

ЮДИН М.Н. (МГРИ-РГГРУ)

**МНОГОМАСШТАБНЫЕ
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
ТРАНСФОРМАЦИИ В КОНТЕКСТЕ
ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ**

За последние 20 лет в прикладной математике был развит и оформился в самостоятельное направление раздел, получивший название «вейвлет-преобразование» (wavelet transform)[1]. Автор этого термина Жан Морле. Свой знаменитый “вейвлет” он придумал и применил при обработке данных сейсморазведки [Goupilland at all, 1985]. Начиная с девяностых годов прошлого века, на основе идей вейвлет-преобразования сигналов начал интенсивно развиваться математический аппарат для многомасштабного анализа многомерных данных[2]. В настоящее время преобразование данных этого класса играет фундаментальную роль в теории аппроксимации.

[1] www-stat.stanford.edu/~wavelab,

www.mathsoft.com/wavelets.html,

<http://www.wavelet.org>

[2] www.isye.gatech.edu/~beamlab

Одномерные вейвлеты оперируют двумя основными параметрами:

- масштабом (scale) и
- положением (location).

Двумерные вейвлеты, кроме того, имеют фиксированное количество направлений, по которым они имеют повышенную чувствительность в процессе анализа многомерных данных. Но в реальных сигналах могут присутствовать совершенно другие направления, которые нужно подчеркнуть посредством трансформации данных. В последнее десятилетие появилось большое число публикаций, посвященных классу трансформаций многомерных данных, которые включают дополнительный параметр – ориентацию линейных сегментов. Наряду с алгоритмами многомасштабного анализа сигналов, индуцированными вейвлетами, этот класс интегральных трансформаций пронизывают идеи, содержащиеся в преобразовании Радона, – математическом аппарате, лежащем в основе компьютерной томографии. В отличие от вейвлетов, трансформации, о которых здесь пойдет речь, в число основных параметров включают три элемента:

- масштаб (scale),
- положение (location) ,
- ориентацию (orientation)

линейных сегментов данных.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТРАНСФОРМАЦИЙ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ МНОГОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА

Приведем перечень основных модификаций интегральных преобразований рассматриваемого класса:

- beamlet transform (бимлет-преобразование),
- curvelet transform (курвлет-преобразование),
- ridgelet transform (риджлет-преобразование),
- bandelet transform (бендлет-преобразование).

Эти и подобные им трансформация двумерных и многомерных данных обладают высокой чувствительностью и точностью при обнаружении и выделении объектов и их границ. Для краткости иногда будем называть их одним именем

- бимлет-преобразования.

Основные ссылки делаются на сайты в Интернете.

Beam – луч, beamlet – маленький луч, лучик, штрих, отрезок

Алгоритмы фильтрации данных основаны на выборе порога для коэффициентов интегральных преобразований, посредством которого часть коэффициентов заменяется нулями (процедура Thresholding). После этого выполняется реконструкция данных посредством соответствующего обратного преобразования. Выбор оптимального порога является достаточно сложной математической задачей. По этой теме имеется ряд интересных публикаций. Она нашла удовлетворительное решение при сжатии данных и борьбы с шумом посредством вейвлет-анализа. Некоторую информацию по проблеме можно найти в книгах [Дьяконов, 2004; Смоленцев, 2005] и описании алгоритмов программ Wavelet Toolbox СКМ MATLAB.

НЕПРЕРЫВНОЕ ОДНОМЕРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Пусть фиксирована функция $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, имеющая нулевое интегральное среднее

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (1)$$

Если σ - параметр масштаба, а τ - параметр сдвига, то можно записать:

$$\psi_{\sigma, \tau}(t) := \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right) \quad (2)$$

Непрерывное вейвлет-преобразование (CWT) есть отображение W_ψ , определяемое по формуле

$$(W_\psi f)(\sigma, \tau) \equiv \tilde{f}(\sigma, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)} dt, \quad (3)$$

где $\sigma \in (0, \infty)$ - параметр масштаба $\tau \in \mathbb{R}$ - параметр сдвига.

Обратное вейвлет-преобразование (ICWT) дает интеграл

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi f)(\sigma, \tau) \psi_{\sigma, \tau}(t) \frac{1}{\sigma^2} d\sigma d\tau. \quad (4)$$

Здесь

$$0 < C_\psi := \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|} < \infty. \quad (5)$$

Последнее соотношение называют условием допустимости для вейвлета $\psi(t)$.

ДИСКРЕТНОЕ ОДНОМЕРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Положим $\sigma = 2^j$ и $\tau = k2^j$, где $j, k \in \mathbb{Z}$. Это приводит к следующей дискретизации вейвлетов:

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^{j/2}} \psi(2^{-j}t - k) \quad (5)$$

Система функций (5) образует ортонормированный базис в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Тогда дискретное вейвлет-преобразование произвольного сигнала запишется в виде

$$\tilde{f}_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2^{j/2}} \psi(2^{-j}t - k) dt \quad (6)$$

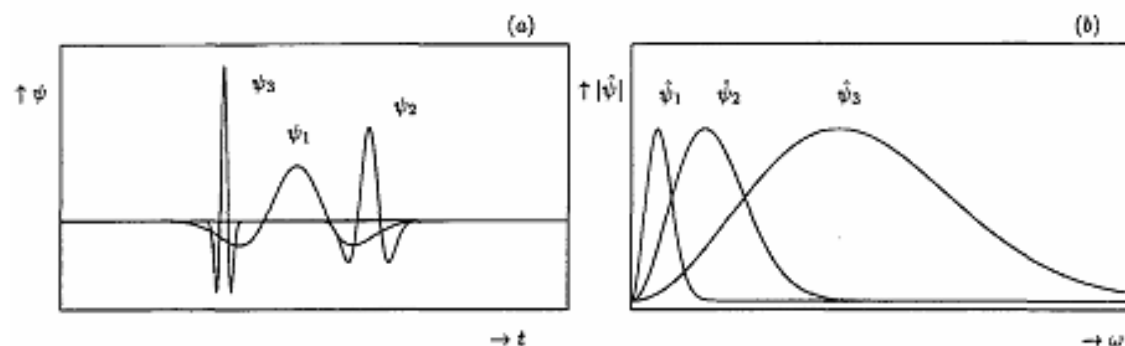


Рис. 1. Три МНАТ-вейвлета:

$$\psi_1 = \psi_{\sigma,0}, \quad \psi_2 = \psi_{\sigma/2,\tau_0} \quad \text{и} \quad \psi_3 = \psi_{\sigma/4,-\tau_0}:$$

(a) во временной области

(b) в частотной области.

КРАТНО-МАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ

Последовательность $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ замкнутых подпространств в

$L^2(\mathbb{R})$ называется *кратно разрешающим анализом* (КРА), если

$$1. V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad 2. \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}), \quad 3. \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\},$$

$$4. f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1}, \quad 5. f(\cdot) \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

6: $\exists \varphi \in V_0 : \{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – ортонормированный базис (ОНБ) в пространстве V_0 .

Функция φ называется *масштабирующей функцией* (scaling function) КРА. Свойство 4 позволяет по одному подпространству V_0 построить все семейство $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ при каждом фиксированном j .

Система функций $\{\varphi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, – ОНБ в пространстве V_j .

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

В частности, если $\varphi(t) \in V_0$, $\varphi(2t) \in V_1$, то получим ряд Фурье

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2t - k), \quad (9)$$

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{1k} \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \overline{\varphi(2t - k)} dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

ВЕЙВЛЕТЫ ψ И ПОДПРОСТРАНСТВА W

Пользуясь условием 1, для любого $j \in \mathbb{Z}$ определяем W_j как ортогональное дополнение V_j до V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (11)$$

Теорема (без доказательства). Для всякого КРА $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ в $L^2(\mathbb{R})$ существует такой вейвлет ψ , что система $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — ОНБ в W_0 . Более того, система функций $\{\psi_k(\cdot)\} := \{2^{j/2} \psi(2^j \cdot - k)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ является ОНБ в $L^2(\mathbb{R})$.

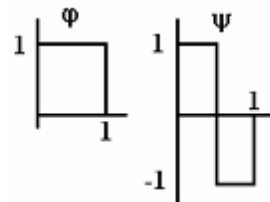


Рис. 3.
Масштабирующая
функция и вейвлет Хаара

Пример. Вейвлет Хаара. Масштабирующая функция $\varphi(t)$ и вейвлет $\psi(t)$ (рис. 3) определяются формулами:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \notin [0, 1] \end{cases}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, 1/2), \\ -1, & t \in (1/2, 1), \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

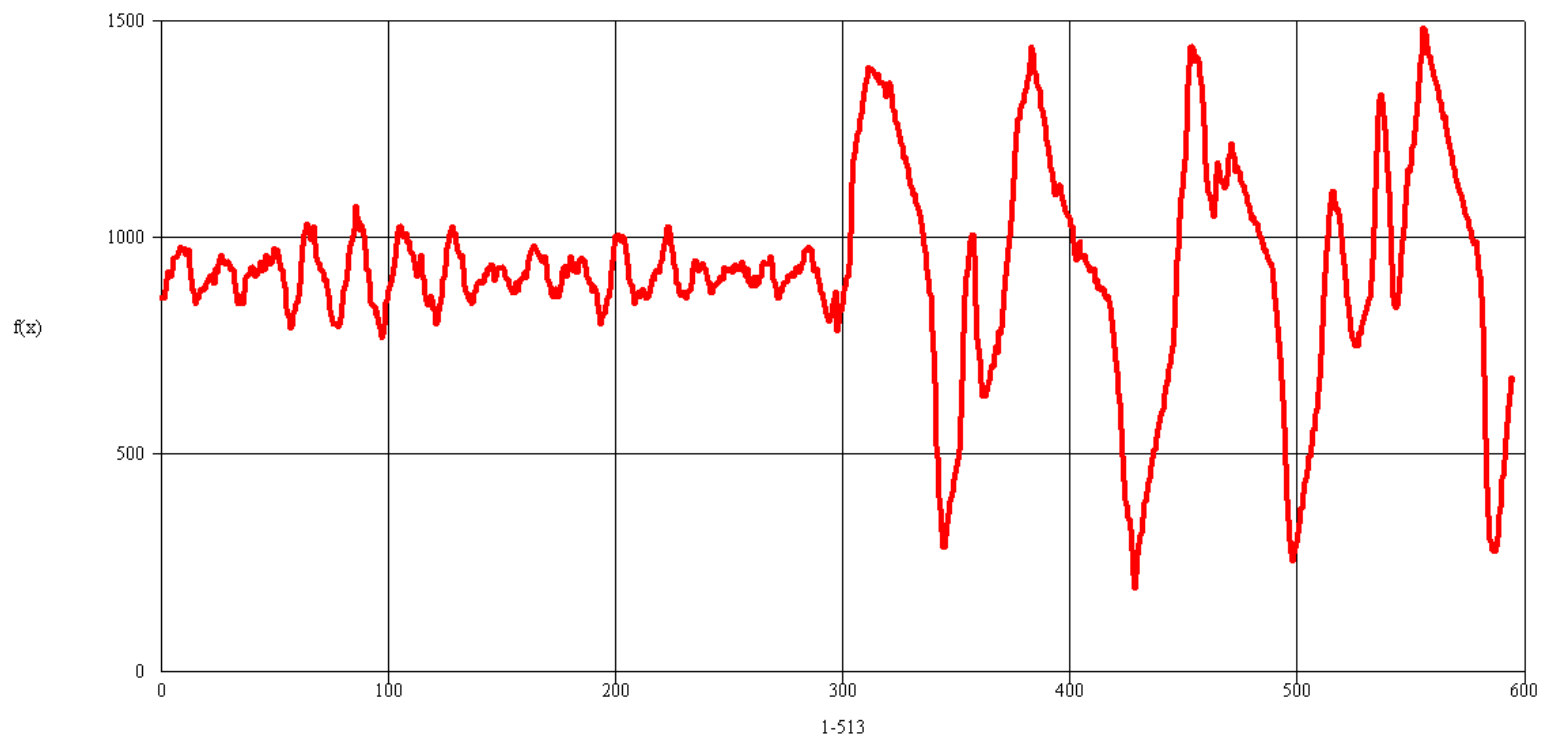
Коэффициенты равны

$$h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}, h_k = 0, k \neq 0, 1; g_0 = 1/\sqrt{2}, g_1 = -1/\sqrt{2}.$$

Поскольку ψ является элементом подпространства V_1 , существует числовая последовательность $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такая, что

