

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Редколлегия журнала "Известия высших учебных заведений"  
раздел "Геология и разведка"

УДК 550.837:518

*№1295 - 81 деп.*

Юдин М. Н.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНОЙ  
СХЕМЫ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА ПРИ  
РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ МЕТОДОМ  
СЕТОК В ТРЕХМЕРНОЙ СРЕДЕ

Москва - 1981

Специфика решения задач геоэлектрики методом конечных разностей требует использования неравномерных шагов сетки по пространственным координатам. Численные эксперименты по методу МТЗ применительно к двух- и трехмерным средам свидетельствуют о том, что конечно-разностная аппроксимация дифференциальной задачи на сетке с неравномерными шагами иногда приводит к значительным погрешностям в решении и существенно замедляет сходимость итерационного процесса. В связи с этим большое значение имеет правильный выбор коэффициентов разностной схемы, учитывающих структуру неравномерной сетки.

Много различных вариантов разностных схем можно получить на основе вариационного метода. Мы ограничимся лишь двумя из них, для того, чтобы сравнить одну с разностной схемой, полученной автором конечно-разностным способом [2], а другой - продемонстрировать дополнительные возможности вариационного подхода для построения коэффициентов системы разностных уравнений.

Применительно к геоэлектрике дифференциальная краевая электродинамическая задача может быть редуцирована к задаче на экстремум функционала энергии электромагнитного поля [3]:

$$W = \int_{\Omega} \frac{1}{2\omega^2 \mu} \left[ k^2 \vec{E} \cdot \vec{E} - \text{rot } \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{E} - 2i\omega \mu \vec{j} \cdot \vec{E} \right] dv \quad (1)$$

где  $\vec{E}$  - вектор напряженности электрического поля;

$\vec{j}$  - вектор плотности тока источников, содержащихся в трехмерной области, в которой ищется решение задачи;

$\omega$  - круговая частота;  $\mu$  - магнитная проницаемость;

$k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma}$  - волновое число;  $\sigma$  - удельная электропроводность среды.

Следуя [1], на основе локальной минимизации интеграла (1) можно найти коэффициенты системы линейных уравнений, решению которой сводится исходная дифференциальная задача [2].

В дальнейшем изложении будем считать, что магнитная проницаемость среды всюду постоянна и равна магнитной проницаемости воздуха.

Рассмотрим ячейку кубической сетки, изображенную на рис.1. Координатные оси прямоугольной системы координат выберем так, как показано на рис.1. Пусть ячейка имеет размеры  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , соответственно по осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Проводимость  $\sigma$  ячейки будем считать постоянной, а волновое число равно  $k$ . Вычислим приближенно значение функционала (1) для подобласти, занятой этой ячейкой, пользуясь квадратурными формулами:

$$\int_{\Omega_1} [f_x(x, y, z)]^2 dv \approx \frac{1}{4\Delta x} [(f_5 - f_4)^2 + (f_6 - f_7)^2 + (f_2 - f_3)^2 + (f_1 - f_0)^2] \cdot \Delta y \cdot \Delta z, \quad (2)$$

где  $f_i (i = \overline{1,8})$  - значения функции  $f(x, y, z)$  в вершинах ячейки (узлах дискретизации),

$$\int_{\Omega_1} [f_y(x, y, z)]^2 dv \approx \frac{1}{4\Delta y} [(f_3 - f_0)^2 + (f_2 - f_1)^2 + (f_6 - f_5)^2 + (f_7 - f_4)^2] \cdot \Delta x \cdot \Delta z, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega_1} [f_z(x, y, z)]^2 dv \approx \frac{1}{4\Delta z} [(f_4 - f_0)^2 + (f_7 - f_3)^2 +$$

$$+(f_6 - f_7)^2 + (f_5 - f_1)^2 \Big] \cdot \Delta x \cdot \Delta y, \quad (4)$$

