), \\ i\omega \left( a_{zm} - k_m^{-2} \left( i\alpha \frac{da_{xm}}{dz} a_{xm} + i\beta \frac{da_{ym}}{dz} a_{ym} + \eta^2 a_{zm} \right) \right) \Big|_{z=z_m} = \varphi_{z_1}(\alpha, \beta). \end{cases} \quad (35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j &= F(\mathbf{A}_j), \quad \mathbf{h}_j = F(\mathbf{H}_j), \quad \mathbf{e}_j = F(\mathbf{E}_j), \\ \bar{\varphi}_j &= F(\Phi_j), \\ g(\alpha, \beta) &= F_2[G(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy, \\ i\alpha \cdot g &= F_2(\partial G / dx), \quad i\beta \cdot g = F_2(\partial G / dy), \\ \eta^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + k^2. \end{aligned}$$

При решении задачи в  $\Omega_1^n$  нужно потребовать, чтобы

$$\mathbf{a} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty,$$

а в области  $\Omega_2^n$  - выполнение краевых условий вида (35), в котором индекс  $m$  заменить на  $n$ .

Краевые условия (23) можно разрешить относительно составляющих вектора  $\mathbf{a}_m$ . Если это проделать, то получим уравнения, решаемые методом итераций совместно с системами (6) и (38):

$$\begin{cases} a_{xm}^{(l)} = i\omega \left( e_{xm} (\beta^2 + k_m^2) - \alpha\beta e_{ym} - \alpha\omega \frac{da_{zm}^{(l-1)}}{dz} \right) / i\omega\eta_m^2, \\ a_{ym}^{(l)} = i\omega \left( e_{ym} (\alpha^2 + k_m^2) - \alpha\beta e_{xm} - \beta\omega \frac{da_{zm}^{(l)}}{dz} \right) / i\omega\eta_m^2, \\ a_{zm}^{(l)} = \begin{cases} \mu\sigma_m e_{zm} - i\alpha da_{xm}^{(l)} / dz - i\beta da_{ym}^{(l)} / dz / (\alpha^2 + \beta^2), \\ 0, (\alpha = 0) \wedge (\beta = 0), \end{cases} \end{cases} \quad (36)$$

где  $l$  – номер итерации.

Общим решением уравнения (32) в  $j$ -том пласте является функция:

$$\mathbf{a}_j(z) = \mathbf{B}_j q_{1j}(\bar{z}) + \mathbf{B}_{j+1} q_{2j}(\bar{z}), \quad (37)$$

где  $\bar{z} \in [0, h_j]$ ,  $\mathbf{B}_j = (B_{xj}, B_{yj}, B_{zj})$ .

Сначала задача (32)-(35) решается относительно составляющих  $a_x, a_y$ . Коэффициенты  $B_{xj}, B_{yj}$ ,  $j = \overline{m+1, n-1}$  ( $n \leq N+1$ ), равные значениям  $a_x, a_y$  на границах раздела пластов, могут быть вычислены по формуле (9) или в результате решения системы вида (6) прогонкой.

После чего находятся значения  $B_{zj}$  из системы

$$\begin{cases} \mu_1^{-1} (\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2) B_{z2} + \mu_2^{-1} \widehat{b}_2 B_{z3} = -\mu_1^{-1} \widehat{b}_1 a_z(z_m), \\ \mu_{j-1}^{-1} \widehat{b}_{j-1} B_{zj-1} + \mu_{j-1}^{-1} (\widehat{C}_{j-1} + \widehat{C}_j) B_{zj} + \mu_j^{-1} \widehat{b}_j B_{zj+1} = \widehat{f}_j, \\ \mu_{N-1}^{-1} \widehat{b}_{N-1} B_{zN-1} + \mu_{N-1}^{-1} (\widehat{C}_{N-1} + \widehat{C}_N) B_{zn} = -\mu_N^{-1} \widehat{b}_N a_z(z_n), \end{cases} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{f}_j &= (\rho_j \mu_j^{-1} - \rho_{j-1} \mu_{j-1}^{-1}) (i\alpha B_{xj} + i\beta B_{yj}), \\ \widehat{b}_j &= \rho_j q'_{1j}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}=h_j}; \\ \widehat{C}_j &= \rho_j q'_{2j}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}=h_j}. \end{aligned}$$

Здесь  $B_{zj} = a_{zj-1}(h_{j-1} - 0)$ , что соответствует значению составляющей  $a_{zj-1}(\bar{z})$  на верхней части границы слоев.

Значение на ее поверхности равно:

$$a_{zj}(+0) = \bar{B}_{zj} = \mu_j B_{zj} / \mu_{j-1}.$$

В соответствии с формулой (37)

$$\begin{aligned} a_{zj-1}(\bar{z}) &= B_{zj-1} q_{1j-1}(\bar{z}) + B_{zj} q_{2j-1}(\bar{z}), \\ a_{zj}(\bar{z}) &= \bar{B}_{zj} q_{1j}(\bar{z}) + B_{zj+1} q_{2j}(\bar{z}). \end{aligned}$$

Если магнитная проницаемость контактирующих пластов одинакова, то составляющая  $a_z(\bar{z})$  при переходе через их границу непрерывна. В этом случае  $\bar{B}_{zj} = B_{zj}$ .

### 3. Специфика расчета полей в присутствии проводящих S-пленок.

Пусть на границе  $j$ -того и  $j+1$ -го пластов слоистого разреза имеется проводящая пленка постоянной проводимости  $S$ . На ней тангенциальные составляющие электрического поля непрерывны

$$E_{\tau j} \Big|_{z=h_j} = E_{\tau j+1} \Big|_{z=0}, \quad \tau = x, y, \quad (39)$$

А касательные составляющие магнитного поля терпят разрыв

$$H_{xj} \Big|_{z=h_j} - H_{xj+1} \Big|_{z=0} = S \cdot E_y; \quad H_{yj} \Big|_{z=h_j} - H_{yj+1} \Big|_{z=0} = -S \cdot E_x. \quad (40)$$

Переходя к вектор-потенциалу, получают условия сопряжения

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_\tau] &= 0, \quad [k^{-2} \operatorname{div} \mathbf{A}] = 0, \\ \frac{1}{\mu_{j+1}} \frac{dA_{\tau j+1}}{dz} \Big|_{\bar{z}=0} - \frac{1}{\mu_j} \frac{dA_{\tau j}}{dz} \Big|_{\bar{z}=h_j} &= i\omega S A_{\tau j}, \\ \frac{1}{\mu_{j+1}} A_{zj+1} \Big|_{\bar{z}=0} - \frac{1}{\mu_j} \frac{dA_{\tau j}}{dz} \Big|_{\bar{z}=h_j} &= -\frac{S}{\mu_{j+1} \sigma_{j+1}} \operatorname{div} \mathbf{A}_2 \Big|_{\bar{z}=0} = -\frac{S}{\mu_j \sigma_j} \operatorname{div} \mathbf{A}_1 \Big|_{\bar{z}=h_j}. \end{aligned} \quad (41)$$

Выполнение условий (41) достаточно для обеспечения равенства (39), (40).

Применим преобразование Фурье  $F_2$  и будем по-прежнему считать, что поведение тангенциальных компонент  $a_{\tau j}$  в  $j$ -том пласте описывает функция

$$a_{\tau j}(z) = B_{\tau j} q_{1j}(\bar{z}) + B_{\tau j+1} q_{2j}(\bar{z}). \quad (42)$$

С учетом условий сопряжения (41) нетрудно получить уравнение относительно коэффициентов  $B_{\tau j}$

$$B_{\alpha j} b_j + B_{\alpha j+1} (C_j + C_{j+1} + i\omega S) + B_{\alpha j+2} b_{j+1} = 0, \quad (43)$$

отличающееся от соответствующего уравнения системы (6) слагаемым  $i\omega S$  в круглой скобке.