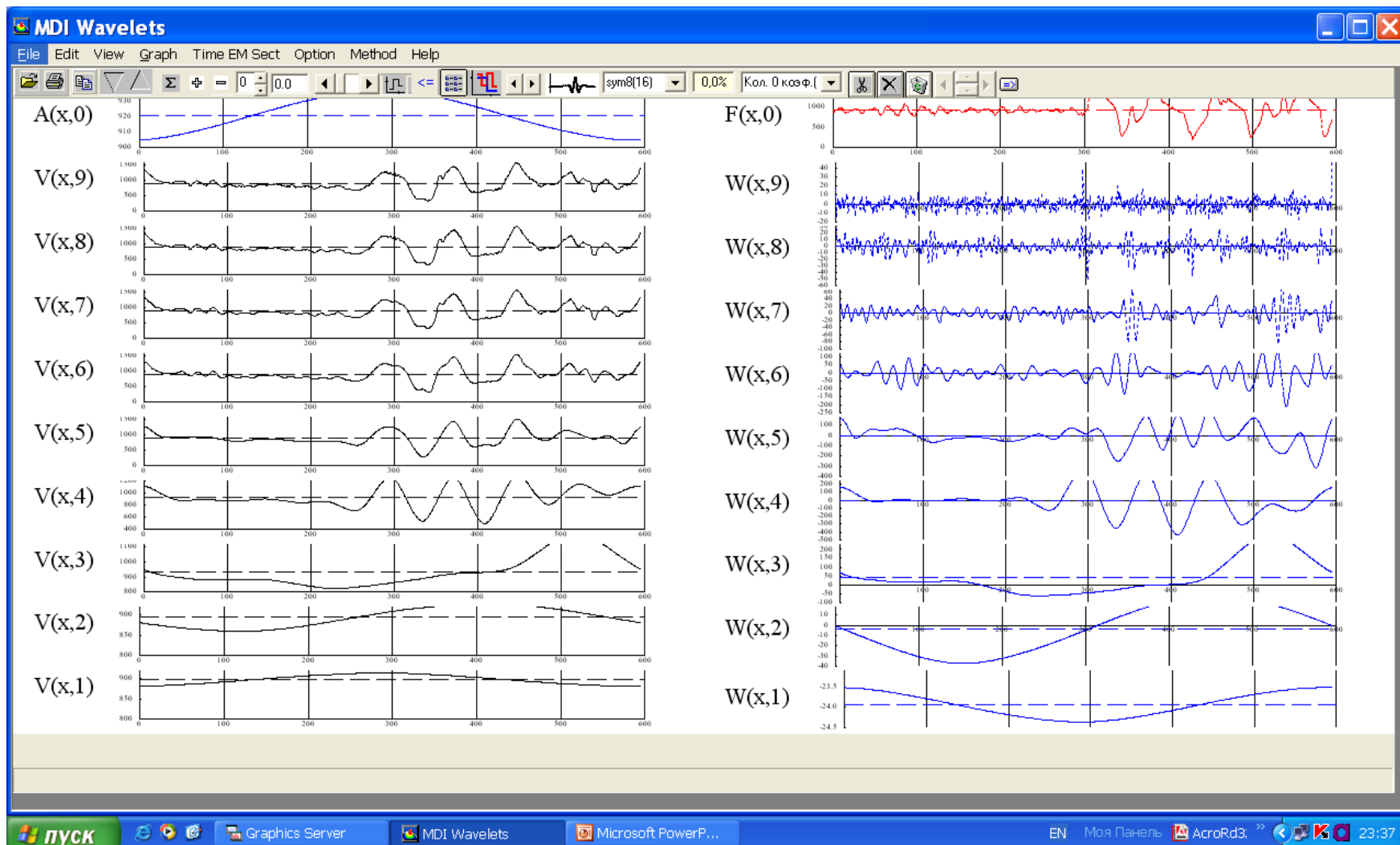
$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k). \quad (12)$$

С. Малла показал, что один из возможных выборов последовательности $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ в (12) является $g_k = (-1)^k h_{1-k}$.



Сейсмологический сигнал

ОДНОМЕРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ: КРА КРАТНО-МАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ СЕЙСМОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ



Аппроксимации сигнала

Детали различного уровня

ОДНОМЕРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

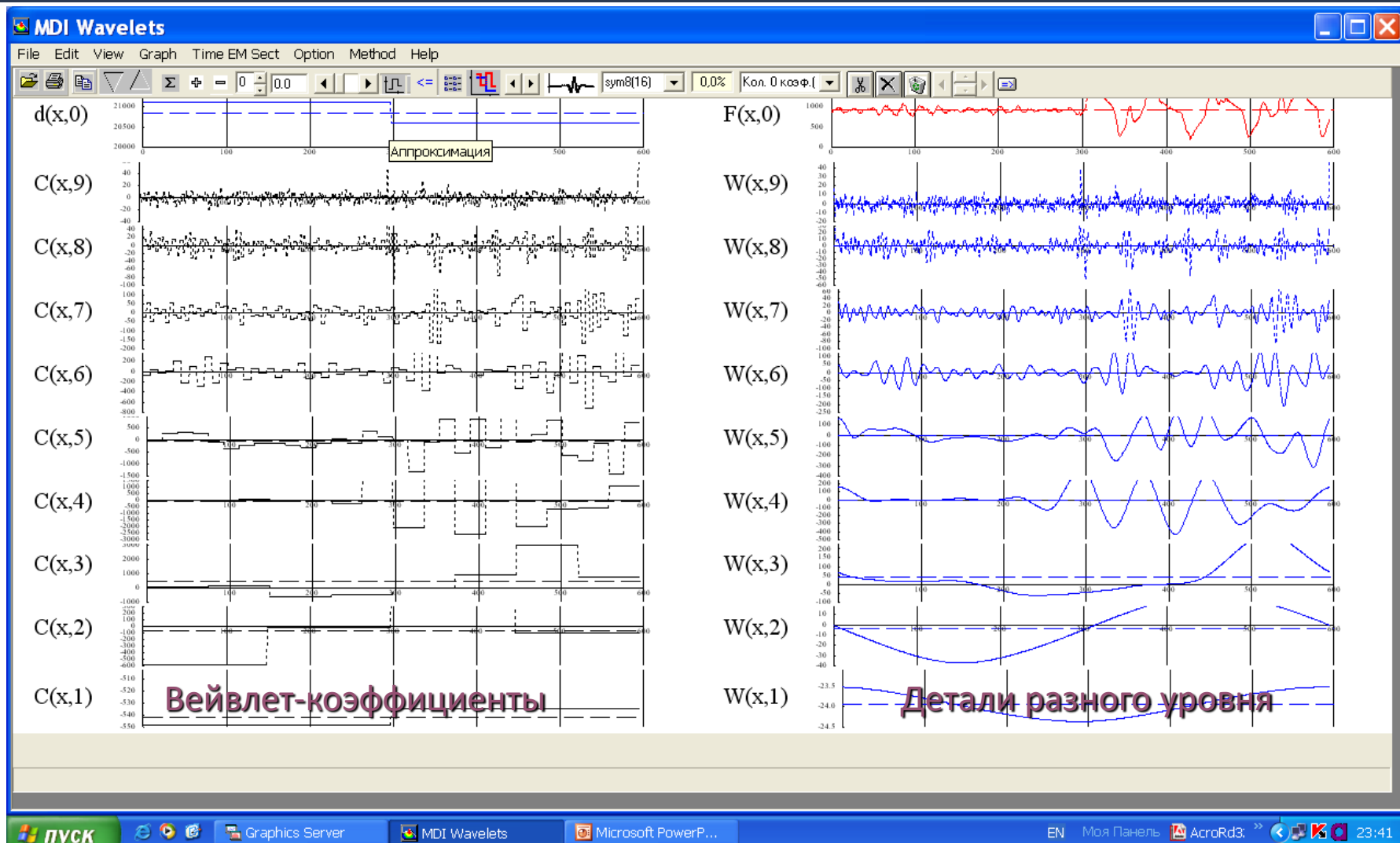
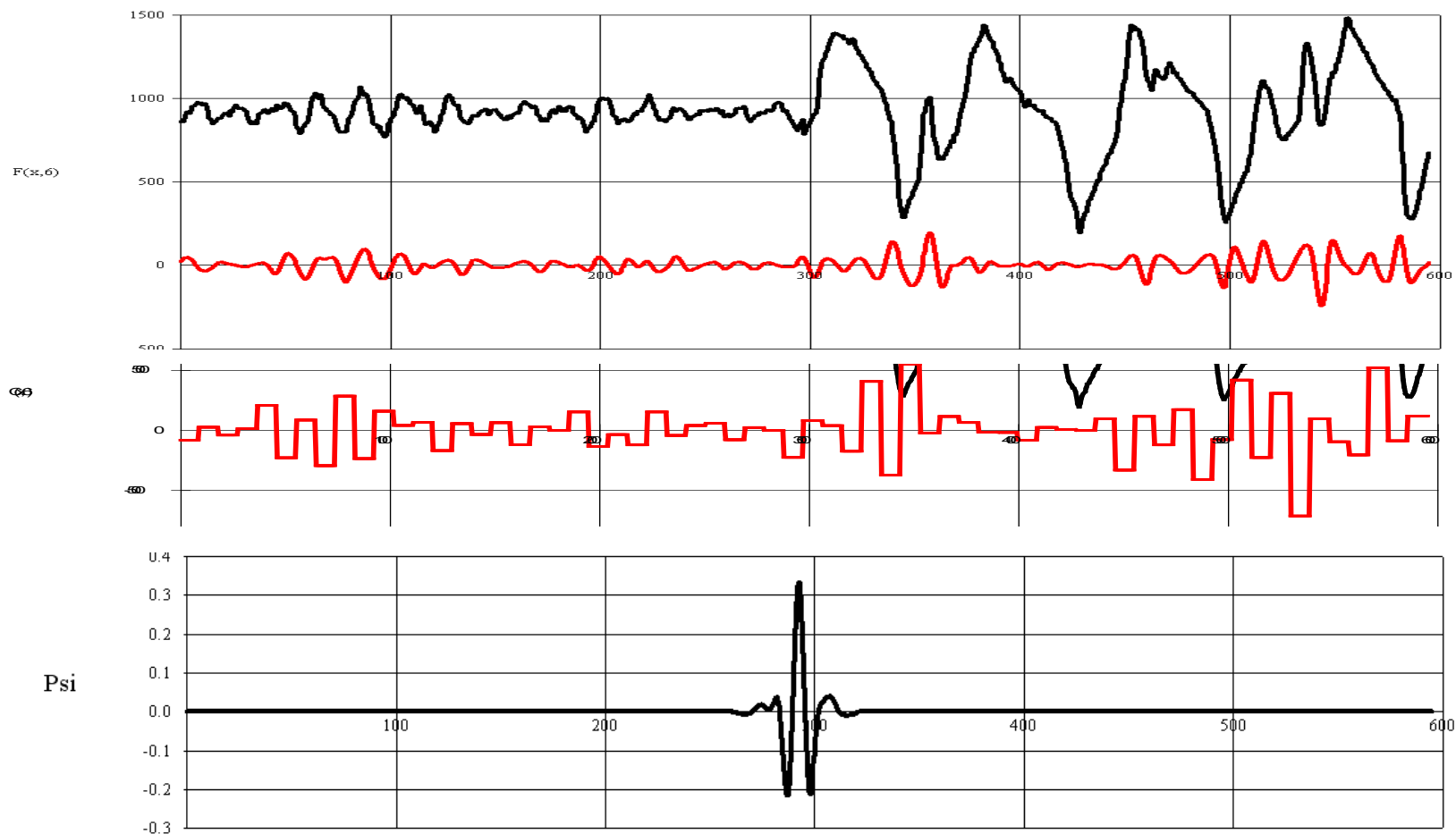