$$\int_{\Omega_1} [f_z(x, y, z)]^2 dv \approx \frac{1}{8} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \sum_{i=1}^8 f_i^2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f_y \cdot g_x dv &\approx \\ &\approx \frac{1}{8} \Delta z \left[ (f_3 - f_0 + f_2 - f_1) \cdot (g_1 - g_0 + g_2 - g_3) \right. \\ &\left. + (f_7 - f_4 + f_6 - f_5) \cdot (g_6 - g_7 + g_5 - g_4) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f_z \cdot g_x dv &\approx \\ &\approx \frac{1}{8} \Delta y \left[ (f_3 - f_7 + f_2 - f_6) \cdot (g_6 - g_7 + g_2 - g_3) \right. \\ &\left. + (f_0 - f_4 + f_1 - f_5) \cdot (g_1 - g_0 + g_5 - g_4) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f_z \cdot g_y dv &\approx \\ &\approx \frac{1}{8} \Delta x \left[ (f_3 - f_7 + f_0 - f_4) \cdot (g_7 - g_4 + g_3 - g_0) \right. \\ &\left. + (f_2 - f_6 + f_1 - f_5) \cdot (g_6 - g_5 + g_2 - g_1) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

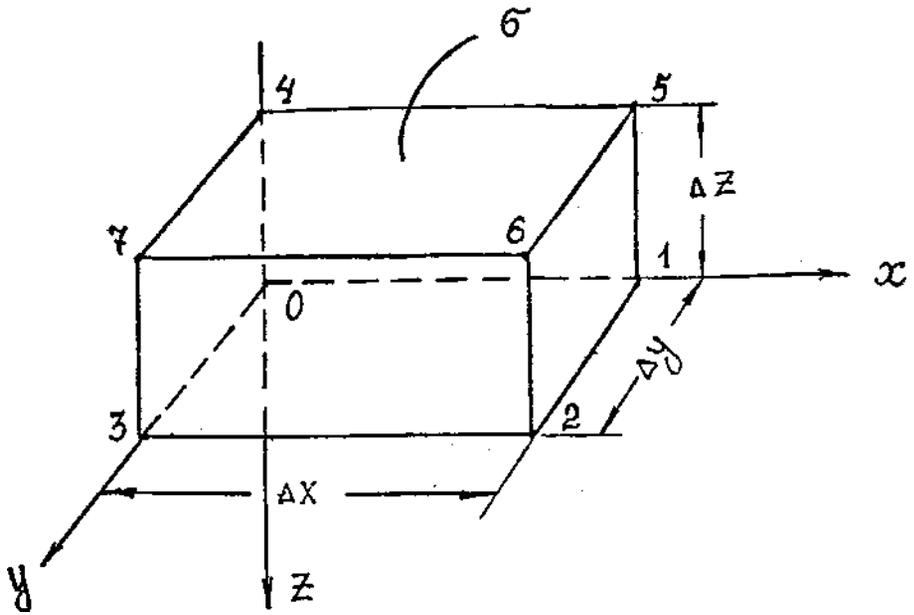


Рис. 1. Ячейка сетки.

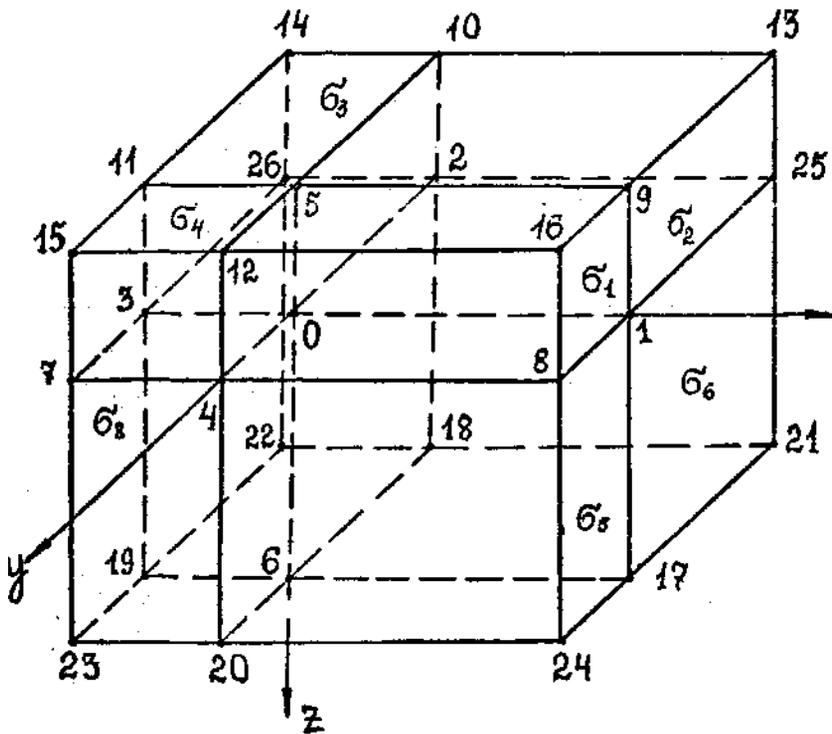


Рис. 2. Фрагмент сетки.

