МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРВДЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Редколлегия журнала "Известия высших учебных
заведений", раздел «Геология и разведка»

№ 1948-81 Деп

М.И.Юдин, Е.В.Казанцева

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МТЗ МЕТОДОМ СЕТОК В ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ

Москва, 1981

Решение задач геоэлектрики методом конечных разностей применительно к неоднородным средам требует использования неравномерных шагов сетки. В связи с этим большое значение имеет правильный выбор коэффициентов разностной схемы для получения результатов с требуемой точностью. Численные эксперименты свидетельствуют о том, что конечно-разностная аппроксимация дифференциальной задачи для случая Е-поляризации на сетке с неравномерными шагами иногда приводит к значительным погрешностям в решении и существенно замедляет сходимость итерационного процесса. Известны случаи, когда решение одномерной задачи по программе [4] с грубо неравномерной сеткой требовало более 1000 итераций.

Рассмотрим вариационный метод получения коэффициентов разностной схемы и сравним их с коэффициентами, получаемыми при конечно-разностной аппроксимации исходной дифференциальной задачи.

Пусть прямоугольной области

$$\bar{D}=\{(y,z)\in R^2 \mid y_1\le y\le y_2,\ z_1\le y\le z_2\}$$

соответствует среда с кусочно-постоянной проводимостью и постоянной магнитной проницаемостью $\mu=\mu_0$. Свойства среды по направлению оси x остаются постоянными.

1. Е-поляризация.

На границу раздела земля-воздух ($z = 0$) падает плоская однородная монохроматическая волна, вектор электрического поля которой имеет одну ненулевую компоненту E_x, изменяющуюся во времени по закону $e^{-i\omega t}$. Применительно к Е-поляризации поведение компоненты E_x в двумерной горизонтально-неоднородной среде описывается уравнением Гельмгольца:

$$\Delta E_x = k^2 E_x \tag{1}$$

где $k^2 = -i\omega\mu\sigma$ - волновое число, ω - круговая частота.

На границе Г области ω, как правило, задаются асимптотические краевые условия.

При вариационном подходе решение задачи (1) сводится к поиску экстремума функционала $\mathscr{L}$ [6]:

$$\mathscr{L} = \operatorname{Re}\frac{1}{-i\omega\mu}\iint\limits_D\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)^2 + \frac{k^2}{2}E_x^2\right]dydz \tag{2}$$

для которого уравнение (1) является уравнением Эйлера. Введем обозначение:

$$E_x := u + iv,$$

тогда (2) примет вид:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{\omega\mu}\iint\limits_D\left[-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{k^2}{2}(u^2 - v^2)\right]dydz \tag{3}$$

Воспользуемся алгоритмом получения коэффициентов разностной схемы, предложенным в работе [2] применительно к уравнению диффузии. Будем считать, что проводимость каждой ячейки сетки постоянна, и рассмотрим фрагмент сетки, изображенный на рис. I. Опуская очевидные промежуточные выкладки, для подобласти D_1. получим аппроксимацию I_1 функционала (3):

$$I_1 = -\frac{d_1}{2\omega\mu h_1}\Big[(u_0 - u_3)(v_0 - v_3) + (u_2 - u_6)(v_2 - v_6)\Big] -$$
$$-\frac{h_1}{2\omega\mu d_1}\Big[(u_0 - u_2)(v_0 - v_2) + (u_3 - u_6)(v_3 - v_6)\Big] +$$
$$+\frac{\sigma_1}{8}d_1 h_1\left(u_0^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_6^2 - v_0^2 - v_2^2 - v_3^2 - v_6^2\right),$$

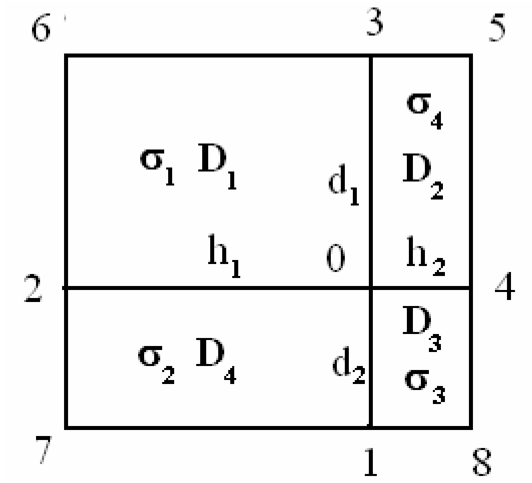

Рис. 1. Фрагмент сетки

где h_1, h_2 - шаги сетки по оси y; d_1, d_2 - шаги сетки по оси z, примыкающие к точке Q; u_i, v_i - значения функций $u(y,z)$ и $u(y,z)$ в i-том узле (i=0,…,8, см. рис 1). Выражения, аналогичные (4), получим для подобластей D_2 , D_3 и D_4. Просуммируем их, найдем производную по u_o и приравняем ее нулю. После преобразований получим:

$$a_0 v_0 - \bar{k}^2 u_0 = \sum_{i=1}^{4} a_i v_i , \tag{5}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{h_1 h_2} + \frac{2}{d_1 d_1}, a_1 = \frac{2}{h_2 \left(h_1 + h_2\right)};$$

$$a_2 = \frac{2}{d_1 \left(d_1 + d_2\right)}; \quad a_3 = \frac{2}{h_1 \left(h_1 + h_2\right)}; \quad a_4 = \frac{2}{d_2 \left(d_1 + d_2\right)};$$

$$\bar{k}^2 = \left(k_1^2 h_1 d_2 + k_2^2 h_1 d_2 + k_3^2 h_2 d_2 + k_4^2 h_2 d_1\right) / S, \tag{6}$$

$$S = \left(h_1 + h_2\right)\left(d_1 + d_2\right).$$

Еще одно уравнение, аналогичное (5), легко получить из условия равенства нулю производной по v_0 от суммы выражений типа (4).

Таким образом, коэффициенты разностной схемы получаются такими же, как и в работе [7] за исключением коэффициента $\bar{k}^2$ при u_o (или v_o), который учитывает структуру и проводимости ячеек сетки, окружающих точку 0. В качестве проводимости отнесенной к этому фиксированному узлу сетки берется средняя продольная проводимость прилегающих к нему ячеек. Следует заметить, что, исходя из физических соображений, средневзвешенные значения волновых чисел (6) успешно используются нами в программах с автоматической дискретизацией области D и проектировании на сформированную сетку заданной модели геоэлектрического разреза.

2. Н-поляризация

В соответствии с работой [6] для случая Н-поляризации функционал $\mathscr{L}$ вид:

$$\mathscr{L} = \mathrm{Re}\frac{1}{-i\omega\mu}\iint\limits_D\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)^2+\frac{k^2}{2}E_x^2\right]dydz \qquad (7)$$

Полагая

$$H_x := u + iv,$$

найдем:

$$\mathscr{L} = \iint\limits_D\left[\frac{1}{2\sigma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]+uv\omega\mu\right]dydz\,. \qquad (8)$$

Применительно к фрагменту сетки, изображенному на рис.1, получаем приближенное значение I_1 функционала $\mathscr{L}$ для подобласти D_1:

$$I_1=\frac{d_1h_1}{4\sigma_1}\left\{\left[\frac{(u_0-u_2)^2}{d_1^2}+\frac{(u_3-u_6)^2}{d_1^2}+\frac{(u_0-u_3)^2}{h_1^2}+\frac{(u_2-u_6)^2}{h_1^2}\right]-\right.$$
$$\left.\left[\frac{(v_0-v_2)^2}{d_1^2}+\frac{(v_3-v_6)^2}{d_1^2}+\frac{(v_0-v_3)^2}{h_1^2}+\frac{(v_2-v_6)^2}{h_1^2}\right]\right\}+ \qquad (9)$$
$$+\frac{\omega\mu}{4}d_1h_1\left[u_0v_0+u_2v_2+u_3v_3+u_6v_6\right]$$

Легко найти аналогичные выражения для подобластей D_2, D_3, и D_4. Сложим выражения типа (9), найдем производные по u_o и v_o и приравняем их к нулю. После преобразований получим

$$-b_0u_0+a_0v_0-\bar{k}^2=\sum_{i=1}^{4}a_iv_i\,,$$

$$b_0v_0+a_0u_0=\sum_{i=1}^{4}a_iu_i\,,$$

где

$$b_0 = \frac{\omega\mu}{4}\left(h_1 + h_2\right)\left(d_1 + d_2\right),$$

$$a_1 = \frac{T_{2z}}{h_2}, \quad a_2 = \frac{T_{2y}}{d_1},$$
$$a_3 = \frac{T_{1z}}{h_1}, \quad a_4 = \frac{T_{2y}}{d_2}; \tag{11}$$

$$a_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 .$$

Таким образом, коэффициенты системы разностных уравнений являются средние поперечные сопротивления среды по осям и с весовыми множителями, учитывающими толщину слоя в направлении течения электрического тока. Величина b_0 не зависит от свойств среды, так как мы положили $\mu = const$. Соотношения (II) отличаются от коэффициентов, получаемых по методу конечных разностей [5]. Они учитывают размеры ячеек неравномерной сетки, имеют простую физическую интерпретацию и более удобны в вычислительном отношении. При разработке программ с автоматическим выбором размеров области и шагов сетки возникает проблема присвоения ячейке сетки некоторого усредненного сопротивления, если эту ячейку пересекает граница раздела сред с различными электрическими свойствами. Ответ на этот вопрос дают полученные результаты: неоднородной по проводимости ячейке сетки нужно приписать такое постоянное сопротивление, чтобы поперечные сопротивления по координатным осям остались без изменения.