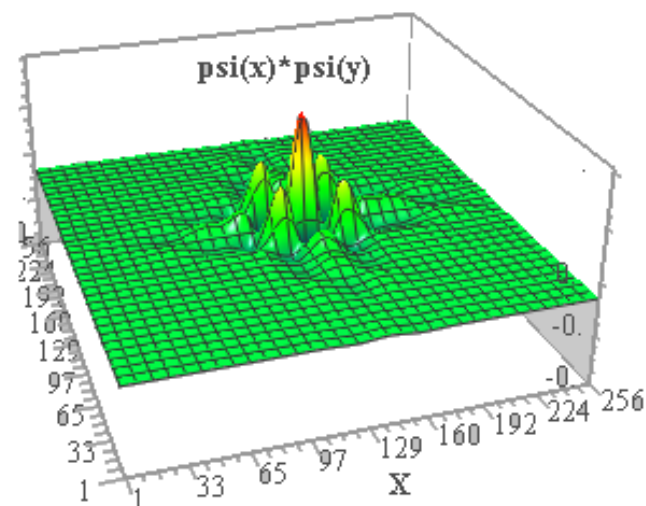
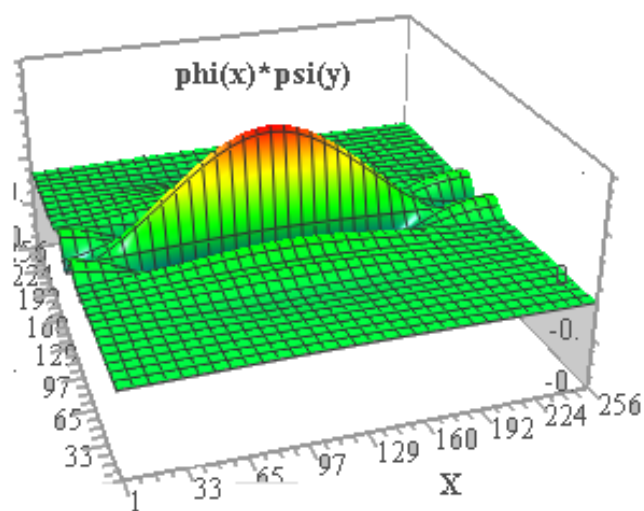
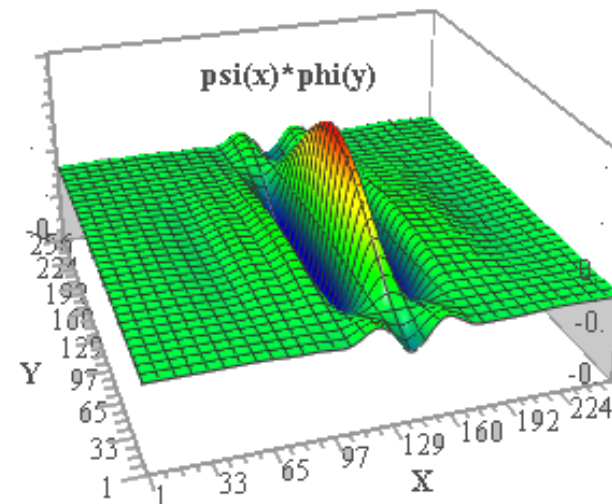
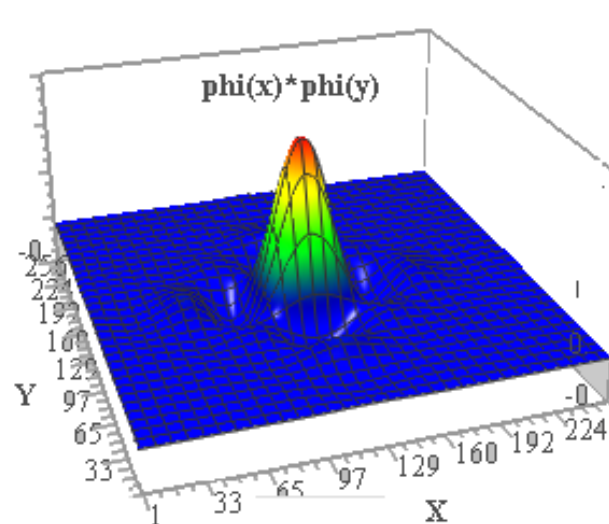
Иллюстрация кратно-разрешающего анализа (КРА)

ОДНОМЕРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕБРАЗОВАНИЕ



Сверху вниз изображены: сейсмологическая трасса,
детали и вейвлет-коэффициенты одного уровня, вейвлет $\text{sym8}(16)$.

ДВУМЕРНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ И МАСШТАБИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

Преобразование названо именем Радона, который первым (в 1917 г.) рассмотрел соответствующее обратное преобразование (IRT). Процедуры прямого и обратного дискретного преобразования Радона включены в состав СКМ MATLAB (процедуры *radon*, *iradon*).

Двумерное преобразование Радона (RT) функции состоит в ее интегрировании вдоль прямых. Множество лучей, пересекающих модель в различных направлениях, содержит достаточно информации для восстановления этой модели.

Непрерывное преобразование Радона (CRT).

Прямое преобразование. Непрерывное преобразование Радон есть отображение функций $f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ в функции $Rf(t, \theta)$, $t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, \pi)$, определяемое формулой

$$Rf(t, \theta) \equiv \tilde{f}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \quad (1.15)$$

где δ есть функция Дирака.

Обратное преобразование. Функцию $f(x, y)$ можно реконструировать из $Rf(t, \theta)$ посредством формулы

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \tilde{f}(t, \theta) e^{2i\pi t(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta |dt| \quad (16)$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Имеется тесная связь между преобразованием Радона и двумерным преобразованием Фурье, устанавливаемая теоремой о центральном проецировании (*projection-slice theorem*). Согласно этой теореме, для фиксированного угла наклона прямой $\theta = \theta_0$ функция $Rf(t, \theta_0)$ как функция одной переменной t может быть получена в результате выполнения следующих шагов.

- (а) Выполнение двумерного преобразования Фурье F_2 :

$$\hat{f}(k_1, k_2) = F_2[f(x, y)].$$
- (б) Проецирование двумерного спектра на прямую, проходящую под углом θ_0 через начало координат спектральной плоскости (k_1, k_2) :

$$\hat{f}_{\theta_0}(\lambda) \equiv \hat{f}(\lambda \cos \theta_0, \lambda \sin \theta_0), -\infty < \lambda < \infty.$$

Дискретное преобразование Радона (DRT) основано на использовании быстрого преобразования Фурье (FFT).

Ridge - ребро; гребень. Название "*ridgelet*" было введено в 1970 году Logan и Shepp в связи с математикой, используемой в вычисленной томографии. Риджлет-преобразование тесно связано с одномерным вейвлет-преобразованием и преобразованием Радона.

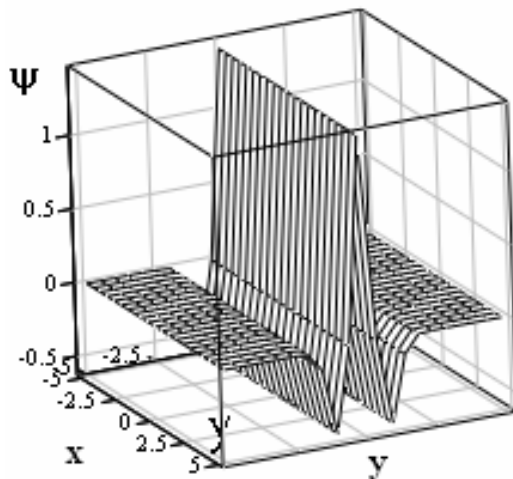
Риджлет-функции. Пусть функция $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (1), (2) (5). Для любых $\sigma > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\theta \in [0, 2\pi)$ определяется двумерный риджлет $\psi_{\sigma, \tau, \theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ посредством

$$\psi_{\sigma, \tau, \theta}(x, y) = \sigma^{-1/2} \psi((x \cos \theta + y \sin \theta - \tau) / \sigma). \quad (17)$$

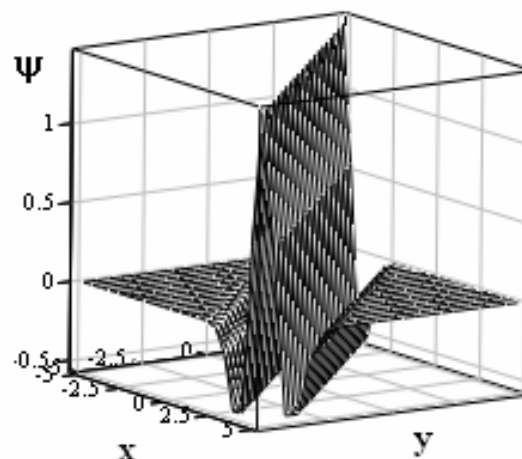
Риджлет постоянен вдоль прямых $t = x \cos \theta + y \sin \theta$, $t = \text{const}$. Таким образом, графиком риджлета является цилиндрическая поверхность, направляющей линией для которой является вейвлет (рис. 4). Сечение этой поверхности плоскостью, перпендикулярной образующей, является вейвлетом.

ГРАФИКИ РИДЖЛЕТ-ФУНКЦИЙ

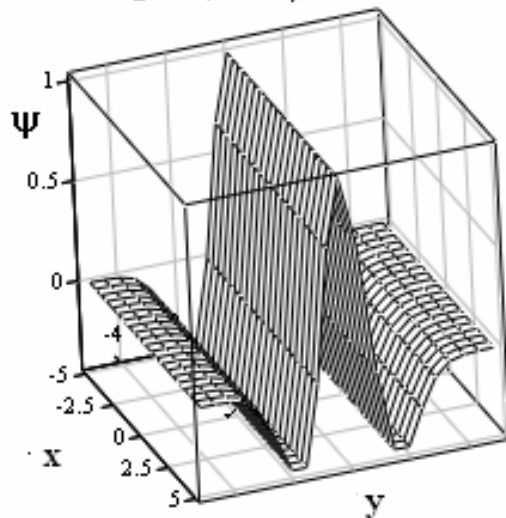
$$\sigma = 1/2, \tau = 0, \theta = \pi/2$$



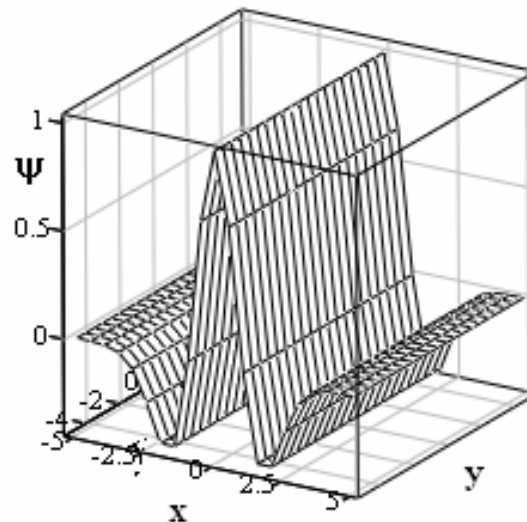
$$\sigma = 1/2, \tau = 0, \theta = \pi/4$$



$$\sigma = 1, \tau = 0, \theta = \pi/2$$



$$\sigma = 1, \tau = 0, \theta = 0$$



ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ НЕПРЕРЫВНОЕ РИДЖЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Прямое риджлет-преобразование. Пусть дана интегрируемая функция двух переменных $f(x, y)$. Ее риджлет-преобразование определяется посредством интеграла

$$\mathcal{R}_f(\sigma, \tau, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \psi_{\sigma, \tau, \theta}(x, y) dx dy \quad (18)$$

Обратное риджлет-преобразование. Справедлива точная формула реконструкции (IRT) (обратного преобразования)

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_f(\sigma, \tau, \theta) \psi_{\sigma, \tau, \theta}(x, y) \frac{d\sigma}{\sigma^3} d\tau \frac{d\theta}{4\pi}. \quad (19)$$

Риджлет-анализ можно трактовать как вейвлет-анализ в области Радона. RT состоит в применении 1-D вейвлет-преобразования к срезам преобразования Радона, где угловая переменная θ является постоянной, а t изменяется:

$$\mathcal{R}_f(\sigma, \tau, \theta) = \int \mathcal{R}f(\theta, t) \sigma^{-1/2} \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right) dt. \quad (18_1)$$

КУРВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (CURVELET TRANSFORM)

(Curve – кривая; изгиб, curvelet – маленький изгиб).

Курвлет-преобразование выполняет многомасштабный анализ сигнала и состоит из выполнения двух шагов:

- двумерное дискретное вейвлет-преобразование данных (WT 2D).
- на каждом фиксированном масштабе, полученном в результате применения WT 2D, выполняется дискретное риджлет-преобразование.

Схема этого преобразования изображена на рис. 6.