формулы (2-8) дают возможность найти приближенное значение интеграла (1) для подобласти  $\Omega_1 \subset \Omega$ .

Применяя другие квадратуры, можно в конечном итоге получить различные варианты коэффициентов разностных схем.

Рассмотрим теперь фрагмент сетки, состоящий из восьми ячеек с различными проводимостями, примыкающих к точке 0 (рис.2). Приближенное значение  $I_2$  функционала (1) по области  $\Omega_2 \subset \Omega$  занятой этими ячейками, получим в результате суммирования приближенных значений интегралов по каждой из восьми ячеек, вычисленных на основе формул (2-8). Для отыскания его стационарной точки в области  $\Omega_2$  найдем производные по компонентам вектора  $\vec{E}$  в точке 0 и приравняем их нулю. Пусть  $E_{\alpha i}$  - значение компоненты вектора  $\vec{E}$  по направлению  $\alpha$  в узле  $i(\alpha = x, y, z)$ , тогда после очевидных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_2}{\partial E_{x0}} = & \left( \frac{16}{\Delta z_1 \cdot \Delta z_2} + \frac{16}{\Delta y_1 \cdot \Delta y_2} + 8\bar{k}^2 \right) \cdot E_{x0} - \\
 & - \frac{8}{\tilde{h}_{2-}^2} E_{x2} - \frac{8}{\tilde{h}_{2+}^2} E_{x4} - \frac{8}{\tilde{h}_{3-}^2} E_{x5} - \frac{8}{\tilde{h}_{3+}^2} E_{x6} - \\
 & - \frac{2}{\hbar_1 \hbar_3} (E_{z9} - E_{z11} - E_{z17} + E_{z19}) - \\
 & - \frac{2}{\hbar_1 \hbar_2} (E_{y7} - E_{y8} - E_{y26} + E_{y25}) + \\
 & + \frac{8i\omega\mu}{V} \cdot \sum_{i=1}^8 j_{xi}^{(0)} V_i = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{2-}^2 &\triangleq \Delta y_1 \cdot \hbar_2; \quad \tilde{h}_{2+}^2 \triangleq \Delta y_2 \cdot \hbar_2; \\ \tilde{h}_{3-}^2 &\triangleq \Delta z_1 \cdot \hbar_3; \quad \tilde{h}_{3+}^2 \triangleq \Delta z_2 \cdot \hbar_3; \\ \Delta x_1 &\triangleq x_0 - x_3; \quad \hbar_1 \triangleq \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}; \quad \Delta x_2 \triangleq x_1 - x_0; \\ \Delta y_1 &\triangleq y_0 - y_2; \quad \hbar_2 \triangleq \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2}{2}; \quad \Delta y_2 \triangleq y_4 - y_0; \\ \Delta z_1 &\triangleq z_0 - z_5; \quad \hbar_3 \triangleq \frac{\Delta z_1 + \Delta z_2}{2}; \quad \Delta z_2 \triangleq z_6 - z_0; \end{aligned}$$

Здесь

$$\bar{k}^2 \triangleq \sum_{i=1}^8 k_i^2 \cdot V_i / V,$$

где  $k_i$  - волновое число  $i$ -го элементарного параллелепипеда, имеющего объем  $V_i$ ,  $V = \sum_{i=1}^8 k_i^2 \cdot V_i / V$ ;  $j_{xi}^{(0)}$  составляющая плотности тока по оси  $x$  в  $i$ -том параллелепипеде в окрестности точки 0.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Если предполагается вести расчет полного поля в отсутствии сторонних токов в области  $\Omega$  то последнее слагаемое в формуле (9) следует положить равным нулю. Иначе обстоит дело при вычислении аномальных значений  $\vec{E}_a$ , вектора  $\vec{E}$ . Пусть,  $\vec{E}_0$  - "Нормальное" значение электрического поля, соответствующее горизонтально-слоистой или двумерной среде. В качестве аномального вектора

можно рассматривать разность

$$\vec{E}_a = \vec{E} - \vec{E}_0$$

В дифференциальной задаче относительно  $E_a$  краевые условия будут нулевыми ( $E_a = 0$  на границе области  $\Omega$ ), а источники сосредоточатся в той части области, где содержится трехмерная неоднородность. Плотность  $\vec{j}_a$  этих источников равна:

$$\vec{j}_a = [\sigma(x, y, z) - \sigma_0] \cdot \vec{E}_0 \quad (10)$$

где  $\sigma_0$  - значение проводимости "нормального" разреза в рассматриваемой точке пространства. В частности, если первичное поле поляризовано по оси  $x$ , то вектор  $\vec{j}_a$  будет иметь также одну ненулевую составляющую по этой оси. Итак, соотношение (9) пригодно для расчета как аномальных, так и полных значений вектора  $\vec{E}$ .

