МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
Редколлегия журнала "Известия высших учебных заведений" раздел "Геология и разведка"

№3438-78 Деп.

М.Н. Юдин

ОБ ОЦЕНКЕ РАССТОЯНИЙ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ДО ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ СЕТКИ ПРИ РАСЧЕТЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕДЫ (Е-ПОЛЯРИЗАЦИЯ)

Москва, 1978

В работах [1,2] описан алгоритм и приведена программа для расчёта магнитотеллурического поля методом сеток в двумерных неоднородных средах. Программа в несколько модифицированном виде реализована автором на ЭВМ БЭСМ-6. В процессе подготовки информации возникают затруднения с выбором расстояний до верхней границы сетки от поверхности земли. В [1,2] авторы высказывают физические соображения, на основании которых производится такой выбор, однако численного алгоритма не приводится.

Мы рассмотрим случай E-поляризации, когда вектор напряженности электромагнитного поля E имеет одну ненулевую компоненту E_x.

$$\vec{E} = (E_x, 0, 0)$$

и вектор напряженности магнитного поля Н- две отличные от нуля компоненты H_y и H_z:

$$\vec{H} = (0, H_y, H_z).$$

Пусть двумерная область $D \in \mathbb{R}^2$ прямоугольная и задаётся неравенствами:

$$D = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \middle| y_1 < y < y_2, -d_1 < z < d_2 \right\}.$$

Её можно представить объединением двух непересекающихся областей

$$D_0 = \left\{ (y,z) \in D \middle| y_1 < y < y_2, -d_1 < z < 0 \right\}$$

и

$$D_1 = \left\{ (y,z) \in D \middle| y_1 < y < y_2, 0 < z < d_2 \right\}.$$

Область D_0 соответствует воздуху с удельной электропроводностью σ_0, а D_1-неоднородной земле с удельной электропроводностью $\sigma(y,z)$. В работах [1,2] рассмотрена модель среды с кусочно-постоянной электропроводностью

$$\sigma(y,z) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \chi(D_{1i}),$$

$$D_1 = \bigcup_{i=1}^{n} D_{1i}, \;\; D_{1i} \bigcap D_{1j} = \phi,$$

где - D_{1i} односвязные области с постоянной удельной электропроводностью σ_i,

$$\chi\;(A) = \begin{cases} 1, (y,z) \in D \\ 0, (y,z) \notin A \end{cases}$$

характеристическая функция множества A.

Граница Γ области D состоит из четырех частей $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$,

$$\Gamma_1 = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \middle| y_1 \le y \le y_2, z = -d_1 \right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \middle| y_1 \le y \le y_2, z = d_2 \right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \middle| y_1 = y_1, -d_1 < z < d_2 \right\},$$

$$\Gamma_4 = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \middle| y_1 = y_2, -d_1 < z < d_2 \right\}.$$

Назовем Γ_1 и Γ_2 соответственно <u>верхней</u> и <u>нижней</u> границами, Γ_3 и Γ_4 - <u>левой</u> и <u>правой</u> границами.

Модель среды, имеющую различные геоэлектрические параметры на левой и правой границах сетки, будем называть несимметричной. Модель среды, для которой

$$\sigma(y_1,z)=\sigma(y_2,z), \qquad z\in[-d_1,d_2]$$

будем называть симметричной.

В работе [2 3] для несимметричных моделей значения поля E_x на Γ_1 задаются путём линейной интерполяции между узлами $(y_1,-d_1)$ и $(y_2,-d_1)$.Этот способ задания краевых условий на верхней границе не имеет обоснования.

Рассмотрим оценку сверху величины d_1 для несимметричных моделей среды.

1. **Воздух - изолятор**.

Пусть $\sigma_0=0$,

$$\sigma(y,z)=\sigma_1=const, \qquad (y,z)\in D_1.$$

Как известно [1]

$$E_x=E_0(I-k_I z), \qquad z<0, \tag{1}$$

где $k_I=\sqrt{-i\omega\mu\sigma_1}$ -волновое число однородной земли; $\omega=2\pi/T$ -круговая частота; T– период; $\mu=4\pi\cdot 10^{-7}$ - магнитная проницаемость.

Компонента H_y напряженность магнитного поля связана с E_x соотношением:

$$H_y=\frac{1}{i\omega\mu}\cdot\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{2}$$

из (1) и (2) находим

$$E_0=-H_y\cdot\frac{i\omega\mu}{k_I}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получаем

$$E_x=-H_y\cdot\frac{i\omega\mu}{k_I}(1-k_I z). \tag{4}$$

Известно, что H_y не зависит от свойств среды, заполняющей полупространство z > 0 (земля).

Обозначим

$$E_x^0=H_y\cdot i\omega z\mu. \tag{5}$$

Из (4) следует, что для любой относительной погрешности $\varepsilon>0$ существует такое, $z=z_0$, что

$$\left|\frac{E_x-E_x^{(0)}}{E_x^{(0)}}\right|=\frac{1}{|k_I z_0|}<\varepsilon. \tag{6}$$

Выражая | z_0 | из (6),получим

$$|z_0|>\lambda_1/(\varepsilon 2\pi\sqrt{2}), \tag{7}$$

где $\lambda=\sqrt{10\rho_1 T}$ (км.)- длина волны в земле.