СХЕМА КУРВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

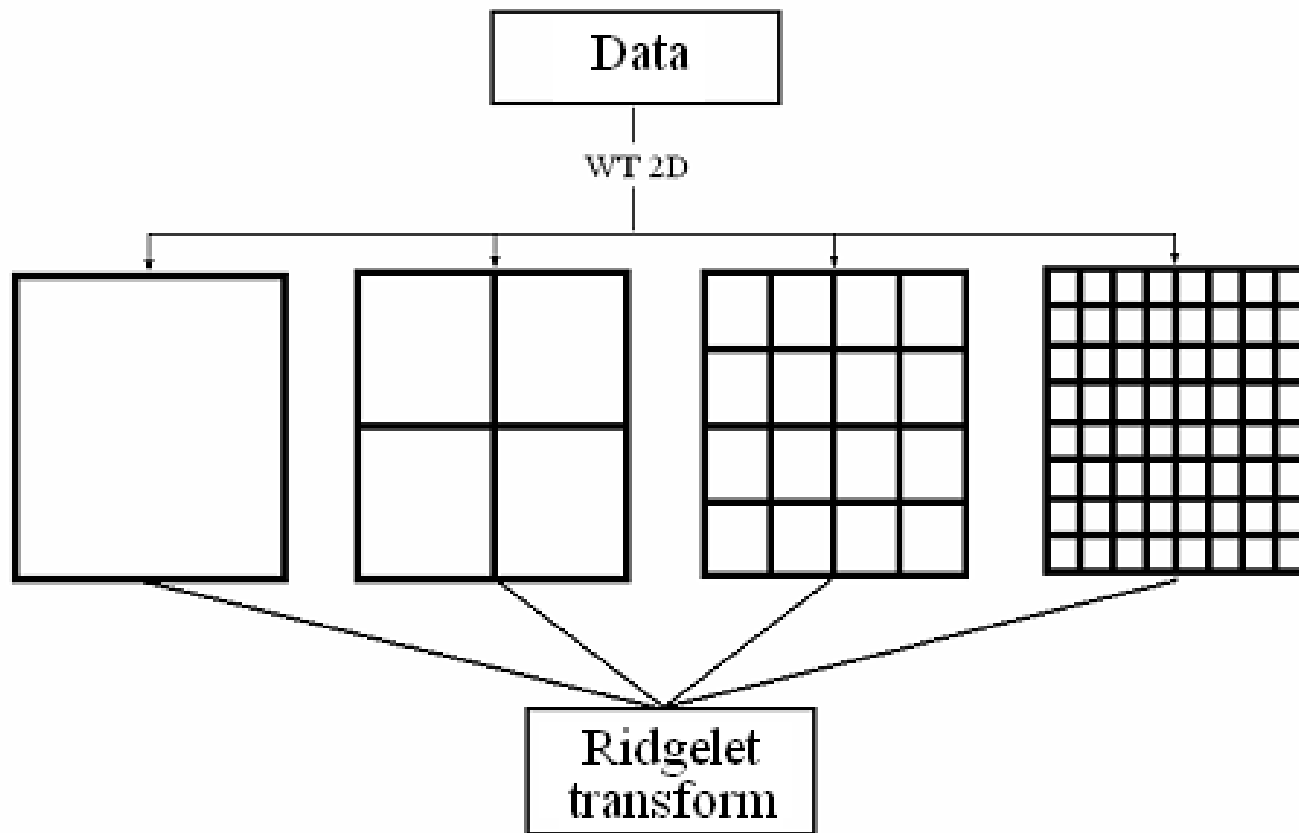


Рис.6. Алгоритм курвлет-преобразования

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ КУРВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ



Слева рисунок с шумом, справа – рисунок после курвлет-фильтрации.

Особенно хорошо восстановлены края шляпы и другие границы.

Однако вблизи граней можно увидеть осциллирующие структуры (артефакты), которых не было в исходном изображении



БИМЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (BEAMLET TRANSFORM)

D.L.Donoho & X.Huo Beamlets and Multiscale Image Analysis.

(Beam – луч, beamlet – маленький луч, лучик, штрих)

Бимлет-преобразование реализует идею многомасштабного анализа данных (изображений), в которых линейные сегменты играют роль, аналогичную роли, которую играли точки в вейвлет-анализе.

Бимлет-структура имеет 5 ключевых компонент.

1. Бимлет-словарь – диадно-организованная библиотека линейных сегментов в семействе позиций, ориентаций и масштабов, которые дают многомасштабную аппроксимацию набора всех линейных сегментов.
2. Бимлет-преобразование образа $f(x;y)$ - набор всех интегралов по линиям изображения вдоль бимлетов из бимлет-словаря.
3. Бимлет-пирамида является коллекцией коэффициентов бимлет-преобразования, расположенных в структуре данных с иерархической многомасштабной природой.
4. Бимлет-граф имеет структуру графа, в которой вершины соответствуют угловым пикселям в основном изображении, а грани соответствуют бимлетам, объединенным в пары таких угловых пикселей. Путь через этот граф соответствует многоугольнику в оригинальном изображении.
5. Бимлет-алгоритмы извлекают данные из бимлет-пирамиды по пути, определенном структурой бимлет-графа, например, алгоритмы движения по сети или алгоритмы рекурсивного бинарного разделения.

Используя первые четыре компонента бимлет-структуры, мы можем сформулировать базирующиеся на бимлетах алгоритмы, которые способны идентифицировать и извлекать бимлеты и цепи бимлетов со специальными свойствами

ДИСКРЕТНОЕ БИМЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

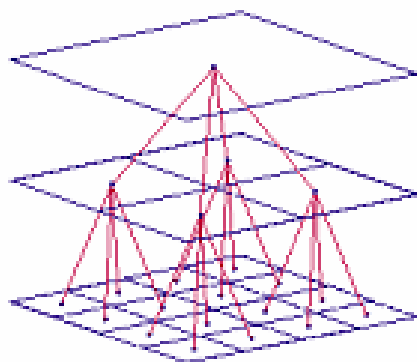


Рис. 7а

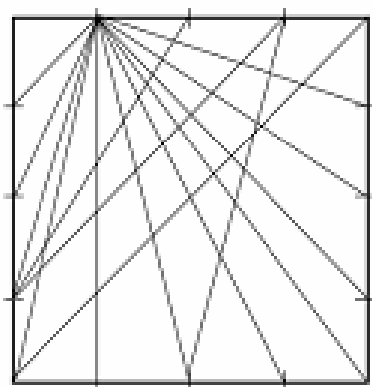


Рис. 7б

Изображение разбивается на диадическую последовательность квадратов (рис. 7а). Большие квадраты отвечают за грубые элементы изображения, квадраты меньших размеров – за детали. Для каждого такого квадрата на его сторонах отмечаются равноудаленные вдоль периметра точки, включая вершины квадрата, и затем эти точки попарно соединяются отрезком (рис. 7б). Полученный набор отрезков образует совокупность (коллекцию) прямых для анализа части изображения внутри этого квадрата, а их объединение для всех квадратов – совокупность прямых, построенных для анализа изображения.

ДИСКРЕТНОЕ БИМЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Количество точек на периметре квадрата выбирается произвольно; чем их больше, тем лучше выполняется анализ изображения. Если какой-либо квадрат является однородным, его нет смысла разбивать далее на более мелкие квадраты, ибо детализировать уже нечего.

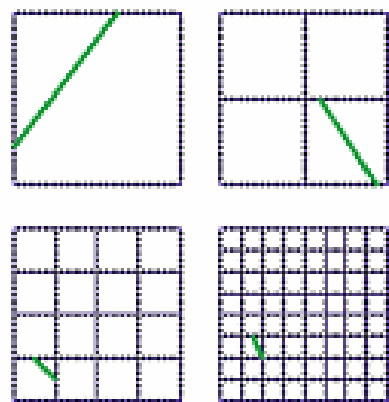


Рис. 8а

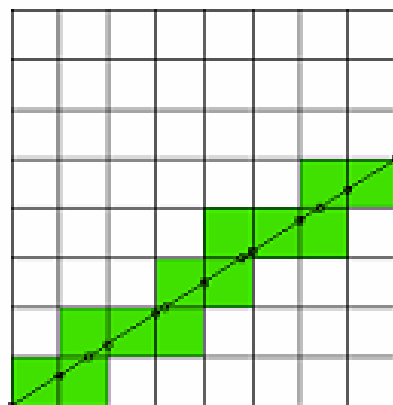


Рис.8б

В результате выполнения прямого бимлет-преобразования изображение можно представить как набор штрихов различного размера, направления и расположения (а также яркости) (рис. 8а).

ДИСКРЕТНОЕ БИМЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

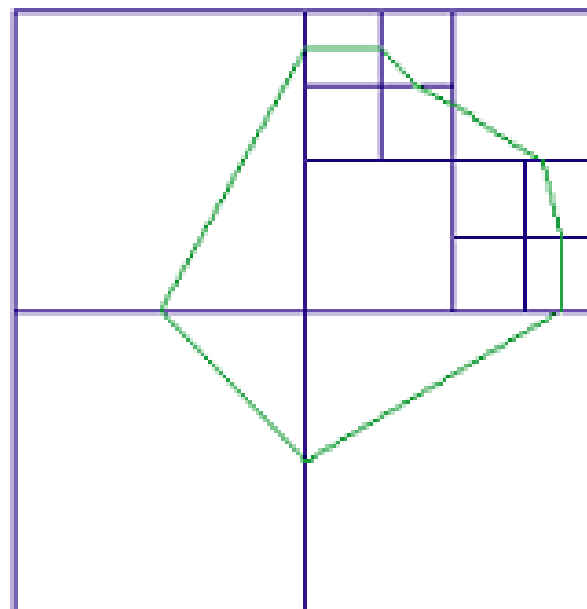
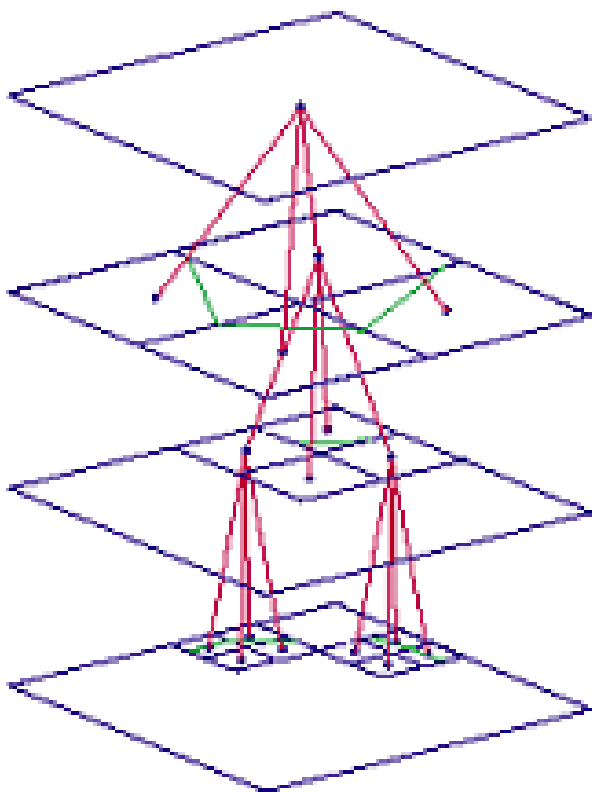
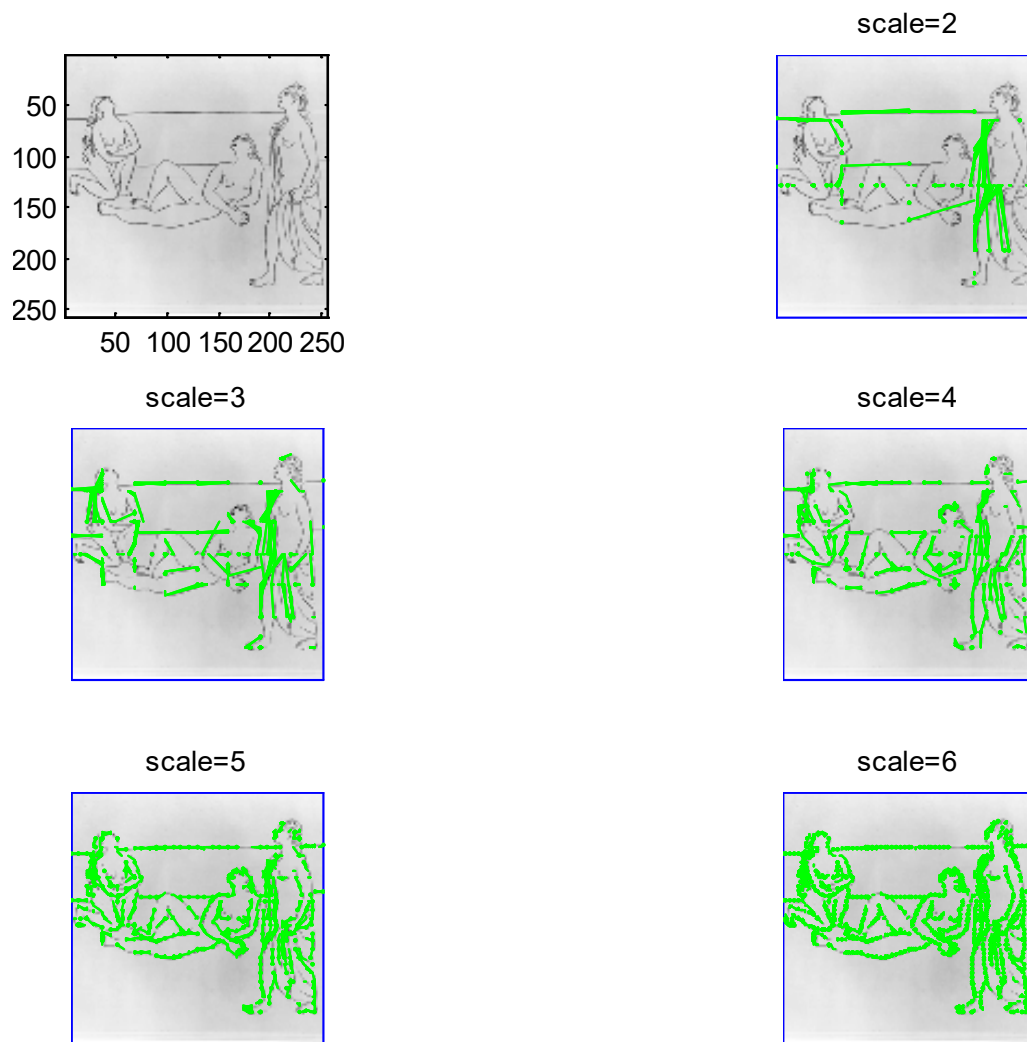