Для компоненты  $n$ ., аналог уравнения (6) имеет вид

$$\begin{aligned} B_{zj} \hat{b}_j \mu_j^{-1} (1 - S \hat{C}_{j+1}) + B_{zj+1} (\hat{C}_j + \hat{C}_{j+1} (1 - S \hat{C}_j)) + \\ B_{zj+2} \hat{b}_{j+1} \mu_{j+1}^{-1} (1 - S \hat{C}_{j+1}) = [\mu_{j+1}^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} - \mu_j^{-1} \sigma_j^{-1} (1 - S \hat{C}_{j+1})] (i\alpha a_x + i\beta a_y). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $B_{z_{j+1}} = a_{z_j}(h_j - 0)$ . Значение  $a_{z_{j+1}}(+0)$  в кровле  $(j+1)$ -го пласта (на нижней стороне S-пленки) в согласии с (41) равно:

$$\bar{B}_{z_{j+1}} = a_{z_{j+1}}(+0) = \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} \left[ (1 - S\hat{C}_{j+1}) B_{z_{j+1}} \right] - S\hat{b}_j B_{z_j} - \frac{S}{\sigma_j} (i\alpha a_x + i\beta a_y). \quad (45)$$

Поле в  $j$ -том пласте рассчитывается по формуле

$$a_{z_j}(\bar{z}) = B_{z_j} q_{1j}(\bar{z}) + B_{z_{j+1}} q_{2j}(\bar{z}), \quad (46)$$

а в  $(j+1)$ -м описывается функцией

$$a_{z_{j+1}}(\bar{z}) = \bar{B}_{z_{j+1}} q_{1j+1}(\bar{z}) + B_{z_{j+2}} q_{2j+1}(\bar{z}). \quad (46)$$

Если  $S = 0$ , то  $\bar{B}_{z_{j+1}} = B_{z_{j+1}}$ . При этом формула (44) переходит в уравнение, не учитывающее присутствия пленки.

После вычисления коэффициентов  $B_{z_j}$  получаем возможность рассчитать спектры вектор-потенциала и производные по переменной  $z$  для произвольной аппликации в любом пласте геоэлектрического разреза по формуле (37). Это позволяет найти также векторы  $\mathbf{E}^a$  и  $\mathbf{H}^a$  в произвольной точке областей  $\Omega_1''$  или  $\Omega_2''$ , используя спектральные аналоги соотношений (25), (26) и обратное преобразование Фурье  $F_2^{-1}$ :

$$\mathbf{E}^a = F_2^{-1}[\mathbf{e}(\alpha, \beta, z)]; \quad \mathbf{H}^a = F_2^{-1}[\mathbf{h}(\alpha, \beta, z)]. \quad (47)$$

#### 4. Специфика расчета полей искусственных источников в горизонтально-однородной слоистой среде

Электрический диполь. Пусть электрический диполь расположен в воздухе на высоте  $h_0$  и ось его ориентирована по оси  $OX$ . В этом случае электрическое  $\mathbf{E}$  и магнитное  $\mathbf{H}$  поля могут быть выражены через составляющие  $A_x$  и  $A_z$  вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= i\omega(\mathbf{A} - k^{-2} \text{grad div} \mathbf{A}), \end{aligned} \quad (48)$$

На границах пластов должны выполняться условия сопряжения [5]

$$[A_x] = 0, \quad \left[ \frac{1}{\mu} \frac{dA_x}{dz} \right] = 0, \quad (49)$$

$$\left[ \frac{1}{\mu} A_z \right] = 0, \quad \left[ \frac{\mu}{k^2} \text{div} \mathbf{A} \right] = 0. \quad (50)$$

Применяя к дифференциальным уравнениям и условиям сопряжения (49,50) преобразование Фурье-Бесселя и учитывая результаты, полученные в работах [2,5], для спектральной плотности  $a_x(z)$  компоненты  $A_x$  получают задачу вида (1), (2). Следовательно, нетрудно построить систему типа (6) относительно коэффициентов  $a_j(z)$  ( $j = \overline{2, N}$ ), значения которых равны величинам спектральной плотности  $a_x$  на границах пластов:

$$\begin{cases} a_2(c_2 + c_1) + a_3 b_2 = -a_1 b_1 \\ a_{j-1} b_{j-1} + a_j(c_j + c_{j-1}) + a_{j+1} b_j = 0, \quad j = \overline{3, N}, \\ a_{N+1} = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Согласно [2],

$$a_1 = \left\{ \frac{m}{n_0} + \left[ \left( m - \frac{mn_0}{n_0 R^*} \right) / \left( n_0 + \frac{\mu_0 n_1}{\mu_1 R^*} \right) \right] \right\} e^{-n_0 h_0}. \quad (52)$$

где  $n_i = \sqrt{m^2 + k_i^2}$ ,  $i = 0, N$   $n_i = \sqrt{m^2 + k_i^2}$ ,  $i = 0, N$ ,

$m$  - пространственная частота.

Если  $k_0 = 0$ , то  $n_0 = m$ . и  $a_1 = 2m/(m + n_1/R^*) \exp(-n_0 h_0)$ . В формулах (7,8) следует положить  $\gamma_j = \mu_j$ ,  $n_j = \eta_j$ . Вычислив коэффициенты  $\{a_j\}$  для компоненты  $A_x$  в  $j$ -том пласте, получим [2]:

$$A_{xj}(r, z) = \frac{I \mu_0}{4\pi} \int_0^\infty [a_j q_{1j}(\bar{z}) + a_{j+1} q_{2j}(\bar{z})] J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (53)$$

где  $I$  - момент диполя;  $J_\nu(\cdot)$ -функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ ;  $r$  -разнос (расстояние от диполя до точки наблюдения) .

Для составляющей  $A_z$  можно также построить систему вида (6).С этой целью полагают [2]  $\mu_0 / \mu A_z := \partial W / \partial x$ .

Применяя к функции  $W$  преобразование Фурье-Бесселя, с учетом условий сопряжения (50) нетрудно записать систему уравнений относительно значений  $d_j$  Фурье-образа функции  $W$  на границах пластов:

$$\begin{cases} d_2(\bar{c}_2 + \bar{c}_1) + d_3 \bar{b}_2 = \varphi_2 - d_1 \bar{b}_1, \\ d_{j-1} \bar{b}_{j-1} + d_j(\bar{c}_j + \bar{c}_{j-1}) + d_{j+1} \bar{b}_j = \varphi_j, \quad j = \overline{3, N}, d_{N+1} = 0. \end{cases} \quad (54)$$

Согласно [2]

$$d_1 = 2 \left[ \frac{n_1 / R^*}{n_0 + n_1 / R^*} - \frac{\bar{R}^*}{n_1} \cdot \frac{1}{k_0^2 / (k_1^2 n_0) + \bar{R}^* / n_1} \right] e^{-n_0 h_0}.$$

Если  $k_0 = 0$ , то  $d_1 = 2m/(m + n_1/R^*)$ , т.е.  $d_1 = a_1$ . В формулах (7), (8) при вычислении коэффициентов  $\bar{b}_j, \bar{c}_j$  следует положить

$$\gamma_j = \sigma_j, \quad \eta_j = n_j.$$

Располагая коэффициентами произвольном слое с номером  $j$ , можем записать [2]:

$$A_{xj}(r, z) = p \frac{\mu}{\mu_0} \frac{x}{r} \int_0^\infty [d_j q_{1j}(\bar{z}) + d_{j+1} q_{2j}(\bar{z})] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (55)$$

$\bar{z} \in [0, h_j]$ ,  $p = I \mu_0 / 4\pi$ .

На основании (53) и (55) по формулам (48) вычисляются векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в произвольной точке нижнего полупространства.