Если в D_1

$$\sigma(y,z)\equiv\sigma(z)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\left[1(z-z_{i-1})-1(z-z_i)\right] \tag{8}$$

кусочно-постоянная функция, зависящая только от z ,то очевидное, в (7) вместо ρ_1

следует использовать в расчётах модуль кажущегося удельного электрического сопротивления $|\rho_T|$:

$$|z_0| > \lambda_T \big/ (\varepsilon \cdot 2\pi\sqrt{2}), \quad \lambda_T = \sqrt{10|\rho_T| T}. \tag{9}$$

В формуле (8)

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$ -единичная функция,

z_i -границы раздела среды с различной электропроводностью,
$i = 0,1,\ldots,n-1$ («n- слойная среда»).

2. Воздух - слабый проводник.

В рассматриваемом случае $\sigma_0 \neq 0$ поэтому компонента E_x в D_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = k^2 E_x. \tag{10}$$

Решение уравнения (10)

$$E_x = A_0 e^{-k_0 z} + B_0 e^{k_0 z} \tag{11}$$

можно рассматривать как аддитивную смесь падающей и отраженной волн.
Пусть $E_x\big|_{z=0} \doteq E_0$, тогда с учётом условий сопряжения

$$\left[E_x\right]_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial E_x}{\partial z}\right]_{z=0} = 0, \tag{12}$$

получаем систему

$$\begin{cases} A_0 + B_0 = E_0 \\ -A_0 + B_0 = -\dfrac{k_1}{k_0} E_0 \end{cases}. \tag{13}$$

Подставляя A_0 и B_0, найденные из (13), в (11) после очевидных тождественных преобразований получим

$$E_x = E_0 (chk_0 z - \frac{k_1}{k_0} shk_0 z). \tag{14}$$

Выразим E_0 через H_y

$$E_0 = -H_y \cdot \frac{i\omega}{k_1} \cdot \left[chk_0 z - \frac{k_1}{k_0} shk_0 z \right]^{-1} \tag{15}$$

и подставим (15) в (14):

$$E_x = H_y \cdot \frac{i\omega}{k_1} \cdot \frac{chk_0 z - \dfrac{k_1}{k_0} shk_0 z}{chk_0 z - \dfrac{k_0}{k_1} shk_0 z}. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{k_0\to\infty} E_x = -H_y \cdot \frac{i\omega}{k_1}(1-k_1 z).$$

По предположению воздух обладает слабой проводимостью

$(\sigma_0 = 10^{-13} омм^{-1})$, поэтому поле E_x с точностью до относительной погрешности $\varepsilon > 0$ не зависит от k_1, если z_0 находится из неравенства

$$\left|\frac{k_0}{k_1} cthk_0 z_0\right| < \varepsilon. \tag{17}$$

Если $|k_0 z_0| << 1$, то $cthk_0 z_0 = \dfrac{1}{k_0 z_0} + 0(k_0 z_0)$.

Следовательно, оценка z_0 по неравенству (17) близка к (7). Итак, для оценки величины z_0 можно считать воздух изолятором.

В общем случае функция $\sigma(y,z)$ на левой и правой границах различна, поэтому при решении краевой задачи [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = k^2 E_x \\ E_x|_{\Gamma} = \tau(y,z), \qquad (y,z) \in \Gamma \end{cases} \tag{18}$$

поле E_x на верхней границе $(z = d_1)$ с точностью до ε не будет зависеть от электрических свойств земли, если

$$d_1 = \max(|z_{0l}|, |z_{0r}|) + \Delta d_1, \tag{19}$$

где

$$|z_{0l}| \doteq z_0|_{y=y_1}, \qquad |z_{0r}| = z_0|_{y=y_2},$$

вычисляются по (7) соответственно для левой и правой границ, Δd_1 - поправка, обусловленная присутствием двумерной локальной неоднородности в D_1.

Найти величину до решения задачи (18) весьма сложно.

Для оценки величины сверху введём обозначение

$$\bar{\sigma} = \min \sigma(y,z), \qquad (y,z) \notin D_1,$$

тогда

$$\max(|z_{0l}|, |z_{0r}|) \le d_1 \le \frac{\sqrt{10T/\bar{\sigma}}}{\varepsilon 2\pi\sqrt{2}}. \tag{20}$$

Полученные оценки d_1 являются оценками сверху, поэтому, по-видимому, для несимметричных моделей достаточно вычислить d_1 по (19), в которой можно положить Δd_1=0.

Исследования, результаты которых изложены в настоящей работе, выполнены по инициативе проф. М.Н. Бердичевского. Автор выражает ему благодарность за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones F.W. and Pascoe L.S. A general computer program to determine of alternating electric currents in two-dimensional model of a region of uniform conductivity with a embedded inhomogeneity. Geophys. J.R. astr. Soc. 24. 1971.
2. Pascoe L.J. and Jones F.W. Boundary conditions and calculations of surface values for the general two-dimensional electromagnetic induction problem. Geophys. J.R. astr. Soc. 27. 1972.