**Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР**

**Редколлегия журнала "Известия высших учебных заведений"**

**раздел "Геология и разведка"**

**№1956-78 Деп.** **УДК 550.837:518**

**Юдин М.Н.**

# К РАСЧЕТУ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ ДИПОЛЯ В ДВУМЕРНОЙ ОСЕСИММЕТЧНОЙ СРЕДЕ

**Москва-1978 г**

При численном решении нестационарных задач электроразведки возникают затруднения с расчетом краевых и начальных условий. Обычно граничные условия находятся исходя из предположения о том, что вторичное (аномальное) поле, вызванное локальной неоднородностью, в некоторой мере мало по сравнению с так называемым "нормальным” полем - полем в отсутствии возмущающего тела. Для задания краевых условий нормальное поле нужно рассчитывать, как в земле, так и в воздухе. Однако, исторически сложилось так, что большинство задач решено исходя из предположения о расчете поля на поверхности земли. Эти решения, как правило, не пригодны для вычисления краевых условий.

Рассмотрим нестационарное поле электрического диполя с точки зрения использования полученного решения для расчета граничных значений и начального условия.

Пусть момент диполя $I_0(t)$ изменяется ступенеобразно в момент времени t=0

$$I_0(t) = I \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ I, t \geq 0, \end{cases}$$

где 1(t) - единичная функция Хэвисайда. Будем считать, что источник находится на высоте $h_0$ и проектируется в начало цилиндрической системы координат $(r, \varphi, z)$. Плоскость z=0 соответствует поверхности земли, ось z направлена вниз.

В работе рассмотрена только компонента $A_x(t)$ вектор - потенциала (x - полярная ось), рассмотренная для простейшей модели среды.

Полученные результаты позволяют численно решать нестационарные задачи для осесимметричных локальных неоднородностей, содержащихся в однородной земле, когда источник расположен на оси симметрии модели среды.

При гармоническом возбуждении поля с зависимостью от времени для компоненты вектор потенциала $\check{A}_x(-i\omega)$ в воздухе, согласно [1] имеем:

$$\check{A}_x(-i\omega) = \frac{I\mu}{4\pi} \int\limits_{\infty}^{0} \left[ \frac{e^{-n_0(h_0+Z)}}{n_0} + \frac{1 - \frac{n_1 R^*}{n_0}}{n_0 + \frac{n_1}{R^*}} e^{-n_0(h_0-Z)} \right] m J_0(mr) dm, \quad (1)$$

$$z < 0, h_0 > 0$$

где $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода;

$$R^* = R^*(m, -i\omega, h_j, \rho_j), j = 1,2, \dots, n;$$

ω- круговая частота

$h_j$, $\rho_j$ - мощности и сопротивления пластов n-слойного разреза;

$$h_n = \infty, \qquad n_j = \sqrt{m^2 + k_j^2}, k_j^2 = -i\omega\mu\sigma_j, \qquad \sigma_j = {}^1\!/_{\rho_j},$$

$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ – магнитная проницаемость,

$n_0$ – соответствует воздуху.

Если воздух изолятор ($K_0$=0), а нижнее полупространство однородное, то $R^* \equiv 1$ и

$$\check{A}_x(-i\omega) = \begin{cases} \dfrac{I_\mu}{4\pi}\displaystyle\int_\infty^0 \left[e^{-m(h_0-|z|)} + \dfrac{m-n_1}{m+n_1}e^{-m(h_0+|z|)}\right] J_0(mr)dm, & z < 0, \\ \dfrac{I_\mu}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{me^{-mh_0}e^{-n_1 z}}{m+n_1} J_0(mr)dm, & z > 0. \end{cases} \tag{2}$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

$$\rho = -i\omega;$$

запись

$$f(t) = C^{-1}[\check{f}(\rho)]$$

будет обозначать нахождение функции *f(t)*, зависящей от времени по заданной функции $\check{f}(\rho)$ зависящей от частоты ($C^{-1}$ – обратный оператор Лапласа – Карсона).