Магнитный диполь. Поле вертикального магнитного диполя, поднятого на высоту  $h_0$  над землей описывается одной компонентой  $A_z^*$  вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ . Условия сопряжения на границах пластов для  $A_z$  имеют вид

$$[A_z^*] = 0, \quad [(1/\mu)\partial A_z^*/\partial z] = 0,$$

совпадающие с соотношениями (49) для компоненты  $A_x$  в случае электрического диполя. Дифференциальные уравнения для  $A_z^*$  и  $A_x$  также совпадают. Следовательно, коэффициенты  $a_j$  вычисляются посредством решения системы (51). Составляющая  $A_z^*$  в  $j$ -том пласте описывается формулой (53), в которой момент электрического диполя следует заменить на момент магнитного диполя  $M$ . С помощью  $A_z^*$  выражается азимутальное электрическое поле  $E_\phi^*$ :

$$E_\phi^* = -i\omega\partial A_z^*/\partial r,$$

а также вертикальное и радиальное магнитные поля:

$$B_z^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_z^*}{\partial r} \right), \quad B_r^* = \frac{\partial^2 A_z^*}{\partial r \partial z}.$$

Бесконечная токовая линия (кабель). Электромагнитное поле приподнятого на высоту  $h_0$  прямого бесконечного кабеля описывается одной компонентой  $A_x$  вектор-потенциала [2]

$$\tilde{A}_{xj}(r, z) = -\frac{I\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty [a_j q_{1j}(\bar{z}) + a_{j+1} q_{2j}(\bar{z})] \cos(my) dm.$$

Коэффициенты  $a_j$  вычисляются прогонкой из системы (6), в которой

$$a_1 = 2/(m + n_1/R^*) \exp(-n_0 h_0),$$

если  $k_0 = 0$ .

## 5. Алгоритмы расчета двумерных электрических и магнитных полей для типичных моделей слоистой среды.

Нижнюю часть реальных геоэлектрических разрезов можно удовлетворительно аппроксимировать следующими математическими моделями:

1. Изолирующий пласт неограниченной мощности.
2. Конечный по проводимости пласт неограниченной мощности.
3. Изолятор ограниченной мощности  $H$ , подстилаемый идеальным проводником.
4. Конечный по проводимости  $\sigma$  и мощности  $H$  пласт, лежащий на идеально проводящем основании.

Приведем таблицу решений задачи (1,26) в пространстве изображений и оригиналов для двумерных случаев Е-поляризации (таблица 1) и Н-поляризации (таблица 2).

В том случае, когда двумерная неоднородность содержится в горизонтально-однородной слоистой среде, одинаковой слева и справа от локального цилиндрического тела, то удобнее находить решение в произвольной точке полупространства посредством БПФ. Если же модель несимметрична по вмещающей среде, то электромагнитные поля

не принадлежат пространству  $L(-\infty, \infty)$ , поэтому целесообразно пересчет их осуществлять посредством свертки с оригиналами, приведенными в таблицах 1 и 2:

$$E_x(y, z) = E_x(y, 0) * E_0(y, z) \quad (56)$$

$$H_x(y, z) = H_x(y, 0) * H_0(y, z) \quad (57)$$

Функции  $E_0(y, z)$  и  $H_0(y, z)$  в произвольной горизонтально-однородной слоистой среде можно найти численно, применяя обратное преобразование Фурье к спектрам, рассчитанным по соотношениям (3)-(12).

Таблица 1

Номер модели	Изображение $e_0(\alpha, \beta, z)$	Оригинал $E_0(y, z)$	Область
1	$e^{- \alpha z}$	$\frac{z}{\pi} \frac{1}{y^2 + z^2}$	$z > 0$ $y \in R$
2	$e^{-\sqrt{\alpha^2 + k^2}z}$	$G(k, y, z)$	$z > 0$ $y \in R$
3	$\frac{sh[\alpha(H-z)]}{sh\alpha H}$	$\frac{1}{2H} \frac{\sin(\pi z/H)}{ch(\pi y/H) - \cos(\pi z/H)}$	$0 \leq z \leq H$ $y \in R$
4	$\frac{sh[\eta(H-z)]}{sh\eta H}$	$\sum_{m=0}^{\infty} G(k, y, (2mH-z)) - G(k, y, (2(m+1)H-z))$	$0 \leq z \leq H$ $y \in R$

где

$$G(k, y, z) := \frac{kz}{\pi} \cdot \frac{K_1(k\sqrt{y^2 + z^2})}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$E_0(y, z) = F^{-1}[e_0(\alpha, z)],$$

Таблица 2

Номер модели	Изображение $e_0(\alpha, \beta, z)$	Оригинал $H_0(y, z)$	Область
1	$e^{- \alpha z}$	$\frac{z}{\pi} \frac{1}{y^2 + z^2}$	$z > 0$ $y \in R$
2	$e^{-\sqrt{\alpha^2 + k^2}z}$	$G(k, y, z)$	$z > 0$ $y \in R$
3	$\frac{ch[\alpha(H-z)]}{ch\alpha H}$	$\frac{1}{H} \frac{\sin(\pi z/H) ch(\pi y/2H)}{ch(\pi y/H) - \cos(\pi z/H)}$	$0 \leq z \leq H$ $y \in R$
4	$\frac{ch[\eta(H-z)]}{ch\eta H}$	$\sum_{m=0}^{\infty} G(k, y, (2mH+z)) - G(k, y, (2(m+1)H-z))$	$0 \leq z \leq H$ $y \in R$

В процессе численного решения двумерных задач с использованием алгоритма Шварца требуется многократное вычисление сверток. Это может привести к существенным затратам машинного времени. Кроме того, следует учесть, что функции  $\rho_0$  и  $n_0$  при достаточно малых значениях  $z$  имеют в точке  $y = 0$  максимум и весьма быстро убывают по мере удаления от точки экстремума. При  $z \rightarrow \infty$  они вырождаются в дельта-функцию. Это создает дополнительные трудности при вычислении сверток (56,57), когда функции  $E_x(y, 0)$  и  $H_x(y, 0)$  заданы на сетке с достаточно большим шагом дискретизации. В этой ситуации целесообразно аппроксимировать относительно медленно изменяющуюся функцию ( $E_x$  или  $H_x$ ) таким образом, чтобы свертка с аппроксимирующей функцией могла быть вычислена аналитически. Примером простейшей функции может служить трапеции с высотой, равной единице и бесконечным основанием:

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y < y_1, \\ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, & y_1 \leq y \leq y_2, \\ 1, & y > y_2. \end{cases}$$

Найдем интеграл свертки трапеции с функциями, приведенными в таблицах 1 и 2. Введем обозначения

$$E_0^{(1)}(y) := \frac{z}{\pi} \frac{1}{y^2 + z^2} \quad (58)$$

$$H_0^{(3)}(y) := \frac{1}{H} \frac{\sin(\pi z/H) \operatorname{ch}(\pi y/2H)}{\operatorname{ch}(\pi y/H) - \cos(\pi z/H)} \quad (58)$$

$$E_0^{(3)}(y) := \frac{1}{2H} \frac{\sin(\pi z/H)}{\operatorname{ch}(\pi y/H) - \cos(\pi z/H)} \quad (58)$$

Тогда, пользуясь таблицами интегралов [4], после преобразований получим выражения для трапецидальных характеристик:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(y, z) = E_0^{(1)} * f = \frac{1}{\pi} & \left\{ \frac{z}{2(y_2 - y_1)} \ln \frac{(y_2 - y)^2 + z^2}{(y_1 - y)^2 + z^2} + \right. \\ & \left. + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \left( \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y}{z} - \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y}{z} \right) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y}{z} \right\}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(y, z) = E_0^{(3)} * f = \frac{1}{\pi} & \left\{ \frac{H}{\pi(y_2 - y_1)} [L(v_2 + t) - L(v_1 + t) - \right. \\ & \left. - L(v_2 - t) + L(v_1 - t)] + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} (v_2 - v_1) + \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{z}{H} \right) - v_2 \right\}, \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\pi}{2H} (y_i - y), \quad i = 1, 2; \quad t = \frac{\pi z}{2H}, \\ v_i &= \operatorname{arctg} (t u_i \cdot \operatorname{ctg} t), \end{aligned}$$

$L(\cdot)$  - функция Лобачевского;

$$\begin{aligned}
\varphi^{(3)}(y, z) &= H_0^{(3)} * f = \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2H}{\pi(y_2 - y_1)} \left[ L(s_2 + \tau) - L(s_1 + \tau) - L(s_2 - \tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + L(s_1 - \tau) + L(\pi - q_2 - \tau) - L(\pi - q_1 - \tau) + L(q_2 - \tau) - L(q_1 - \tau) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \left[ \operatorname{arctg} \frac{shu_2}{\sin t} - \operatorname{arctg} \frac{shu_1}{\sin t} \right] + \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{shu_2}{\sin t} \right] \right\}, \tag{63}
\end{aligned}$$

Где

$$s_i = \operatorname{arctg} \left( th(u_i / 2) \cdot ctg \tau \right), \quad \tau = t / 2,$$

$$q_i = \operatorname{arctg} \left( cth(u_i / 2) \cdot ctg \tau \right), \quad i = 1, 2.$$

Интеграл свертки функций  $E_x$  или  $H_x$ , имеющих горизонтальные асимптоты при  $y \rightarrow \pm\infty$ , можно представить как сумму произведений приращений  $\Delta E_{xj} = E_x(y_{j+1}) - E_x(y_j)$  или  $\Delta H_{xj} = H_x(y_{j+1}) - H_x(y_j)$  между соседними узлами сетки на трапецеидальные характеристики  $\varphi^{(l)}$  с должным образом подобранными сдвигами [3].

