Министерство высшего и среднего специального образований РСФСР
Редколлегия журнала "Известия высших учебных заведений", раздел "Геология и разведка"

№2098-78 Деп. **УДК 550.837:518**

М.Н. Юдин

ОБ УСКОРЕНИИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ПРИ РАСЧЕТЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ СЕТОК

Москва, 1978

При решении прямой задачи магнитотеллурической разведки (МТЗ) методом сеток большая часть времени идет на решение системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка. В работе [2] предлагается решать систему уравнений методом Зейделя. Несмотря на то, что этот метод вдвое быстрее метода простой итерации, скорость сходимости процесса последовательных приближений может быть увеличена.

Известным приемом ускорения сходимости является метод верхней релаксации.

Система уравнений, полученная в работе [2], может быть записана в виде:

$$u_{mn}(\bar{D}_{mn}+i\bar{\eta}_{mn}^{2})+u_{m+1n}D_{m+1n}+u_{m-1n}D_{m-1n}+u_{mn+1}D_{mn+1}+u_{mn+1}D_{mn-1}, \tag{1}$$

$$m=2,\ldots,N_1-1; \qquad n=2,\ldots,N_2;$$

$$\bar{D}_{mn}=\frac{2}{h_{m-1}h_m}+\frac{2}{h_{n-1}h_n}; \tag{2}$$

$$D_{m-1,n}=-\frac{2}{h_{m-1}^2+h_{m-1}h_m}; \tag{3}$$

$$D_{m+1,n}=-\frac{2}{h_m^2+h_m h_{m-1}}; \tag{4}$$

$$D_{m,n-1}=-\frac{2}{h_{n-1}^2+h_{n-1}h_n}; \tag{5}$$

$$D_{m,n+1}=-\frac{2}{h_n^2+h_{n-1}h_n}. \tag{6}$$

Перепишем (1) в матричном виде:

$$\vec{u}=C\vec{u}, \tag{7}$$

где

$$C_{kl}=-\frac{D_{kl}}{\bar{D}_{mn}+i\eta_{mn}^2}, \tag{8}$$

$$\eta_{mn}^{-2}=\frac{1}{4}(\eta_{m-1n-1}^2+\eta_{m-1n}^2+\eta_{mn-1}^2+\eta_{mn}^2). \tag{9}$$

Для выбора параметра релаксации исследуем спектр матрицы системы (1). В общем случае это сделать трудно. Поэтому рассмотрим этот вопрос для равномерного шага h_1 по координате x_1 и шага h_2 по координате x_2 . В этом случае

$$\bar{D}_{mn} = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}, \tag{10}$$

$$D_{m+1n} = D_{m-1n} = -\frac{1}{h_1^2}, \tag{11}$$

$$D_{mn+1} = D_{mn-1} = -\frac{1}{h_2^2}. \tag{12}$$

Собственными функциями системы (1) будут векторы $\vec{v}^{\,p,q}$,

$$p = 2,\ldots,N_1 - 1; \qquad q = 2,\ldots,N_2 - 1$$

с компонентами

$$\begin{aligned} &v_{mn}^{pq} = e^{im\pi\rho h_1/N_1} \cdot e^{im\pi\rho h_2/N_2}, \\ &n = 2,\ldots,N_2 - 1; \qquad m = 2,\ldots,N_1 - 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Подставим (13) в (1) и учтем (11,12), тогда

$$v_{mn}^{\rho q}(\bar{D}_{mn} + \tilde{\bar{\eta}}^2) - v_{mn}^{\rho q}\left(\frac{2}{h_1^2}\cos\pi\rho h_1 / N_1 + \frac{2}{h_2^2}\cos\pi q h_2 / N_2\right) = 0,$$

где $\tilde{\bar{\eta}} = \min\limits_{m,n} \bar{\eta}_{mn}^2$.