Перейдем к анализу результатов расчетов по программе[4] с коэффициентами разностной схемы в соответствии с [6] и коэффициентами (6) применительно к двум моделям среды.

I. Одномерная модель.

Трёхслойная горизонтально-слоистая среда с пара-метрами $\rho_2/\rho_1=10^4$, $h_2/h_1=20,$ $\rho_3/\rho_1=0.5$ где h_1, h_2 –мощности (первого и второго слоев, ρ_1, ρ_2, ρ_3 – удельные сопротивления первого, второго и третьего слоев соответственно. Шаги сетки по горизонтальному и вертикальному направлениям неравномерны.

Пусть $\lambda_1=\sqrt{10^7\rho_1 T}$ – длина волны в первом слое (Т – период колебаний). При значении λ_1/h_1 равном 8, значение ρ_T/ρ_1 совпадает с кажущимся сопротивлением, рассчитанным по аналитическому выражению [1], в то время как величина ρ_T/ρ_1, полученная с использованием разностной аппроксимации, даёт ошибку 11,3%. Результаты расчётов приведены в таблице I. На рис. 2 показано поведение компонент поля по профилю на поверхности земли. Число итераций для различных соотношений λ_1/h_1 приведено в таблице 2, из которой видно, что итерационный процесс завершается значительно быстрее при использовании разностной схемы с коэффициентами, полученными на основе вариационного метода.

2. Двумерная модель.

При опробовании обсуждаемого метода на модели горста [3] с параметрами $\rho_2/\rho_1=10^4, \rho_3/\rho_1=0.5$, $h_3/h_1=0.2,\ l/h_1=4$ с неравномерной сеткой, точность результатов по сравнению с разностным методом аппроксимации повышается на 15%, при этом количество итераций уменьшается в 5 раз при λ_1/h_1=3I и в 2 раза при λ_1/h_1 = 10. При использовании равномерной сетки результаты расчётов для обоих методов аппроксимации совпадают.