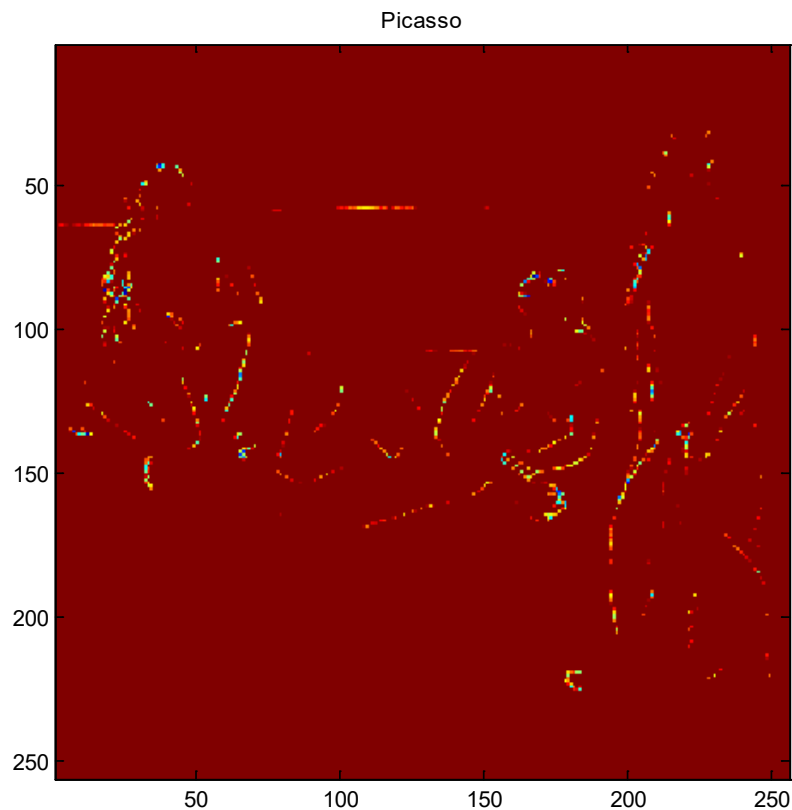
Рис. 9. Схема бимлет-преобразования (слева) и результат его работы (справа)

БИМЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

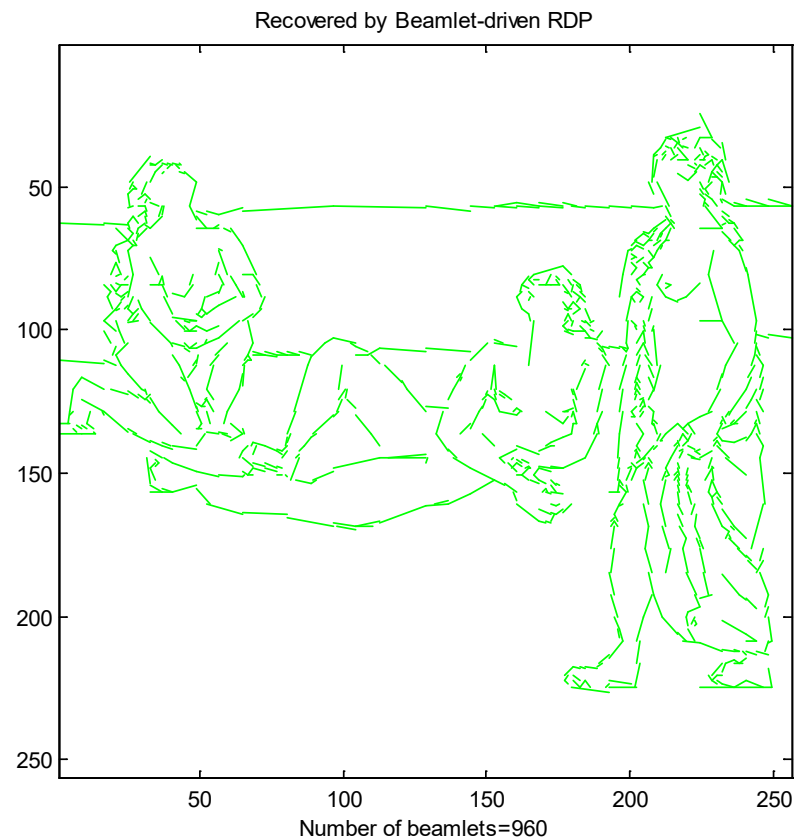


Пример 1. Картина Пикассо. Выделение границ фигур на разных масштабах путем выбора коэффициентов, превышающих некоторый порог

БИМЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. ФИЛЬТРАЦИЯ ДАННЫХ.



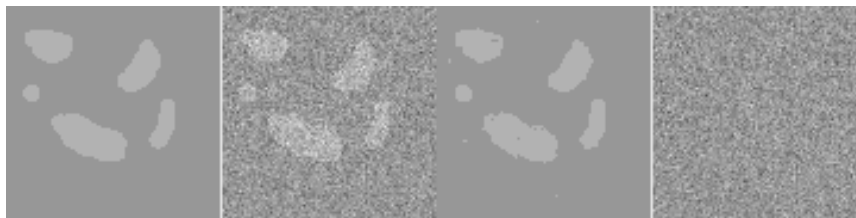
Картина Пикассо, осложненная шумом



Реконструкция картины посредством
бимлет-фильтрации

БИМЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

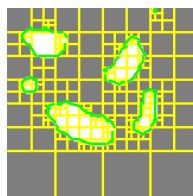
original noisy image wedgelet approximation residual



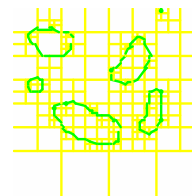
original image



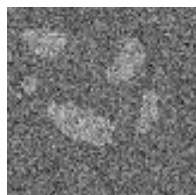
Best Partitioning



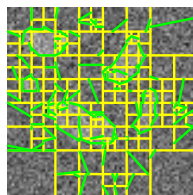
Best Partitioning only



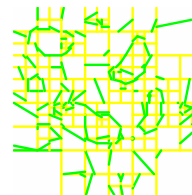
noisy image



Best Partitioning



Best Partitioning only



Пример 3. Фильтрация данных посредством бимлетов на основе двоичного разделения области на части

ПРИМЕРЫ ФИЛЬТРАЦИИ ДАННЫХ

Алгоритмы фильтрации данных основаны на выборе порога для коэффициентов интегральных преобразований, посредством которого часть коэффициентов заменяется нулями (Thresholding). После этого выполняется реконструкция данных посредством соответствующего обратного преобразования. При этом выбор оптимального порога является очень важной и сложной математической задачей.

Мы рассматриваем задачу борьбы с шумом (denoising), основанную на идее комбинирования различных трансформаций. Каждая из них в отдельности может не дать такие результаты, которые можно получить при их совместном использовании. Удачное комбинирование позволяет освободиться от главных артефактов, которые могут быть велики при стандартных правилах порогового усечения значений коэффициентов.

Иногда полезно включить в предварительный этап обработки сингулярное разложение двумерных данных (SVD) для выделения компонент, связанных полезным сигналом.

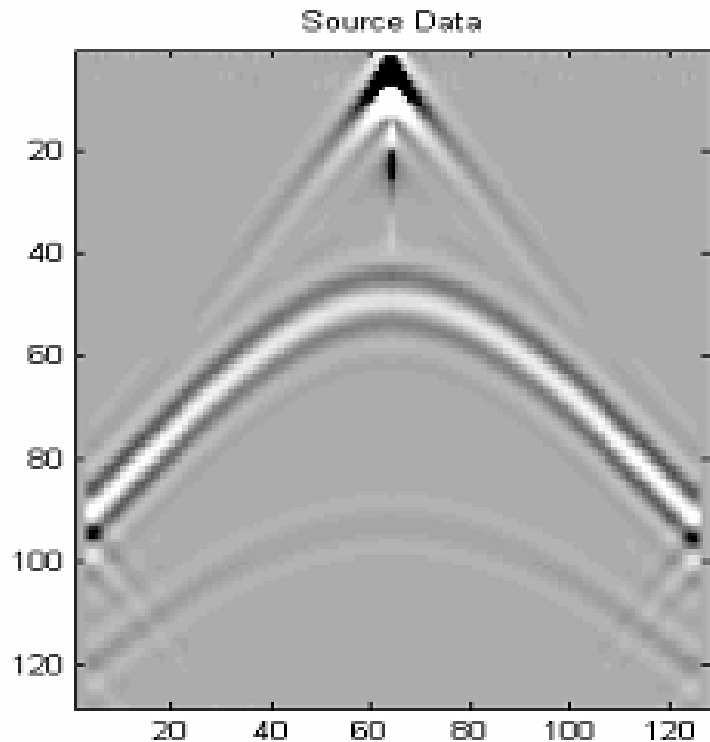


Рис. 10. Исходные данные.
Синтетическая сейсмограмма

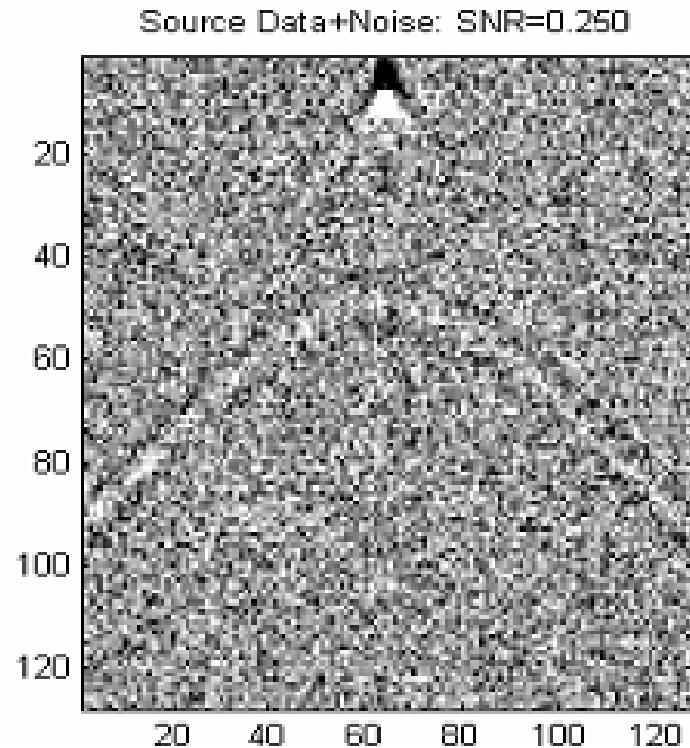


Рис. 11. Синтетическая сейсмограмма,
Осложненная шумом. Отношение
сигнал/шум равно 1/4 (SNR=1/4).

СРАВНЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

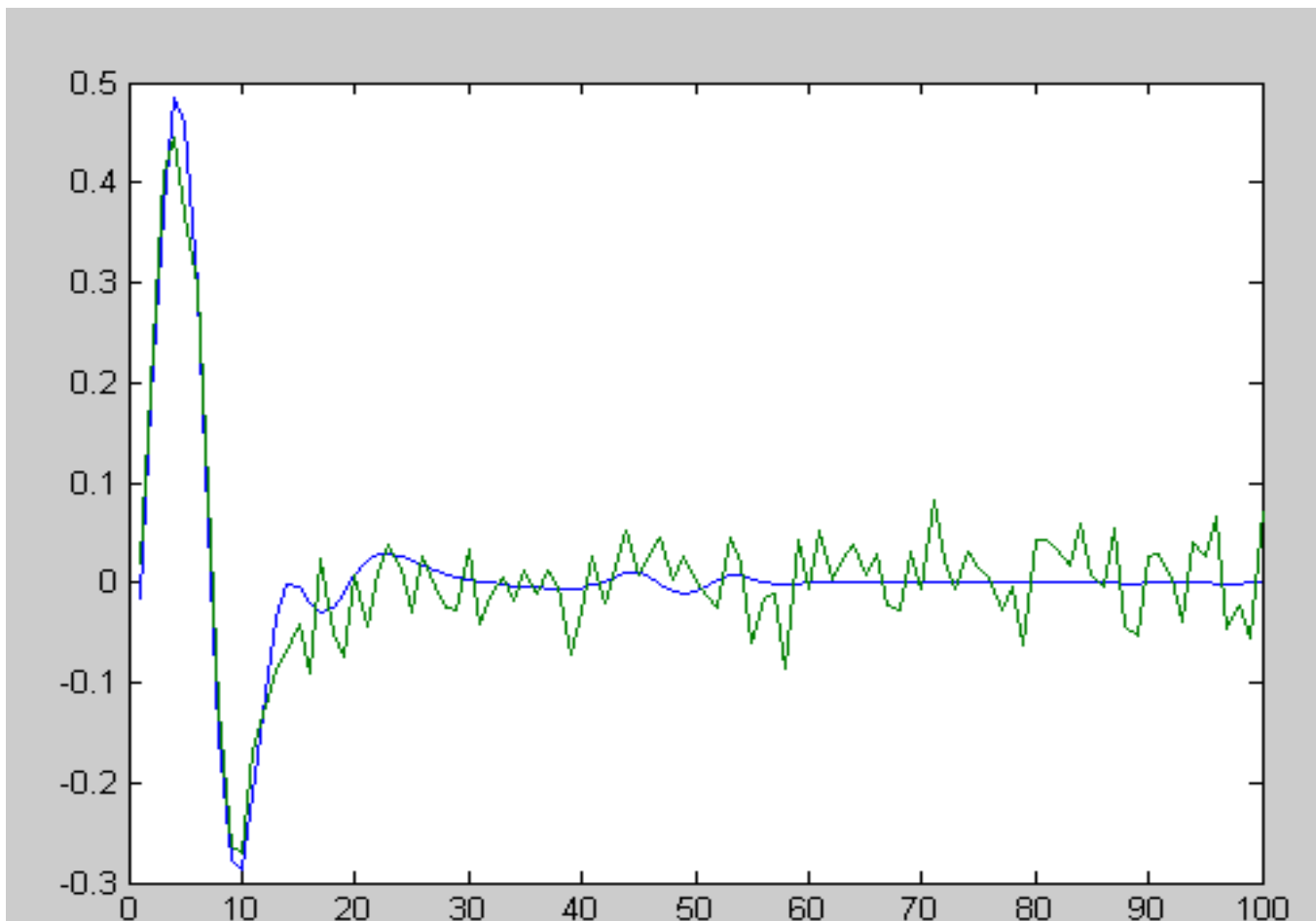


Иллюстрация соотношения полезного сигнала (график синего цвета) и того же сигнала с добавлением шума (график зеленого цвета) на примере одной сеймотрассы, проходящей через центр рис. 10 и 11.

ФИЛЬТРАЦИЯ ДАННЫХ ПОСРЕДСТВОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА (СЛЕВА) ИЛИ ДВУМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (СПРАВА)

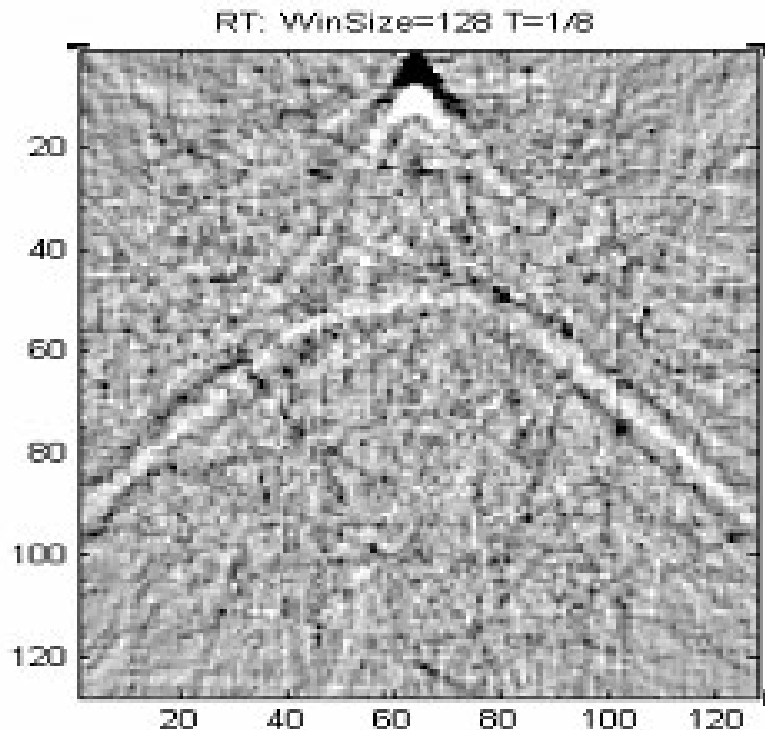


Рис. 12. Фильтрация данных по Радону.

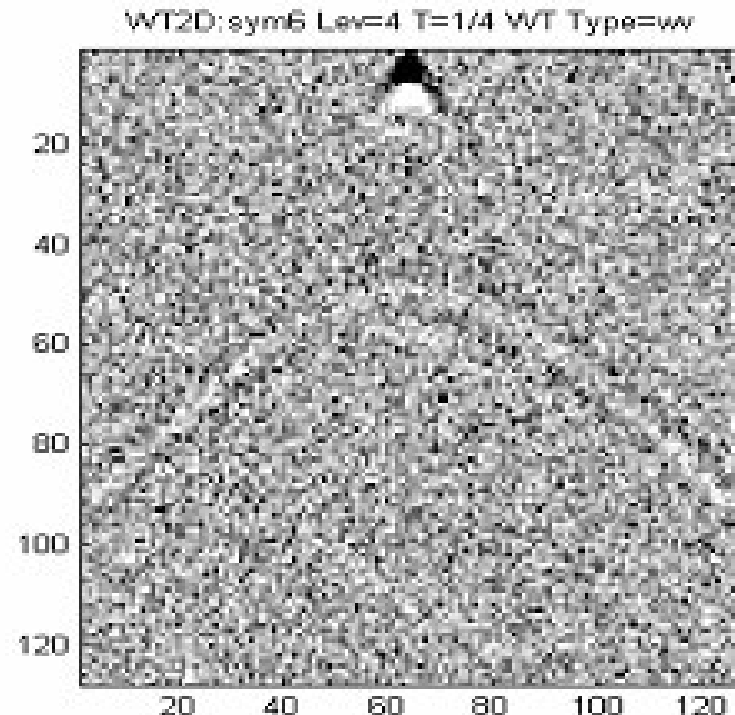


Рис. 13. Фильтрация посредством WT2D.

ФИЛЬТРАЦИЯ ДАННЫХ ПОСРЕДСТВОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА И ПОСЛЕДУЮЩЕГО ОДНОМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТ- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ: ОДНОМЕРНОГО (СЛЕВА) И ДВУМЕРНОГО (СПРАВА)