Следовательно, собственными числами $\lambda_{\rho q}$, соответствующими собственному вектору $\vec{v}^{\,\rho q}$ будет:

$$\lambda_{\rho q} = \bar{D}_{mn} + i\tilde{\bar{\eta}}^2 - 2\left(\frac{2}{h_1^2}\cos\pi\rho h_1 / N_1 + \frac{2}{h_2^2}\cos\pi q h_2 / N_2\right) \tag{14}$$

или с учетом (10)

$$\lambda_{\rho q} = 4\left(\frac{\sin^2\dfrac{\pi\rho h_1 / N_1}{2}}{h_1^2} + \frac{\sin^2\dfrac{\pi\rho h_2 / N_2}{2}}{h_2^2}\right) + i\tilde{\bar{\eta}}^2. \tag{15}$$

Для матрицы C собственные векторы будут теми же, но собственные числа примут вид:

$$\lambda_{\rho q}^{C} = \frac{\dfrac{2}{h_1^2}\cos\pi\rho h_1 / N_1 + \dfrac{2}{h_1^2}\cos\pi q h_2 / N_2}{\dfrac{2}{h_1^2} + \dfrac{2}{h_1^2} + i\tilde{\bar{\eta}}^2}, \tag{16}$$

то есть $\left|\lambda_{\rho q}^{C}\right|<1$, если $\tilde{\tilde{\eta}}\neq 0$.

Найдем параметр релаксации α . С этой целью уравнение (7) запишем в виде:

$$u_{l,m}^{(k+1)}=u_{lm}^{(k)}-\alpha\left[u_{lm}^{(k)}-\left(C_{l-1m}u_{l-1m}^{(k+1)}+C_{l+1m}u_{l+1m}^{(k)}+C_{lm-1}u_{lm-1}^{(k+1)}+C_{lm+1}u_{lm+1}^{(k)}\right)\right] \tag{17}$$

или, в операторном виде,

$$\bar{u}^{(k+1)}=\bar{u}^{(k)}+\alpha\left(R\vec{u}^{(k+1)}+Q\vec{u}^{(k)}-E\vec{u}^{(k)}\right). \tag{18}$$

Ясно, что

$$C=R+Q.$$

Из (18) следует

$$(E-\alpha R)u^{(k+1)}=\left((1-\alpha)E+\alpha Q\right)u^{k},$$

то есть

$$u^{(k+1)}=Gu^{(k)},$$

где

$$G=(E-\alpha R)^{-1}\left((1-\alpha)E+\alpha Q\right).$$

Найдем собственные значения оператора G :

$$G_{v}=\lambda_{G}v.$$

Как известно, собственные значения этой матрицы связаны с собственными значениями матрицы C соотношением:

$$\lambda_{C}=\frac{\lambda_{G}-(1-\alpha)}{\alpha\lambda_{G}^{1/2}}$$

при $\alpha=1,\quad \lambda_{C}^{2}=\lambda_{G}$, т.е. схема Зейделя сходится вдвое быстрее, чем метод простых итераций.

Расчет параметра верхней релаксации выполнялся по формуле [1]:

$$\lambda_{t+1}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\dfrac{(\lambda_{1}^{(t)}+\alpha_{t}-1)^{2}}{\lambda_{1}^{(t)}\alpha_{t}^{2}}}},\qquad t=0,1,...,$$

где $\lambda_{1}^{(t)}$ - максимальное по модулю собственное число матрицы, вычисляемое в процессе итераций по Зейделю:

$$\lambda_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j}\left(u_{ij}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)}\right)^2}{\sum_{i,j}\left(u_{ij}^{(k)} - u_{ij}^{(k-1)}\right)^2}}.$$

Начальное значение α_0 принималось разным 1. Вычисления с использованием верхней релаксации чередовались с итерациями по Зейделю. Переключения с одного метода, на другой находились экспериментально.

Теоретически величину параметра релаксации можно оценить по формуле (16).

Другой путь улучшения сходимости итерационного процесса, состоит е учете специфики рассматриваемой модели среды. Идея метода состоит е исключении из итерационного процесса тех узлов на краях сетки, в которых процесс уже установился. Назовем этот прием методом "сжатия сетки". После завершения первого итерационного процесса с использованием сжатия сетки переходим снова к полной сетке. Это продолжалось до тех пор, пока итерационный процесс не завершался на исходной сетке с заданным значением ε .

Решение системы уравнений по методу Зейделя с верхней релаксацией и сжатием сетки позволил ускорить вычисления примерно в 3 раза по сравнению с "чистым" итерационным процессом Зейделя.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Carre B.A. The Determination of the Optimum-Accelerating Factor for Successive Over-relaxation. Comput. J.. 1961. v.4, №1.p.73.
2. Jones P.W., Paecoe L.J. A General Computer Program to Determine the Perturlation of Alternating Electric currents in a Two-dimensional Model of a Region of Uniform Conductivity with an Embedded Inhomogeneity. Geonhys. J.R. astr. Soc. 24.1971.