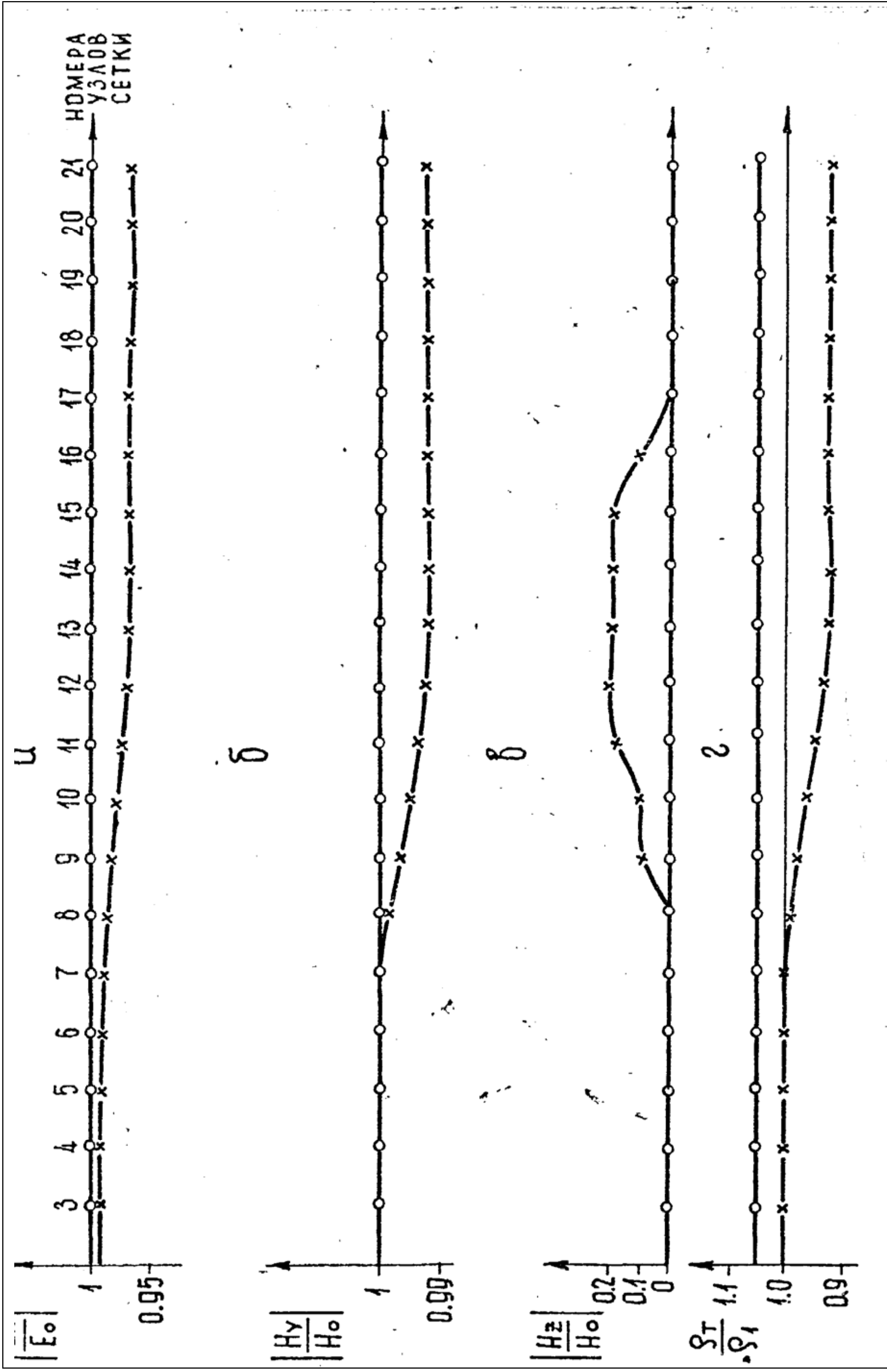

Рис. 2 . Конечно-разностная аппроксимация ×—×
Вариационная аппроксимация o—o

Таблица I

λ_1/h_1	ρ_T/ρ_1		
	Аналитическое решение	Вариационный метод	Конечные разности
4	0.846	0.849	0.800
5.7	0.790	0.791	0.782
8	1.046	1.046	6.927
11.3	1.799	1.8	1.661
16	3.370	3.371	2.707
22.6	6.138	6.138	5.784
32	9.581	9.581	9.350
45.2	10.895	10.890	10.720

Таблица.2

λ_1/h_1	45.2	32	22.6	16	11.3	8	5,7	4
конечные разности	48	40	247	>1000	*>1000*	>1000	>I000	972
Вариациион ный метод	48	40	41	23	23	24	22	38

Результаты численных экспериментов свидетельствуют о целесообразности использования вариационного подхода к построению коэффициентов системы разностных уравнений, так как он обеспечивает более быструю сходимость итерационного процесса и повышает точность расчета компонент электромагнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердичевский М.Н. "Электрическая разведка методом магнито-нурического профилирования", М.,"Недра", 1968,255 с. с илл.
2. Вазов В.,Форсайт Дж. "Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных", М.,"Иностранная литература", 1963, 487 с.
3. Дмитриев В.И.,Кокотушкин Г.А. "Альбом палеток для магнито-теллурического зондирования в неоднородных средах", Изд-во МГУ, 1971 г.,68 с.
4. Юдин М.Н., Казанцева Е.В. Электроразведка. Программа расчета магнитотеллурического поля в двумерных слоистых средах, содержащих локальные неоднородности (Е и Н-поляризация), Изд-во ВНИИГеофизики, М.,1977г., 36 с.
5. Jones F.V., Pascoe L. J. A general computer program to determine the perturbation of alternating electric currents in a two-dimensional model of a region of uniform conductivity with embeddeed inhomogeneity. Geophys. J.R. astr, Soc., v.24, 1971, pp. 3-3O.
6. Rodi W.L. A thechnique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data. Geophys.J.R. Astr. Soc.,v. 44,1976, pp. 483-506.
7. Williamson K., Hewlett C., Tammemagi H. J. Computer modeling of electrical conductivity structures. J.B. Astr. Soc., v. 37, pp. 533-536.

Печатается в соответствии с решением редколлегии журнала "Известия высших учебных заведений", раздел "Геология и разведка".
от 12.02.81

В печать 2.4.81.
Тир.1 Цена 96 коп Зак. 32792

Производственно издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403