С точки зрения расчета аномальных значений поля преобразуем последнее слагаемое в (9) к более удобному для вычисления виду. С учетом (10) имеем:

$$j_{xi}^{(0)} = (\sigma_i - \sigma_{0i}) \cdot E_{x0}^0 \quad (11)$$

где  $\sigma_{0i}$  - значение проводимости нормального разреза, соответствующее  $i$ -тому параллелепипеду,  $E_{x0}^0$  - значение составляющей  $E_x$ , нормального поля в точке 0. На основе (11) получим окончательно

$$\delta f_0 \triangleq \delta i \omega \mu \sum_{i=1}^8 j_{xi}^{(0)} = 8 E_{x0}^0 (\bar{k}_0^2 - \bar{k}^2), \quad (12)$$

где

$$\bar{k}_0^2 \triangleq -i \omega \mu \sum_{i=1}^8 \sigma_{0i} V_i / V. \quad (13)$$

Коэффициенты из работы [2] совпадают с коэффициентами уравнения (9). Отличие состоит в том, что в (9) входят средневзвешенные значения волновых чисел, в то время как в [2] волновые числа суммируются без весов.

Ввиду того, что компоненты вектора  $\vec{E}$  входят в подинтегральную функцию в (I) равноправно (симметрично), то выражения для  $\partial I_2 / \partial E_{y_0}$  и  $\partial I_2 / \partial E_{z_0}$  будут иметь ту же структуру, что и соотношение (9) с очевидной заменой компонент вектора напряженности электрического поля, номеров узлов и шагов сетки по координатным осям.

Вместо (6-8) рассмотрим несколько иной вид квадратурных формул:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f_y \cdot g_x dv &\approx \\ &\approx \frac{1}{16} \Delta z \left( (f_3 - f_0 + f_2 - f_1 + f_6 - f_5 + f_7 - f_4) \times \right. \\ &\times \left. (g_5 - g_4 + g_6 - g_7 + g_2 - g_3 + g_1 - g_0) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f_z \cdot g_x dv &\approx \frac{1}{16} \Delta y \left( (f_1 - f_5 + f_0 - f_4 + f_3 - f_7 + f_2 - f_6) \times \right. \\ &\times \left. (g_5 - g_4 + g_6 - g_7 + g_2 - g_3 + g_1 - g_0) \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f_z \cdot g_y dv &\approx \frac{1}{16} \Delta x \left( (f_1 - f_5 + f_0 - f_4 + f_3 - f_7 + f_2 - f_6) \times \right. \\ &\times \left. (g_3 - g_0 + g_2 - g_1 + g_6 - g_5 + g_7 - g_4) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