Пусть интервал  $[-Y, Y]$ , в пределах которого поля выходят на асимптоты (с точностью до  $\varepsilon > 0$ ), имеет  $N_y$  узлов с шагом  $h$ :

$$y_j = (j-1)h, \quad j = \overline{1, N_y}.$$

Если положить

$$u_j := u(y_j), \quad \varphi^{(l)}(y_k - y_j) = \varphi_{k-j}^{(l)},$$

То

$$u_k(z) = \sum_{j=1}^{N_y-1} \Delta u_j \varphi_{k-j}^{(l)}.$$

Здесь  $u$  соответствует  $E_x$  или  $H_x$ .

Трапецеидальные характеристики  $\varphi^{(l)}$  не зависят от вида функции  $u(y)$ , поэтому целесообразно предварительно рассчитать их в  $2N_y - 1$  узлах:

$$\left\{ \varphi^{(l)} \right\}, \quad m = -\overline{(N_y - 1), (N_y - 1)}$$

и использовать массив значений  $\left\{ \varphi^{(l)} \right\}$  в итерационном процессе Шварца.

По изложенным алгоритмам разработаны программы на языке ФОРТРАН. Для большей наглядности все подпрограммы объединены в одну программу *MTSEH1*, позволяющую выполнять расчеты электрических или магнитных полей (или их Фурье-спектров) в произвольной точке горизонтально-слоистой среды. Она выполняет следующие функции:

1. Ввод данных с перфокарт.
2. Расчет полей в заданных узлах сетки (*EHNZIP*, *EHNZ*).
3. Печать результатов расчетов в виде таблиц и графиков изменения полей с глубиной.

Подпрограмма *EHNZIP* идентична *EHNZ* и отличается от нее параметром CSIG, обеспечивающим учет влияния диэлектрической проницаемости и вызванной поляризации пластов. Значения  $\bar{\sigma}_i$  комплексного массива *CSIG* рассчитываются подпрограммой *COMSIGC* (COMplex SIGma) по формуле

$$\bar{\sigma}_i = \left[ 1 - \eta_i / \left( 1 + \sqrt{-i\omega\tau_i} \right) \right] \cdot (1 - i\omega\varepsilon_i\rho_i), i = \overline{1, NL},$$

где *NL* - количество слоев,  $\eta_i$  (*ETAIP*) и  $\Gamma$ ,  $\tau_i$  (*TAU*) - параметры поляризации пластов. Комплексная проводимость *i*-го слоя  $\sigma^*$  связана с его вещественной проводимостью равенством  $\sigma_i^* = \sigma_i \bar{\sigma}_i$ . Для получения текста подпрограммы *EHNZ* из *EHNZIP* нужно исключить в ней массив CSIG из формальных параметров и сделать очевидные изменения в тексте (см. приложение № 1).

Подпрограмма *EHNZIP(EHNZ)* рассчитывает значения электрического поля на границах раздела пластов  $A_j$  (*TAKEAJ*) посредством решения системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов трехдиагонального вида (*TRIDAG*) Далее величины  $A_j$  ( $j = 2, 3, \dots, NL - 1$ ) используются для вычисления полей  $E_x$  и  $H_y$  или их Фурье-спектров в произвольных точках оси *z* на заданной сетке и кажущегося сопротивления на поверхности земли (*EHZ, Q1J*).

Подпрограммы *MTSEH1* и *EHNZIP (EHNZ)* обращаются к подпрограмме *DISXYZ*, пересчитывающей шаги сетки (массив *HZ*) в аппликаты узлов (массив *DISZ*). За начало координат принимается граница раздела земля–воздух. Тексты подпрограмм *COMSIG* и *DISXYZ* не приводятся.

Тексты программы содержатся в приложении № 1, инструкция по работе с ней - в приложении № 2, а результаты ее работы - в приложении № 3.

## ЛИТЕРАТУРА.

1. Бердичевский М.Н., Жданов М.С. Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля земли. "Недра", 1981.
2. Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. "Недра", 1965.
3. Ваньян Л.Л., Кауфман А.А., Терехин Е.И. Расчет фазовых кривых частотного зондирования способом трансформации. Прикладная геофизика, вып.30, М., Гостехиздат, 1961, с.103-114.
4. Градштейн И.С, Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ФМ.М., 1962.
5. Дмитриев В.И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. Научные труды вычислительного центра. МГУ, 1969.

Приложение №1. ГОЛОВНАЯ ПРОГРАММА РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ  
МТЗ (MTSEH1)

```

C SUBROUTINE MTSEH1
C =====
C   РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МТЗ
C =====
C   ГОЛОВНАЯ ПРОГРАММА
C =====
      REAL RO(65),H(65),Q(65),s(65),HZ(64),DISZ(65)
      COMPLEX EHN(65),DEHN(65),A(11),ROT,DEHN0,CSIG(65)
      DATA EPSIL/65*1./, TAU/65*0./, ETA/65*0./
*,   SCAL/-0.3, -0.2, -0.1, -0.,.1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9, .1./
      DATA Q/10*1./,HZ/65*100./,T/10./,A/(1.E5,0.),10*(0.,0.)/
*,   IBL/1H /, IT/1HI/,IPL,MUL,IP,IDP/1H+,1H*,1HA,1Ho/
*,   ISDW/13 /,ST/.25/,CSIG/65*(1.,0.)/
      ALPHA=0.
      BETA=0.
      IREP=1
      NAL=1
      IBET=1
      READ 5, SCALE,IP,ISP
      Z1=1,SCALE
5     FORMAT(E5.0,2I1)'
      PRINT 5, SCALE,IP,ISP
7     FORMAT('SCALE=' ,E10.3,5X,'BII=' ,I2,5X,'СПЕКТР='I2)'
      IF(IP.NE.0)IREP=2
      READ 30, NZ,(HZ(I),I=1,NZ)
      DO 210 I = 1,NZ
          HZ(I)=HZ(I)*SCALE
210  CONTINUE
      READ 25, N
25    FORMAT(10I3)'
      READ 80, NT,T,DT
80    FORMAT(I3,2E5.0)'
      READ 25, NL
      READ 35, (RO(I),I=1,NL)
      NLM=NL-1
      READ 35, (H(I),I=1,NLM)
      DO 200 I = 1,NLM
          H(I)= H(I)*SCALE
210  CONTINUE
      READ 35, (Q(I),I=1,NL)