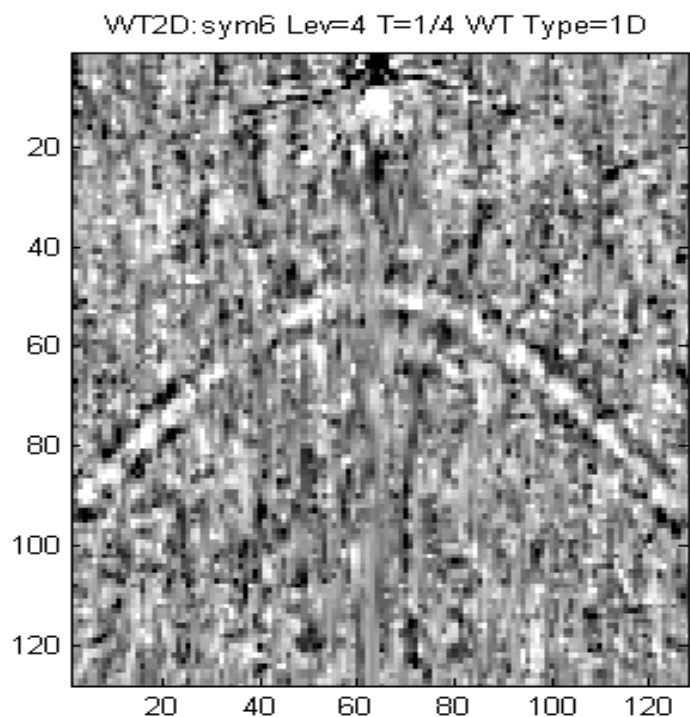


Рис. 16. WT1D-фильтрация после применения Радон-фильтрации

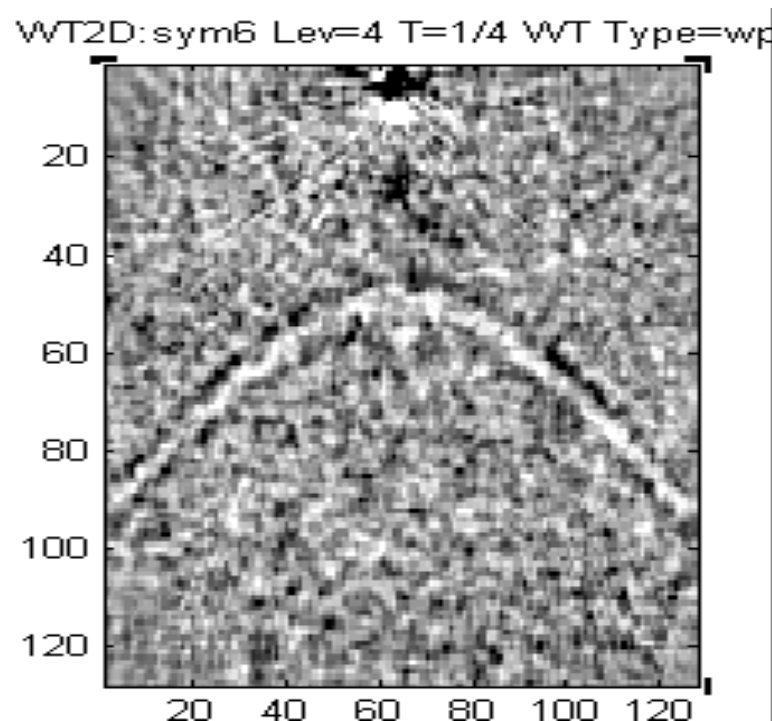


Рис. 17. WT2D-фильтрация после применения Радон-фильтрации

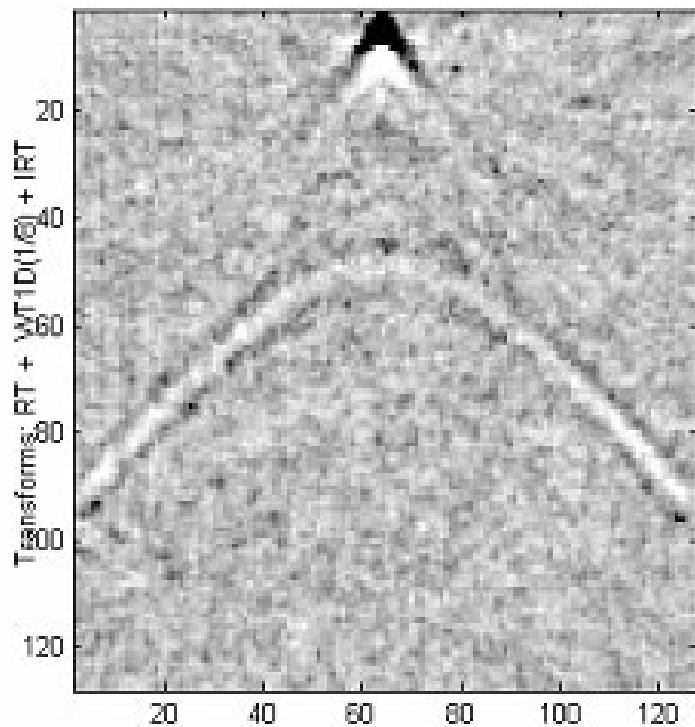


Рис. 18. Риджлет-фильтрация
на основе WT1D в области
Радон-коэффициентов

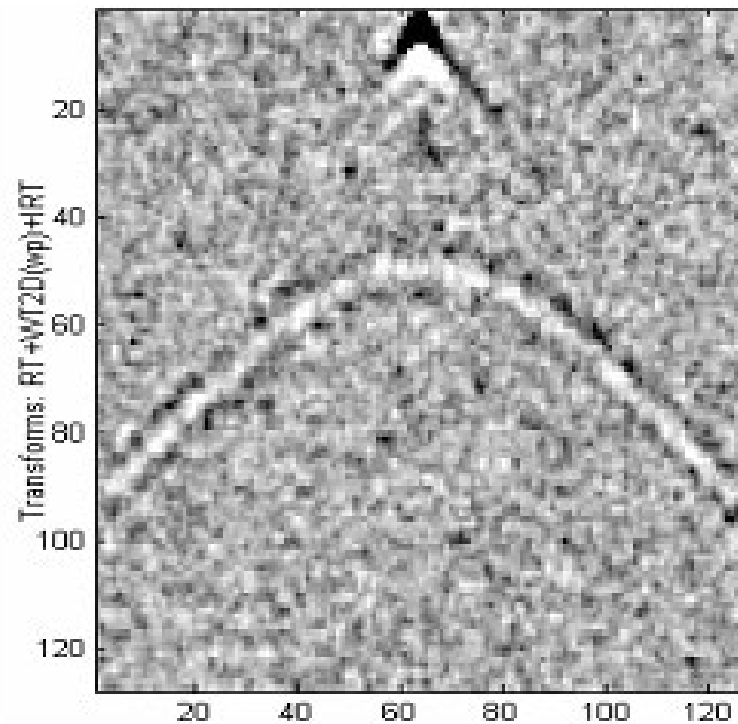


Рис. 19. Риджлет-фильтрация
на основе WT2D в области
Радон-коэффициентов

ДАННЫЕ. ФРАГМЕНТ СИНТЕТИЧЕСКОЙ СЕЙСМОГРАММЫ

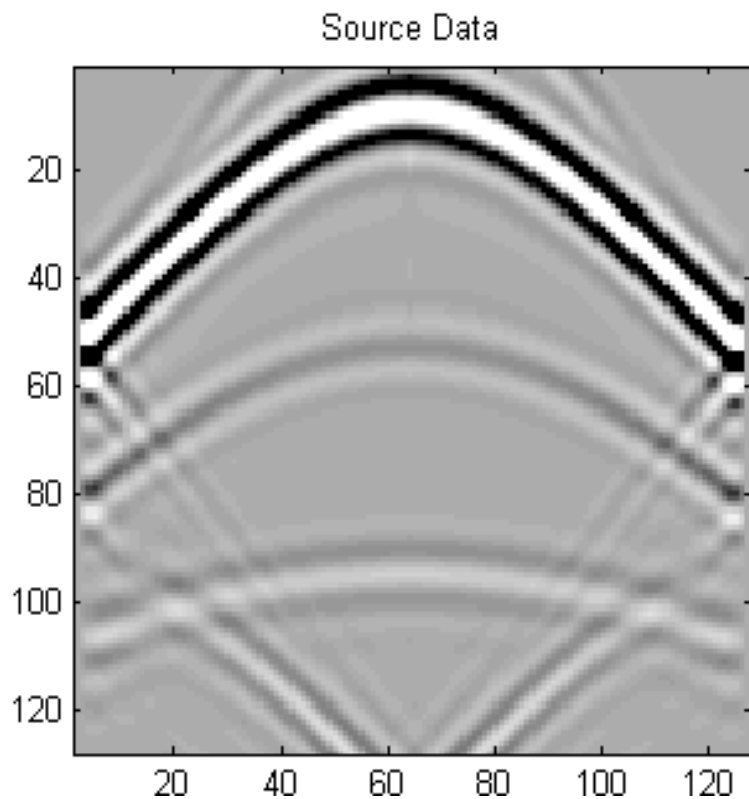


Рис. 20. Фрагмент сейсмограммы

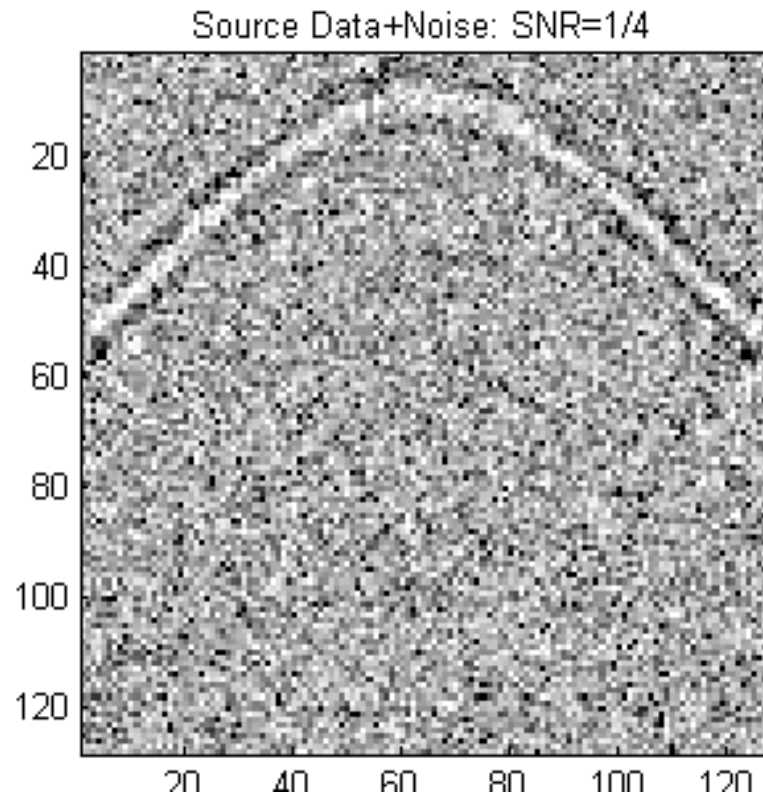


Рис. 21. Сейсмограмма с шумом
SNR=1/4

ФИЛЬТРАЦИЯ ДАННЫХ ПОСРЕДСТВОМ ПРИМЕНЕНИЯ РИДЖЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТ- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ: ОДНОМЕРНОГО (СЛЕВА) И ДВУМЕРНОГО (СПРАВА)

Здесь использована часть сейсмограммы, не содержащей данных вблизи источника.

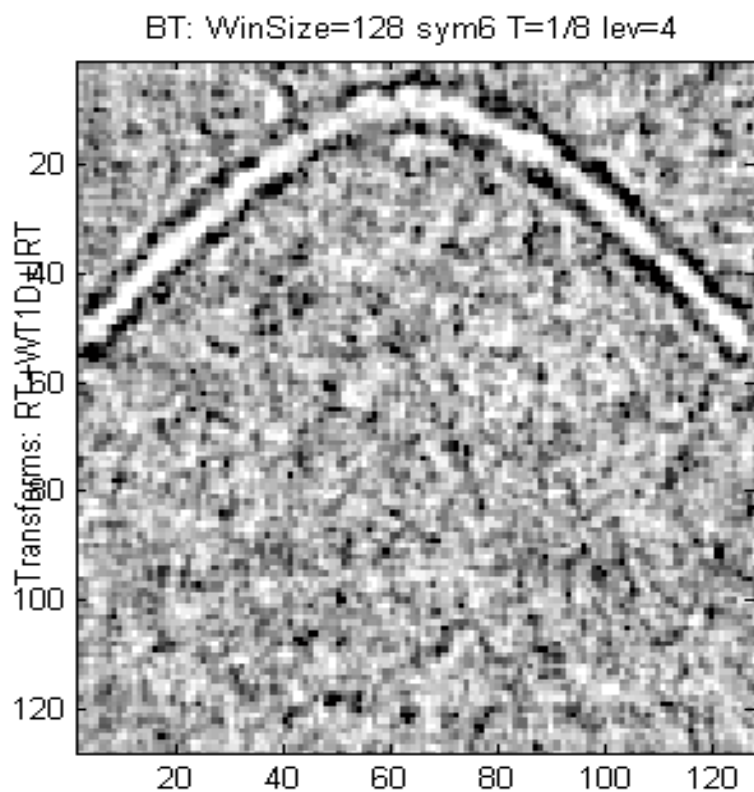


Рис. 22. Риджлет-фильтрация
(RT+WT1D)

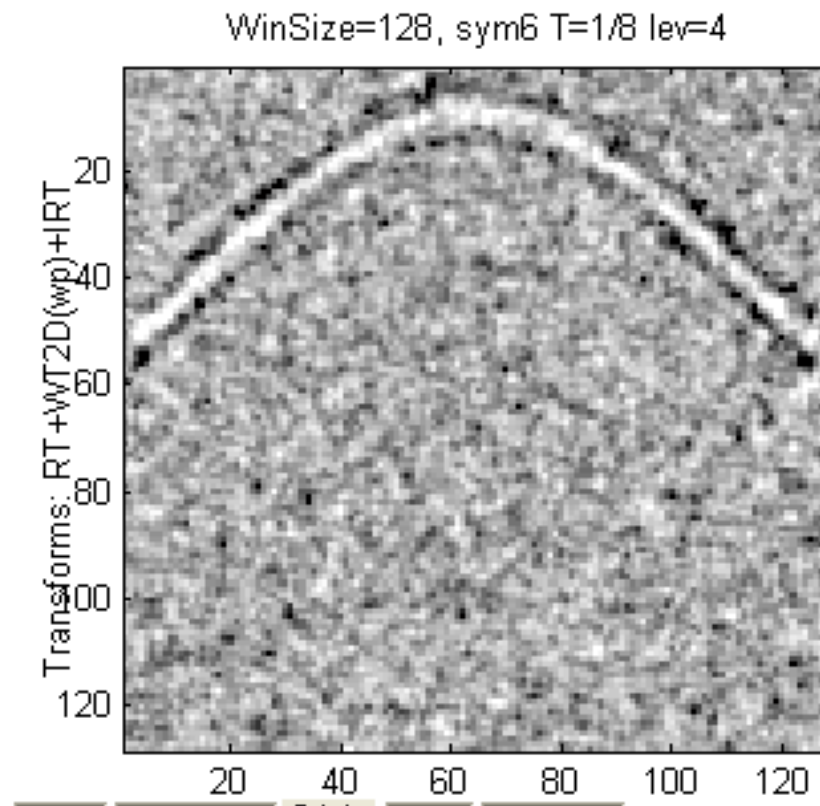


Рис. 23. Риджлет-фильтрация
(RT+WT2D)