По изложенному выше алгоритму для производной получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_2}{\partial E_{x_0}} = & \left( \frac{16}{\Delta z_1 \cdot \Delta z_2} + \frac{16}{\Delta y_1 \cdot \Delta y_2} + 8\bar{k}^2 \right) \cdot E_{x_0} - \\
 & - \frac{8}{\tilde{h}_{2-}^2} E_{x_2} - \frac{8}{\tilde{h}_{2+}^2} E_{x_4} - \frac{8}{\tilde{h}_{3-}^2} E_{x_5} - \frac{8}{\tilde{h}_{3+}^2} E_{x_6} - \\
 & - \frac{1}{\hbar_1 \hbar_3} (E_{z_9} - E_{z_{11}} - E_{z_{17}} + E_{z_{19}}) - \\
 & - \frac{1}{\hbar_1 \hbar_2} (E_{y_7} - E_{y_8} - E_{y_{26}} + E_{y_{25}}) - \\
 & - \frac{\Delta y_1}{2 \cdot \hbar_1 \cdot \hbar_2 \cdot \hbar_3} (E_{z_{13}} - E_{z_{14}} - E_{z_{21}} + E_{z_{22}}) - \\
 & - \frac{\Delta y_2}{2 \cdot \hbar_1 \cdot \hbar_2 \cdot \hbar_3} (E_{z_{16}} - E_{z_{15}} - E_{z_{24}} + E_{z_{23}}) - \\
 & - \frac{\Delta z_1}{2 \cdot \hbar_1 \cdot \hbar_2 \cdot \hbar_3} (E_{y_{15}} - E_{y_{16}} - E_{y_{14}} + E_{y_{13}}) - \\
 & - \frac{\Delta z_2}{2 \cdot \hbar_1 \cdot \hbar_2 \cdot \hbar_3} (E_{y_{21}} - E_{y_{22}} - E_{y_{24}} + E_{y_{23}}) + 8f_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Сравним соотношения (9) и (17). Первое из них дает возможность выполнять расчеты на 13-точечный шаблоне, второе - на 21-точечном. С точки зрения реализации на ЭВМ проще формула (9). Оценивая альтернативные разностные схемы применительно к численному решению трехмерных задач следует помнить о том, что из-за недостаточных ресурсов основной памяти ЭВМ, вычисления выполняются на достаточно грубой сетке. Поэтому

целесообразно пойти на усложнение шаблона, если есть основания надеяться на увеличение точности получаемых результатов. По-видимому, основным критерием оценки эффективности разностной схемы при решении трехмерной задачи должен быть максимально высокий порядок аппроксимации дифференциального уравнения разностным (при условии устойчивости разностной схемы). Равенства (9) и (17) дают второй порядок аппроксимации дифференциального уравнения на равномерной сетке по всем координатам. Тем не менее, предпочтение следует отдать разностной схеме, построенной на основе соотношения (17), ввиду того, что в ней лучше аппроксимируются смешанные производные исходного дифференциального уравнения [2]. Об этом свидетельствуют результаты численных экспериментов, представленные на рис.3. Расчеты магнитотеллурического поля выполнялись на ЭВМ БЭСИ-6 для одной и той же модели геоэлектрического разреза по программам, разработанным на основе формул (9) и (17), с использованием сетки 15x15x15. Ось ординат соответствует норме векторов невязки (в логарифмическом масштабе), ось абсцисс - номерам итераций (в арифметическом масштабе). Сплошными линиями изображены графики нормы невязки

$$\varepsilon_x = \left\| E_x^{(k)} - E_x^{(k-1)} \right\|_1$$

между  $k$ -той и  $k-1$  итерациями, пунктиром - графики

$$\varepsilon_y = \left\| E_y^{(k)} - E_y^{(k-1)} \right\|_1$$

и штрих-пунктиром - графики

$$\varepsilon_z = \left\| E_z^{(k)} - E_z^{(k-1)} \right\|_1.$$

Индекс 1 кривых указывает на расчеты по формуле (9), индекс



2 - по соотношению (17). Некоторые результаты сравнения двух алгоритмов приведены в таблице (после 100 итераций).

Таблица

Формула	Машинное время, мин	Нормы невязки, $\times 10^{-4}$		
(9)	14,5	3	1,3	5
(17)	16,0	1,1	0,3	1,4

Заметим, что неравенство  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) \cdot 5 \times 10^{-4}$  выполняется после 100 итераций по первому алгоритму (14,5 мин счета на ЭВМ) и после 65 итераций - по второму (10,5 мин вычислений). Если предположить, что норма невязки характеризует точность расчетов, то усложнение шаблона может привести к существенной экономии машинного времени.

Подводя итог выполненным исследованиям, сделаем следующие выводы.

1. Одна из разностных схем, полученная вариационным методом, фактически совпала со схемой из работы [2].

2. При решении трехмерных задач методом сеток нужно стремиться к наибольшему порядку аппроксимации дифференциального уравнения разностным, не боясь усложнения шаблона, на котором производятся вычисления.

3. Применяя вариационные принципы и различные квадратурные (формулы, можно построить класс разностных схем, из которого для реализации на ЭВМ можно выбрать такую, которая наилучшим образом удовлетворяет условиям конкретной задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Изд. иностр. лит-ры. М., 1963.
2. Юдин М.Н., Шнейдер В.А. О расчете магнитотеллурического поля в трехмерной среде методом сеток. В сб. "Геомагнитные исследования", № 30, 1981 (в печати).
3. Coggon J.H. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. Geophysics, vol. 36, NO. 1, 1971.