```

```

35  FORMAT(16E5.03)'
    IF(IP.EQ.0)GOTO 500
    READ 35, (ETA(I),I=1,NL)
    READ 35, (TAU(I),I=1,NL)
    READ 35, (EPS(I),I=1,NL)
500  CONTINUE
    PRINT 70,(I,I=1,NL)
70  FORMAT(15X,10(I2,8X))'
    PRINT 60,( RO(I),I=1,NL))
60  FORMAT(4X,'RO:'3X,10E10,3)'
    PRINT 65,( H(I),I=1,NLM))
65  FORMAT(4X,'H :'3X,10E10,3)'
    PRINT 75,( Q(I),I=1,NL))
75  FORMAT(4X,'MU:'3X,10E10,3)'
    IF(IP.NE.0)GOTO 510

    PRINT 85,( ETA(I),I=1,NL))
85  FORMAT(4X,'ETA:'3X,10E10,3)'
    PRINT 95,( TAU(I),I=1,NL))
95  FORMAT(4X,'TAU:'3X,10E10,3)'
    PRINT 105,( EPSIL(I),I=1,NL))
105  FORMAT(4X,'EPSIL:'3X,10E10,3)'
510  CONTINUE
    IF(ISP.EQ.0)GOTO 520
    READ 80, NAL,ALPHA,DAL
    READ 80, NBAT,BETA,DBET
520  CONTINUE
C -----
30  FORMAT(I3/16(E5.0))'
    NLP=NL+1
    CALL DISXYZ(HZ,DISZ,N-1,NZ-1,1.)
    DO 130 lAL= 1,NAL
    DO 140 lBET= 1,NBET
    DO 100 NNT= 1,NT
    PRINT 90
    PRINT 110,T,ALPA,BETA
110  FORMAT(1X,' T=',F10.3,8X,'ALPHA=',E10.3,8X, 'BETA=',E10.3,8X)'
    RLAM=1000.SQRT(10*RO(1)*T
    CALL COMSIG(RO,ETA,TAU,EPSIL,NL,T,CSIG))
    DO 190 LL= 1,IREP
    IEORH=1
    DO 20 l= 2,NLP
        A(I)=0.
20  CONTINUE

```

```

      A(1)=1.E5
      GOTO(150,160),LL
150  CONTINUE
      PRINT 165
165  FORMAT(13X,' БЕЗ ВП ИЛИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ *ПРОНИЦАЕМОСТИ.')
```

CALL EHNZ(RO,H,Q,NL,HZ,NZ,Z1,ALPHA,BETA,  
\* N,T,A,EHZ,DEHN,ROT,DEHN0)  
GOTO 155

```

160  CONTINUE
      PRINT 175
175  FORMAT(15X,' С ВП ИЛИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ')
```

CALL EHNZIP(RO,H,Q,CSIG,NL,HZ,NZ,Z1,ALPHA,BETA,  
\* N,T,A,EHZ,DEHN,ROT,DEHN0)

```

155  CONTINUE
C -----
      FROT=ATAN2(AIMAG(ROT), REAL(ROT))*180/3.141592653
      AROT = ABS(ROT)
      PRINT 10,ROT,AROTFROT
10   FORMAT(' ROT=',2E9.3,3X,'/ROT/=',E9.3,3X,'ARG ROT=',E9.3,
10X,'*- RE EX  + - IM EX  , ^ RE HY: o - IM HY')
```

PRINT 50,(SCAL(I),I=1,14)  
DO 230 I= 1,NZ  
DO 180 L= 1,56

```

180  ITEXT(L)=IBL
      ITEXT(ISDW)=IT
      IRE=REAL(EHN(I)/ST+ISDW*0.5)
      IME=AIMAG(EHN(I)/ST+ISDW*0.5)
      IRH=REAL(DEHN(I)/ST+ISDW*0.5)
      IMH=AIMAG(DEHN(I)/ST+ISDW*0.5)
      IF(IRE.LT.1)IRE=1
      IF(IME.LT.1)IME=1
      IF(IRH.LT.1)IRH=1
      IF(IMH.LT.1)IMH=1
      IF(IRE.GT.56)IRE=56
      IF(IME.G.56)IME=561
      IF(IRH.GLT.56)IRH=56
      IF(IMH.GT.56)IMH=56
      ITEXT(IRE) =1H*
      ITEXT(IME) =1H+
      ITEXT(IRH) =1H^
      ITEXT(IMH) =1Ho
C   ITEXT(IAME) =1HE
C   ITEXT(IAMH) =1HH
      PRINT 40,DISZ(I), EHN(I), DEHN(I),ITEXT
```

```

40  FORMAT(2H I,E10.3,3H I,2E10.3,3H I,10X,56A1)
50  FORMAT(1X,60(1H=)/1X,1HI,6X,1HZ,5X,1HI,10X,2HEX,10X,1HI,
. 10X,2HHY,10X,1HI,8X,14F4.1/1X,60(1H=),10X,1HI,13(4H----),3H-->)
230 CONTINUE
    PRINT 120
120  FORMAT(1X,60(1H=),22X,1HV/83X,1HZ)

190 CONTINUE
    PRINT 90
90   FORMAT(///)
    T=T*DT
100 CONTINUE
    BETA=BETA*DBET
140 CONTINUE
    ALPHA= ALPHA*DAL
130 CONTINUE
    CALL EXIT
    END

```

```

SUBROUTINE EHNZIP(RO,H,Q,CSIG,NL,HZ,NZ,Z1,
*   ALPHA,BETA,N,T,A,EHN,DEHN,ROT,DEHN0)

```

```

C =====
C  РАСЧЕТ НОРМАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В УЗЛАХ ПО ОСИ Z
C  -----
C  ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C  RO  - МАССИВ СОПРОТИВЛЕНИЙ
C  H   - МАССИВ МОЩНОСТЕЙ ПЛАСТОВ
C  Q   - МАССИВ МАГНИТНЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ
C  NL  - КОЛИЧЕСТВО ПЛАСТОВ
C  HZ  - МАССИВ ШАГОВ СЕТКИ ПО ОСИ Z
C  NZ  - КОЛИЧЕСТВО ШАГОВ СЕТКИ ПО ОСИ Z
C  Z1  - НОРМИРОВОЧНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ
C  ALPHA - ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЧАСТОТА (X)
C  BETA  - ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЧАСТОТА (Y)
C  N    - НОМЕР УЗЛА НА ГРАНИЦЕ ЗЕМЛЯ-ВОЗДУХ
C  T    - ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ
C  A    - МАССИВ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

```

```

C -----
C Выходные ПАРАМАТРЫ:
C  A  - МАССИВ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЯ НА ГРАНИЦАХ
C      РАЗДЕЛА ПЛАСТОВ (ПОЛЕ E)
C  EHN - МАССИВ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЯ E В УЗЛАХ
C      СЕТКИ
C  DEHN - МАССИВ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЯ H В УЗЛАХ
C      СЕТКИ
C  ROT  - КАЖУЩЕЕСЯ СОПРОТИВЛЕНИЕ
C  DEHN0 - ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ОСИ Z
C        ОТ ПОЛЯ E ПРИ Z=0
C =====
C  COMPLEX EHN(NZ),DEHN(NZ),ETA(64),CSIG(NL),
C  *  A(NL),DEHZ,ROT,IMPED,DEHN0,EHZ,EHYN,EHN0
C  REAL RO(NL),H(NL),Q(NL),DISZ(500),HZ(NZ)
C  AUTOMATIC
C -----
C  RO1=RO(1)
C  RLAM =SQRT(10.*RO1*T)*1000./Z1
C
C  ----- РАСЧЕТ ЗНАЧЕНИЙ МАССИВА ETA -----
C
C  PI=4.*ATAN(1.)
C  RMU=4.E-7*PI
C  P=2.*PI/T
C  DO 30 I=1,NL
C  ETA(I)=CSQRT((0.,-1.)*8.*PI*PI/RLAM/RLAM*RO1/
C  /  RO(I)*Q(I)*CSIG(I)+ALPHA*ALPHA+BETA*BETA)
C  30 CONTINUE
C
C  --- РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ---
C
C  CALL TAKEAJ(H,Q,ETA,NL,1,NL+1,A)
C
C  --- РАСЧЕТ АППЛИКАТ УЗЛОВ СЕТКИ ---
C
C  CALL DISXYZ(HZ,DISZ,N-1,NZ-1,1.)
C
C  --- РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
C  В УЗЛАХ СЕТКИ ---
C
C  DO 50 I=1,NZ
C  Z=DISZ(I)
C  EHN(I)=EHZ(A,H,ETA,Q,NL,Z,DEHZ)