ДАННЫЕ. ФРАГМЕНТ СИНТЕТИЧЕСКОЙ СЕЙСМОГРАММЫ

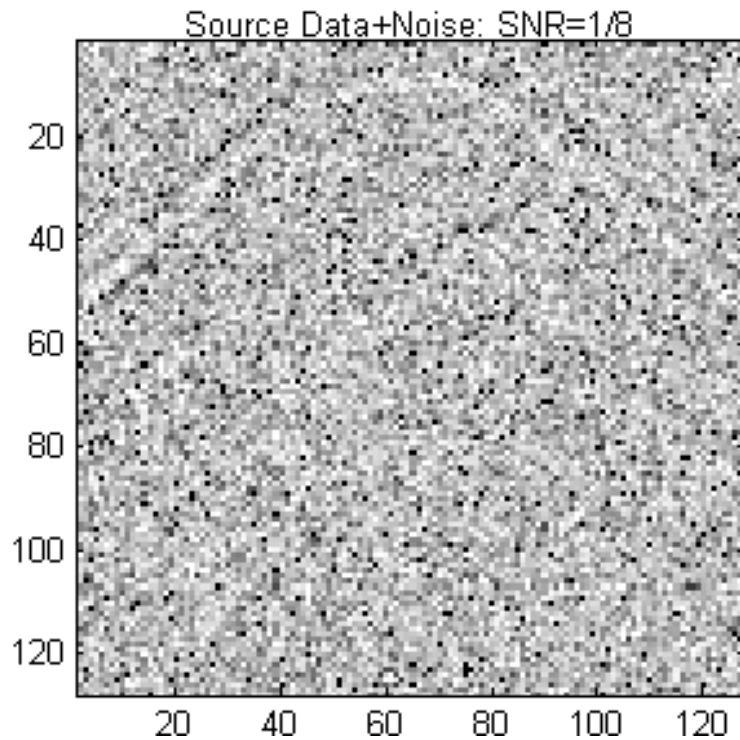


Рис. 24. Сейсмограмма с шумом
SNR=1/8

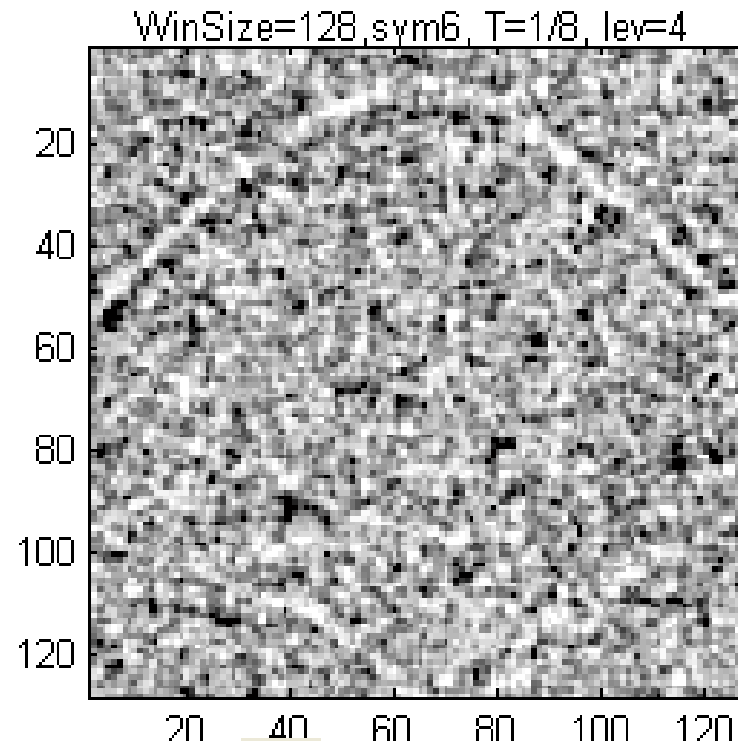


Рис. 25. Риджлет-фильтрация
(RT+WT1D)

Проиллюстрируем работу риджлет-преобразования на практических электроразведочных данных ВРЭ ЗАО «НПЦ ГЕОНЕФТЕГАЗ». Размер матрицы исходных данных 1024x64 (рис. 26).

В процессе риджлет-преобразования использовалось одномерное быстрое вейвлет-преобразование с вейвлетом 'sym6', порог усечения коэффициентов $T_w = T$, $lev = 4$. Матрица данных прямоугольная, поэтому при выполнении Радон-преобразования, которое в процессе работы оперирует квадратными матрицами, использовались перекрывающиеся квадратные окна 64x64. Их наложение составляло половину ширины окна.

Результаты риджлет-фильтрации полевых данных, изображенных на рис. 26, приведены на рис. 27. Элементы, выделенные фильтрацией, весьма слабо видны на исходных данных.

ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

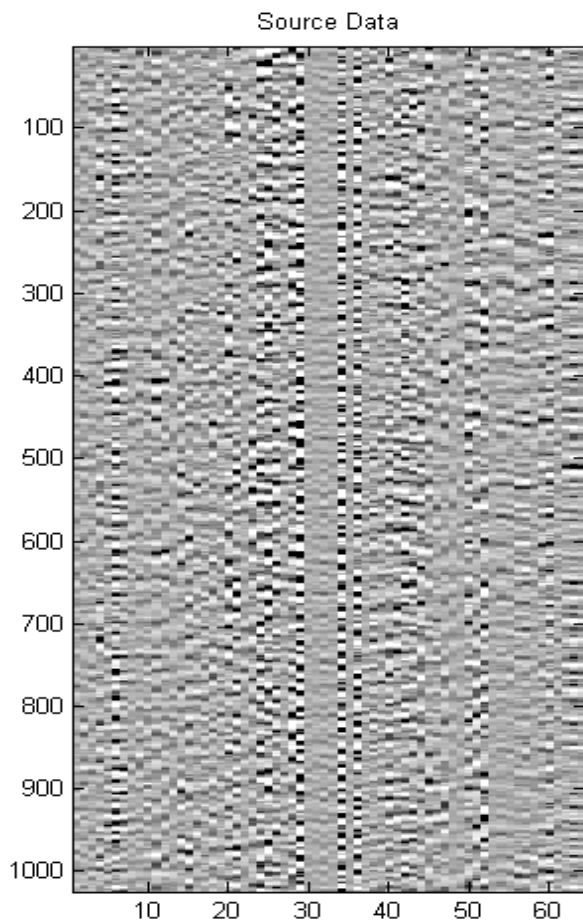


Рис. 26. Исходные данные

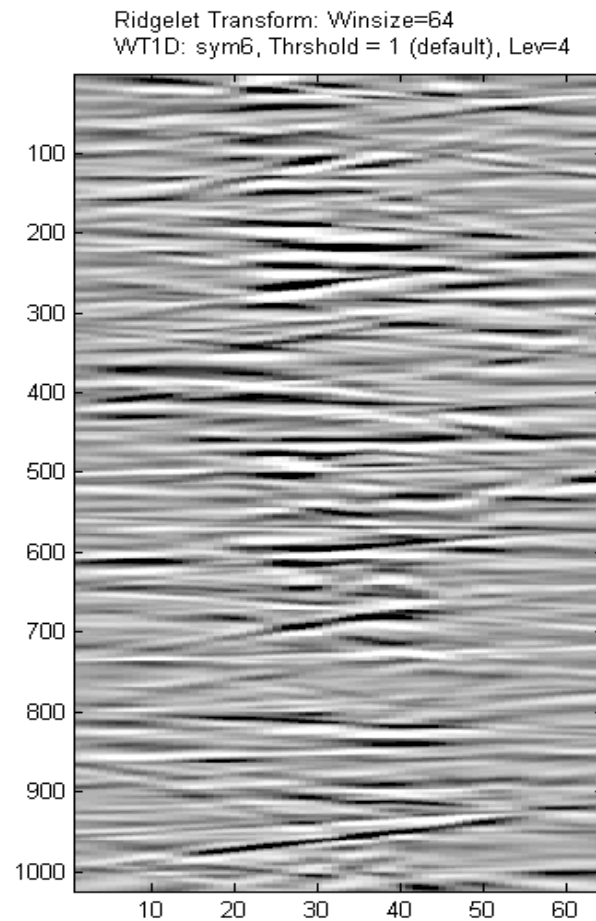


Рис. 27. Результат
ридджет-фильтрации

1. <http://www.isye.gatech.edu/~beamlab/>
2. <http://www-stat.stanford.edu/~wavelab>.
3. Averbuch, R. Coifman, D. Donoho, M. Israeli and J. Walden (2001). Fast Slant Stack: A notion of Radon Transform for data on a Cartesian grid which is Rapidly Computable, Algebraically Exact, Geometrically Faithful, and Invertible. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA 94305. May.
4. E. J. Candès and D. L. Donoho, “Curvelets,” [Online] Available: <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/1999/curvelets.pdf>, 1999.
5. E. Candès and D. Donoho. Ridgelets: the key to high-dimensional intermittency. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A., 357:2495-2509, 1999.
6. S. Choi, D. Donoho, A. G. Flesia, X. Huo, O. Levi, D. Shi. About BeamLab – a Toolbox for New Multiscale Methodologies. Stanford University, Stanford, CA 94305 2 Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332. 7, 2002. Available: <http://www-stat.stanford.edu/~beamlab>.
7. S. R. Deans. The Radon Transform and Some of Its Applications. New York: Wiley, 1983.
8. D. L. Donoho. Orthonormal ridgelets and linear singularities, SIAM J. Math Anal., vol. 31, no. 5, pp. 1062–1099, 2000.
9. D. Donoho and X. Huo (2001). Beamlets and Multiscale Image Processing. In Multiscale and Multiresolution Methods. Eds T.J. Barth, T. Chan, and R. Haimes, Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 20, pp. 149-196.
10. D. Donoho and X. Huo. Beamlet pyramids: A new form of multiresolution analysis, suited for extracting lines, curves, and objects from very noisy image data. In Proceedings of SPIE, volume 4119, July 2000.
11. D. Donoho and O. Levi (2002). Fast X-Ray and Beamlet Transforms for Three- Dimensional Data. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA 94305. March. In Modern Signal Processing, D. Rockmore and D. Healy, eds., Mathematical Sciences Research Institute Publications, Cambridge University Press. To appear.
12. D.L. Donoho Ridge Functions and Orthonormal Ridgelets. Available: <http://www-stat.stanford.edu/Ridge-Ridgelet.pdf>

13. D.L. Donoho and M.R. Duncan (2000). Digital Curvelet Transform: Strategy, Implementation, Experiments. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA 94305. March.
14. D.L. Donoho and A. Flesia (2001). Digital Ridgelet Transform Based on True Ridge Functions. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA 94305. To appear in Beyond Wavelets. J. Stoeckler and G. Welland (Eds). Academic Press, December.
15. D.L. Donoho and M. Duncan. Digital Curvelet Transform: Strategy, Implementation and Experiments. Department of Statistics, Stanford University. November, 1999 Available: <http://www-stat.stanford.edu/DCvT.pdf>.
16. D.L. Donoho and X. Huo. Beamlet Pyramids: A New Form of Multiresolution Analysis, suited for Extracting Lines, Curves, and Objects from Very Noisy Image Data. Available: <http://www-stat.stanford.edu/spie2000d2.pdf>.
17. D.L. Donoho and X. Huo. Beamlets and Multiscale Image Analysis. Available: <http://www-stat.stanford.edu/Beam070901.pdf>.
18. Flesia, H. Hel-Or, A. Averbuch, E. Candès, R. Coifman, D. Donoho, (2002). Digital Implementation of Ridgelet Packets. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA 94305. To appear in Beyond Wavelets. J. Stoeckler and G. Welland (Eds). Academic Press, December.
19. Goupillard P., Grossman A., Morlet J. Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis // Geoexploration, 1984-1985, 23, 85-102.
20. J.-L. Starck, D.L. Donoho, and E.J. Candès. Very High Quality Image Restoration by Combining Wavelets and Curvelets. Available: http://www-stat.stanford.edu/spie01_vhqr.pdf.
21. И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам. М., Мир, 2001.
22. В.П. Дьяконов. Вейвлеты. От теории к практике. СОЛОН-Пресс. М., 2004, 400 с.
23. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М., Мир, 2005, 671 с.
24. Ф. Наттерер. Математические аспекты компьютерной томографии. М., Мир, 1990, 288 с.

25. Сейсмическая томография. Под ред. Г.Нолета. М., Мир, 1990, 416 с.
26. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. ДМК. М., 2005, 304 с.
27. К.Чуи. Введение в вейвлеты. М., Мир, 2001, 412 с.
28. М.Н.Юдин, Ю.А.Фарков, Д.М. Филатов. Введение в вейвлет-анализ. М., МГГА, 2000, 72 с.
29. Дудова К.А., Юдин М.Н. Бимлет-преобразование. Новая форма кратномасштабного анализа. //VI Международная конференция «Новые идеи в науках о земле». Материалы докладов, том IV. М., МГГРУ, 2005.
30. Юдин М.Н., Юдин О.М.. Исследование возможности применения бимлет-преобразования, SVD-разложения и преобразования Радона для анализа данных сейсморазведки. //VI конференция Международная «Новые идеи в науках о земле». Материалы докладов, том 2, М., МГГРУ, 2005, с. 313.
31. Юдин М.Н., Калишенко Т. В., Юдин В.М. О применении вейвлет-преобразования и альтернирующего метода Шварца для решения некоторых задач геоэлектрики. «Новые идеи в науках о земле». Избранные доклады, М., МГГРУ, 2002, с.311-325.