Рассмотрим (2) в области z < 0. Найдем $L_1(t) = C^{-1}[(m-n_1)/(m+n_1)]$

Очевидно

$$\frac{m-n_1}{m+n_1} = -\frac{1}{k^2}(2m^2 - 2mn_1 + k_1^2),$$

поэтому по таблицам [2] находим:

$$L_1(t) = -\frac{2m^2t}{\mu\sigma_1} + \frac{2m}{\sqrt{\mu\sigma_1}}\int_0^t \left[\frac{e^{-im^2t/\mu\sigma}}{\sqrt{\pi t}} + \frac{m}{\sqrt{\mu\sigma_1}} erfc\left(\frac{m\sqrt{t}}{\sqrt{\mu\sigma_1}}\right)\right] dt - 1.$$

Подставляя $L_1$ в (2) получим:

$$A_x(t) = \frac{I\mu}{4\pi}\left[S_1 + \int_0^t \left(-\frac{2}{\mu\sigma_1}S_2 + S_3\right)dt\right], z < 0, \tag{3}$$

где

$$S_1 = \int_0^\infty \left(e^{+m|z|} - e^{-m|z|}\right)e^{-mh_0}J_0(mr)dm =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(h_0 - |z|)^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h_0 + |z|)^2 + r^2}},$$

$$S_2 = \frac{2((h_0 + |z|)^2 - r^2)}{[(h_0 + |z|)^2 + r^2]^{5/2}}$$

$$S_3 = \int_0^\infty \left[\frac{2me^{-m^2 t/\mu\sigma_1}}{\sqrt{\pi t \mu\sigma_1}} + \frac{m^2}{\mu\sigma_1} erf\left(\frac{m\sqrt{t}}{\sqrt{\mu\sigma_1}}\right)\right] e^{-m(h_0+|z|)} J_0(mr)dm.$$

Найдем оригинал $A_x(t)$ в области z>0. На основании (2) получаем [2]

$$L_2(t) = \mathrm{C}^{-1}\left[\frac{e^{-n_1 z}}{m + n_1}\right] = \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} exp\left(-\frac{m^2 t}{\mu\sigma_1} - \frac{z^2 \mu\sigma_1}{4t}\right) - \frac{m}{\sqrt{\mu\sigma_1}} e^{mz} erfc\left(\frac{z\sqrt{\mu\sigma_1}}{2\sqrt{t}} + \frac{m\sqrt{t}}{\sqrt{\mu\sigma_1}}\right)\right] dt.$$

Следовательно

$$A_x(t) = \frac{I\mu}{2\pi}\int_0^\infty mL_2\,(m,t)e^{-mh_0}J_0(mr)dm \qquad (4)$$

Значения $S_3$ и $L_1$ находятся численно.

Начальные условия удобно задавать в момент времени $t_0$=0, т.к.

$$\lim_{t\to 0} A_x(t) = \begin{cases} \frac{I\mu}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(h_0-|z|)^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h_0+|z|)^2+r^2}}\right), z < 0 \\ 0, z > 0 \end{cases}. \qquad (5)$$

Таким образом, для осесимметричной среды, на оси симметрии которой на расстоянии $h_0 \geq 0$ от поверхности земли находится электрический (или магнитный) диполь, получаем задачу:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \mu\sigma(r,z)\frac{\partial A_x}{\partial t},$$

с начальным условием (5) и краевыми условиями (3) и (4).

Решение задачи находится в двумерной области $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{(r,z) \in \mathbb{R}^2 | (0 < r < r_1) \wedge (-d_1 < z < d_1)\},$$

где $d_1$>0, линия z=0 соответствует границе раздела земля-воздух.

Величины $d_1$, $d_2$ и $r_1$ выбираются таким образом, чтобы можно было пользоваться формулами типа (3), (4).

Граничные значения для горизонтально-слоистой модели среды, содержащей локальную неоднородность, вычисляются в дальней зоне источника путем решения одномерного уравнения

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \frac{\partial A_x}{\partial t}\mu\sigma(z)$$

с учетом геометрического затухания поля.

Решение краевой задачи с однородными граничными условиями требует использования большого числа узлов сетки на обеспечение больших удалений от источника поля, что существенно увеличивает время работы программы и сужает возможности удовлетворительной аппроксимации неоднородностей среды.

Автор выражает благодарность проф. Л.Л. Ваньяну за обсуждение постановки задачи и практические замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. Москва, Недра 1965 г.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. Высшая школа,1965.

Печатается в соответствии с решением редколлегии журнала «Известия высших учебных заведений», раздел «Геология и разведка» №39 от 24 ноября 1977 г.
В печать от 02.06.1978