```

```

DEHN(I)=DEHZ/Z1
IF(I.NE.N) GOTO 50
  EHYN=DEHZ/Z1
  AEHYN=CABS(EHYN)
  IF(AEHYN.EQ.0.) GOTO 60
  IMPED=EHN(N)/EHYN
  ROT=IMPED*P*IMPED*RMU*(0.,-1.)
  GO TO 50
60  CONTINUE
  ROT=RO(NL)
50  CONTINUE
C
C --- НОРМИРОВКА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ---
C
  DEHN0=DEHN(N)
  EHN0=EHN(N)
  DO 70 I=1,NZ
    IF(AEHYN.EQ.0.) GOTO 80
    DEHN(I)=DEHN(I)/DEHN0
    EHN(I)=EHN(I)/EHN0
    GO TO 70
80  CONTINUE
  DEHN(I)=1.
70  CONTINUE
C
  RETURN
  END

SUBROUTINE TAKEAJ(H,Q,ETA,NL,JUP,JLOW,A)
C
C РАСЧЕТ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЯ НА ГРАНИЦАХ СЛОЕВ
C
C ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C   H - МОЩНОСТИ СЛОЕВ;
C   Q - СОПРОТИВЛЕНИЯ (H-ПОЛ.) ИЛИ
C       МАГНИТ. ПРОНИЦАЕМОСТИ (E-ПОЛ.);
C   ETA = SQRT(K*K+ALPHA*ALPHA+ВЕТА*ВЕТА);
C   NL - КОЛИЧЕСТВО СЛОЕВ В РАЗРЕЗЕ;
C   JUP - НОМЕР ГРАНИЧНОГО УЗЛА СВЕРХУ
C   JLOW- ТО ЖЕ СНИЗУ;
C   A - ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ПРАВЫЕ
C       ЧАСТИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ.
C
C ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

```

```

C   A - МАССИВ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЯ НА
C   ГРАНИЦАХ ПЛАСТОВ.
C
  DIMENSION A(1),H(1),ETA(1),Q(1),
*     B(64),C(64),D(64)
  COMPLEX A,B,C,D,ETA,ARG,ETQ,CTHC,DSHC,AUP,ALOW
C
  IF(NL.GT.1) GO TO 5
  A(1)=1.
  A(2)=0.
  RETURN
C
5  CONTINUE
  NL1=NL-1
  NJ=JLOW-JUP-1
  NJ1=NJ-1
C
  DO 20 J=1,NL1
  ARG=ETA(J)*H(J)
  ETH=CABS(ARG)
  IF(ETH.GT.1.E-10)GO TO 10
  C(J)=1./H(J)/Q(J)
  B(J)=C(J)
  D(J)=B(J)
  GO TO 20
10  CONTINUE
  ETQ=ETA(J)/Q(J)
  C(J)=ETQ*CTHC(ARG,DSHC)
  B(J)=ETQ*DSHC
  D(J)=B(J)
20  CONTINUE
C
  C(NL)=ETA(NL)/Q(NL)
  B(NL)=0.
  D(NL)=0.
  IF(NJ1.NE.0)GO TO 30
  A(JUP+1)=(A(JUP)*B(JUP)+A(JLOW)*B(JUP+1))/
/     (C(JUP)+C(JUP+1))
  RETURN
C
30  CONTINUE
  AUP=A(JUP)
  ALOW=A(JLOW)
  DO 40 J=1,NL

```

```

40 A(J)=0.
   A(1)=AUP*B(JUP)
   A(NJ)=ALOW*B(JLOW-1)
   DO 50 J=1,NJ1
     JJ=JUP+J-1
     C(J)=C(JJ)+C(JJ+1)
     D(J)=-B(JJ+1)
     B(J)=D(J)
50 CONTINUE
C
   C(NJ)=C(JLOW-1)+C(JLOW-2)
C
   CALL TRIDAG(NJ,B,C,D,A)
C
   DO 60 J=1,NJ
60 A(JLOW-J)=A(NJ-J+1)
   A(JUP)=AUP
   A(JLOW)=ALOW
C
   RETURN
   END

   SUBROUTINE TRIDAG(N,A,B,C,D)
C
C РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УР-ИЙ С
C ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ.
C
   DIMENSION A(1),B(1),C(1),D(1)
   COMPLEX A,B,C,D,W
C
   N1=N-1
   W=B(1)
   D(1)=D(1)/W
   DO 1 I=2,N
     B(I-1)=C(I-1)/W
     W=B(I)-A(I-1)*B(I-1)
     D(I)=(D(I)-A(I-1)*D(I-1))/W
1 CONTINUE
C
   DO 2 I=1,N1
2 D(N-I)=D(N-I)-B(N-I)*D(N-I+1)
   RETURN
   END
   COMPLEX FUNCTION Q1J(Q2J,ETAJ,HJ,Z,DQ1,DQ2,IFL)

```

```

C =====
C ВЬЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ Q1J,Q2J,DQ1,DQ2
C ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C   ЕТАJ = SQRT(K*K+ALPHA*ALPHA+ВЕТА*ВЕТА);
C   HJ  - МОЩНОСТЬ ПЛАСТА;
C   Z   - РАССТОЯНИЕ ОТ КРОВЛИ ПЛАСТА (Z<HJ);
C   IFL = 1 ==> ПОЛУПРОСТРАНСТВО,
C       = 0 ==> СЛОЙ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ.
C =====
C   COMPLEX Q2J,ЕТАJ,DQ1,DQ2,ZNAM,KH,EXP1,EXP2
C   COMPLEX СТНС,DSHC,EXPC,C0,C1,CMULT,DIVC
C   CMULT(z1,z2) = z1*z2
C   DIVC (z1,z2) = z1/z2
C   DATA C0/(0.,0.),C1/(1.,0.)/
C -----
C   IF(IFL.NE.1) GO TO 1
C   Q1J=EXP(-ЕТАJ*Z)
C   Q2J=C0
C   DQ1=-ЕТАJ*Q1J
C   DQ2=C0
C   RETURN
C -----
C   1 CONTINUE
C   KH=ЕТАJ*HJ
C   ZDH=Z/HJ
C   AKH=CABS(KH)
C   IF(AKH.GT.1.E-10) GO TO 2
C   Q1J=1.-ZDH
C   Q2J=ZDH
C   DQ1=-1./HJ
C   DQ2=-DQ1
C   RETURN
C -----
C   2 CONTINUE
C   IF(AKH.LE.80.) GO TO 3
C   Q1J=EXP(-ЕТАJ*Z)
C   DQ1=-ЕТАJ*Q1J
C   Q2J=C0
C   DQ2=C0
C   RETURN
C -----
C   3 CONTINUE
C   IF(Z.NE.0.) GO TO 4
C   Q1J=C1

```

```

Q2J=C0
DQ1=-ETAJ*CTHC(KH,DSHC)
DQ2=ETAJ*DSHC
RETURN
4 CONTINUE
EXP1=EXP(-KH)
ZNAM=C1-EXP1*EXP1      ! CMULT(EXP1,EXP1)
ZNAM=C1/ZNAM           ! DIVC(C1,ZNAM)
EXP1=EXP(-KH*ZDH)
EXP2=EXP(-KH*(2.-ZDH))
Q1J=(EXP1-EXP2)
Q1J= Q1J*ZNAM          !CMULT(Q1J,ZNAM)
DQ1=-ETAJ*(EXP1+EXP2)
DQ1= DQ1*ZNAM         ! CMULT(DQ1,ZNAM)
EXP1=EXP(-KH*(1.-ZDH))
EXP2=EXP(-KH*(1.+ZDH))
Q2J=(EXP1-EXP2)
Q2J= Q2J*ZNAM         !CMULT(Q2J,ZNAM)
DQ2=ETAJ*(EXP1+EXP2)
DQ2= DQ2*ZNAM        !CMULT(DQ2,ZNAM)
RETURN
END

```

COMPLEX FUNCTION ENZ(A,H,ETA,Q,NL,Z,DEHZ)

```

C =====
C РАСЧЕТ ПОЛЯ (EX,HY) ИЛИ (EY,HX) В ВОЗДУХЕ ИЛИ НА
C ЗАДАННОЙ ГЛУБИНЕ Z ГОРИЗ.-ОДНОРОДНОГО РАЗРЕЗА.
C ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C   A - МАССИВ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЯ НА ГРАНИЦАХ СЛОЕВ;
C   H - МАССИВ МОЩНОСТЕЙ СЛОЕВ;
C   ETA - МАССИВ ПАРАМЕТРОВ СЛОЕВ;
C   Q - МАССИВ МАГНИТНЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ (Е-ПОЛ.)
C       ИЛИ ПРОВОДИМОСТЕЙ (Н-ПОЛ.);
C   Z - РАССТОЯНИЕ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ.
C   NL - КОЛИЧЕСТВО СЛОЕВ В РАЗРЕЗЕ;
C -----
C ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
C   ENZ - ЗНАЧЕНИЕ ПОЛЯ НА ГЛУБИНЕ Z;
C   DEHZ- ПРОИЗВОДНАЯ ПО ОСИ Z.
C =====
DIMENSION A(1),H(1),ETA(1),Q(1)
COMPLEX A,ETA,DEHZ,Q1,Q2,Q1J,DQ1,DQ2
IF(Z.GT.0.) GO TO 10
C ----- РАСЧЕТ ПОЛЕЙ В ВОЗДУХЕ
Q1=Q1J(Q2,ETA(1),H(1),0.,DQ1,DQ2,0)

```

$$DEHZ=(A(1)*DQ1+A(2)*DQ2)/Q(1)$$

$$EHZ=Z*DEHZ+A(1)$$

RETURN

C ----- РАСЧЕТ ПОЛЕЙ В ЗЕМЛЕ

10 CONTINUE

ZH=0.

NL1=NL-1

IF(NL1.EQ.0) GO TO 25

DO 20 I=1,NL1

ZH=ZH+H(I)

IF(ABS(1-ZH/Z).LT.0.001) Z=ZH

IF(Z.GE.ZH) GO TO 20

NI=I

GO TO 30

20 CONTINUE

25 NI=NL

DZ=Z-ZH

IFLAG=1

GO TO 40

C

30 CONTINUE

DZ=Z-ZH+H(NI)

IFLAG=0

C

40 Q1=Q1J(Q2,ETA(NI),H(NI),DZ,DQ1,DQ2,IFLAG)

EHZ=A(NI)\*Q1+A(NI+1)\*Q2

DEHZ=A(NI)\*DQ1+A(NI+1)\*DQ2

DEHZ=DEHZ/Q(NI)

RETURN

END

Приложение №2. И Н С Т Р У К Ц И Я П О Р А Б О Т Е С П Р О Г Р А М М О Й  
M T S E N 1 (РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ)

ПРОГРАММА ПОЗВОЛЯЕТ ВЫПОЛНЯТЬ РАСЧЕТ НОРМИРОВАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЕЙ  $E_x$   $H_y$  В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКЕ ВОЗДУХА ИЛИ ЗЕМЛИ И КАЖУЩЕГОСЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ И МАГНИТНАЯ ПРОИНИЦАЕМОСТИ ПРЕДПОЛАГАЮТСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ. ИМЕЕТСЯ ВОЗМОЖНОСТЬ ИССЛЕДОВАТЬ ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ПЛАСТОВ

КРОМЕ ТОГО, МОЖНО РАССЧИТЫВАТЬ ФУРЬЕ-СПЕКТРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ (ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ). ДЛЯ ЭТОГО НУЖНО, ЧТОБЫ УПРАВЛЯЮЩАЯ ПЕРЕМЕННАЯ  $IPS$  НЕ РАВНЯЛАСЬ НУЛЮ.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПЕЧАТАЮТСЯ В ВИДЕ ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ АППЛИКАТ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЕЙ  $E_x$  И  $H_y$

=====

ПОДГОТОВКА ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

=====

№ ПК	ИДЕНТИФ.	ФОРМАТ	КОЛ-ВО ЧИСЕЛ НА ПК	НАЗНАЧЕНИЕ
1	SCALE	E5.0	3	МАСШТАБНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ
	IP	I1		IP=0 ==> БЕЗ ВП, =1 ==> С ВП
	IPS	I1		IPS=0 => СО СПЕКТ. =1=> БЕЗ СПЕКТ.
2	NZ	I3	1	КОЛ-ВО ШАГОВ СЕТКИ
3	HZ	16E5.0	NZ	ШАГИ СЕТКИ
4	N	I3	1	НОМЕР УЗЛА НА ГРАНИЦЕ ЗЕМ.-ВОЗ.
5	NT	I3	3	КОЛ-ВО ПЕРИОДОВ
	T	E5.0		НАЧАЛЬНЫЙ ПЕРИОД
	DT	E5.0		ШАГ ПО ПЕРИОДАМ
6	NL	I3	1	КОЛ-ВО СЛОЕВ
7	RO	16E5.0	NL	УД. СОПРОТ. СЛОЕВ
8	H	16E5.0	NL-1	МОЩНОСТИ СЛОЕВ
9	Q	16E5.0	NL	ОТНОСИТ. МАГНИТНЮ ПРОНИЦ.
10	ETA	16E5.0	NL	ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ПЛАСТОВ
11	TAU	16E5.0	NL	ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ПЛАСТОВ

12	EPSIL	16E5.0	NL	ОТНОСИТ. ДИЭЛ. ПРОНИЦ.
13	NAL	I3	NL	КОЛ-ВО ПРОСТР. ЧАСТОТ
	ALPHA	E5.0	NL-1	НАЧ. ЗНАЧЕНИЕ ALPHA
	DAL	E5.0	NL	ШАГ ИЗМЕНЕНИЯ ALPHA
14	NBET	I3	NL	КОЛ-ВО ПРОСТР. ЧАСТОТ
	BETA	E5.0	NL	НАЧ. ЗНАЧЕНИЕ BETA
	DBET	E5.0	NL	ШАГ ИЗМЕНЕНИЯ BETA

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. ПЕРФОКРТЫ С 10 ПО 12 ВВОДЯТСЯ, ЕСЛИ ПЕРЕМЕННАЯ IP НА ПЕРВОЙ КАРТЕ НЕ РАВНА НУЛЮ.
2. ПЕРФОКАРТЫ 13-14 ВВОДЯТСЯ, ЕСЛИ ПЕРЕМЕННАЯ IPS НА ПЕРВОЙ КАРТЕ НЕ РАВНА НУЛЮ.

\*\*\*\*\*

ПРИМЕР ПОДГОТОВКИ ДАННЫХ

\*\*\*\*\*

\*NO LOAD LIST

\*MAIN MTSEH1

\*EXECUTE

1.0001 SCALE,IP,IPS

010 NZ

500.0500.0500.0500.0050.0100.0050.0200.0200.0200.0200.0200.0200.0

1 N

00610.0010.00 NT,T,DT

3 NL

1.0000.1001.000 RO

2000.200.0 H

1.0001.0001.000 Q

0.0000.0000.000 ETA

1.0001.0001.000 TAU

1.0001.0001.000 EPSIL

Приложение №3

	1	2	3
RO:	1.000+00	1.000+04	1.000-04
H :	1.000+02	2.000+04	
MU:	1.000+00	1.000+00	1.000+00

T = 10.00 ALPHA= 0.000+00 BETA= 0.000+00

БЕЗ ВП ИЛИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

ROT=8.284+01 4.291+1 /ROT/ = 9.329+01 ARG ROT=2.730+01

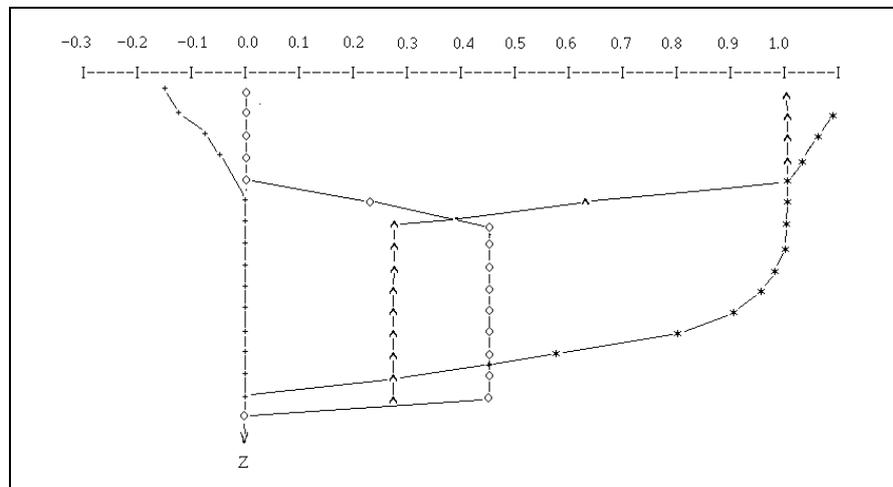
=====

Z	EX	HY
---	----	----

=====

-2.000+03	I	1.096+00	-1.572-01	I	1.000+00	0.000+00	I
I -1.500+03	I	1.072+00	-1.179-01	I	1.000+00	0.000+00	I
I -1.000+03	I	1.048+00	-7.860-02	I	1.000+00	0.000+00	I
I -5.000+02	I	1.024+00	-3.930-02	I	1.000+00	0.000+00	I
I -0.000+00	I	1.000+00	0.000-00	I	1.000+00	0.000+00	I
I 5.000+01	I	9.976-01	2.944-03	I	6.334-01	2.221-01	I
I 1.000+02	I	9.952-01	3.918-03	I	2.673-01	4.430-01	I
I 1.500+02	I	9.928-01	3.910-03	I	2.673-01	4.430-01	I
I 3.500+02	I	9.833-01	3.876-03	I	2.673-01	4.430-01	I
I 1.100+03	I	9.476-01	3.749-03	I	2.673-01	4.430-01	I
I 2.100+03	I	9.000-01	3.580-03	I	2.673-01	4.430-01	I
I 4.100+03	I	8.048-01	3.241-03	I	2.673-01	4.430-01	I
I 9.100+03	I	5.668-01	2.395-03	I	2.673-01	4.430-01	I
I 1.510+04	I	2.812-01	1.379-03	I	2.673-01	4.430-01	I
I 2.100+04	I	3.774-04	3.801-04	I	2.673-01	4.430-01	I
I 2.110+04	I	7.049-07	7.099-07	I	4.992-04	8.273-04	I

\* - RE EX + - IM EX ^ - RE HY o - IM HY



Приложение № 3. ПРИМЕР ФАЙЛА MTSEN1.DAT С ДАННЫМИ

1., 0, 0	Scale IP ISP
50	NZ
25.	z Step
5	N
5.,1,1.414	NT, TBeg,QT
2	NL
1.,0.01	Ro(1), Ro(2)
500.	h(1)
1.,1.	Mu(1), Mu(2)

Scale - масштаб: Scale=1 Размеры в метрах

Scale=1000 Размеры в километрах

IP - Флаг Вызванной поляризации (частотной дисперсии):

IP=0 - частотная дисперсия не учитывается

Параметры дисперсии не вводятся

IP<>0 - частотная дисперсия учитывается

Нужно ввести параметры дисперсии слоев (см. текст progr.)

ISP - Флаг учета пространственных частот

ISP =0 В программе задаются частоты Alpha=Beta=0

ISP<>0 Нужно ввести частоты Alpha, Beta (см. текст progr.)

NZ - количество шагов сетки для расчета полей

z Step- шаг равномерной сетки по оси z (глубины)

N - номер узла сетки, соответствующий границе раздела Земля-Воздух

NT - Количество периодов

TBeg - Начальный период

QT - знаменатель геометрической прогрессии, определяющий изменение периодов:

$$T(i)=TBeg*QT^{i-1}, i=1,2,\dots,NT$$

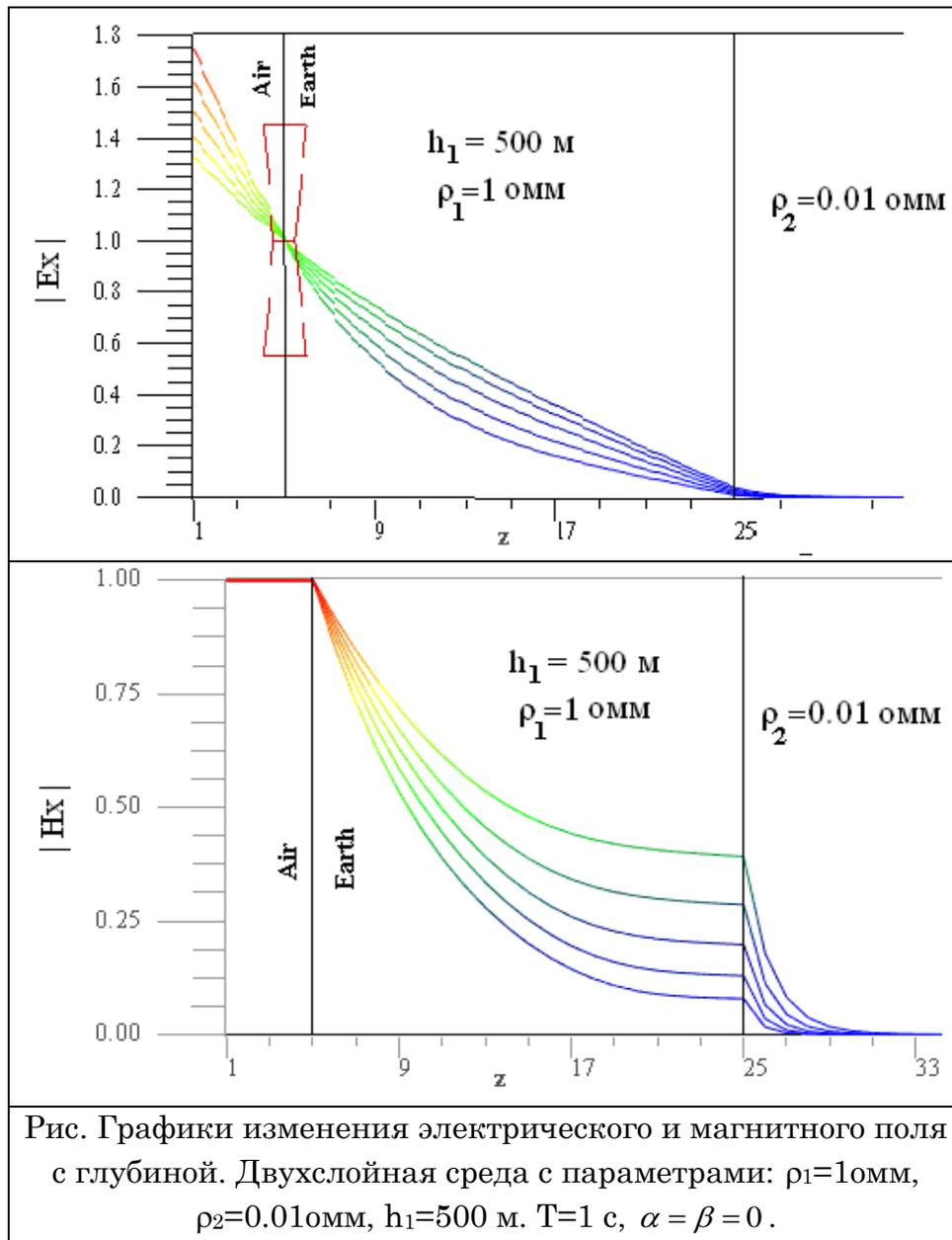
NL - количество слоев

Ro(m) - сопротивления слоев, m=1,...,NL

h(m) - мощности слоев m=1,...,NL-1

Mu(m) - относительные магнитные проницаемости слоев m=1,...,NL

## Приложение №4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ДЛЯ ТЕСТОВЫХ ДАННЫХ



## COMPLEX FUNCTION CTHC(Z,SHC)

```

C -----
C Вычисление CTH() и 1./SH() от комплексного аргумента z
C -----
COMPLEX Z,SHC,C1,CMULT
COMPLEX CEX,CEX2,ZNAM ,SHC1,EXPC,CTHC1!
C -----
X=REAL(Z)
CTHC=1.
SHC=0.
IF(X.GT.40.) RETURN
C -----

```

```
C1=(1.,0.)
CEX=cexp(-Z)
CEX2=cexp(-2.*Z)
ZNAM=C1/(C1-CEX2)
SHC=2.* CEX*ZNAM      !CMULT(CEX,ZNAM)
SHC1=2.*CEX*ZNAM

CTHC=ZNAM+ CEX2*ZNAM  !CMULT(CEX2,ZNAM)
CTHC1=ZNAM+CEX2*ZNAM
RETURN
END
```