МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
Редколлегия журнала «Известия высших учебных заведений»
раздел «Геология и разведка»

№6426-84 Деп от 11.09.84 **УДК 550.837:518**

Юдин М.Н.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Москва – 1984 г.

Функционалы и общая схема алгоритма расчета электромагнитного поля в трехмерной среде приведены в работах [1,3-5]. В настоящей статье внимание уделено двум моментам:

1. Получению конструктивных вычислительных схем достаточно общего вида.
2. Рассмотрению специфики вычислений для математических моделей, содержащих локальные S -пленки, при решении задачи относительно вектора напряженности электрического поля **E.** Решение геоэлектрической задачи сводится к отысканию стационарного значения функционала [1,4]

$$F = \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{\eta} \left(rot\mathbf{u} \right)^2 + \frac{k^2}{\eta} \mathbf{u}^2 - 2\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] dv + \\ + \iint_{\partial\Omega} \left(\psi \mathbf{u}^2 + 2\vec{\varphi} \cdot \mathbf{u} \right) ds + i\omega \sum_{j=1}^{m} \iint_{\partial\Omega_{S_j}} S_j \mathbf{u}_\tau^2 ds, \tag{1}$$

где вектор $\mathbf{u}$ соответствует аномальным полям $\mathbf{E}^a$. или $\mathbf{H}^a$; $k^2 = -i\omega\mu\sigma^* \left(\sigma^* = \sigma - i\omega\varepsilon \right)$ - волновое число среды; $\eta = \mu$, когда $\mathbf{u} = \mathbf{E}^a$ или $\eta = \sigma^*$, если $\mathbf{u} = \mathbf{H}^a$; **f**-произвольные локальные (финитные) источники поля; Ω-ограниченная трехмерная область с границей $\partial\Omega$; $\psi(P)$, $\vec{\varphi}(P) \in C^1(\partial\Omega)$; $P \in \partial\Omega$; $\partial\Omega_{S_j}$ -поверхность j-той неоднородной локальной S-пленки Прайса-Шейнманна с проводимостью S_j; $\mathbf{u}_\tau$.- составляющая вектора $\mathbf{u}$, тангенциальная к $\partial\Omega_{S_j}$.

Стационарное значение $\mathbf{u}_0$ функционала (1) удовлетворяет уравнению [1,4]:

$$rot \frac{1}{\eta} rot\mathbf{u} + \frac{k^2}{\eta} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{2}$$

краевым условиям

$$\left. \left\{ \left[\mathbf{n}, \frac{1}{\eta} rot\mathbf{u} \right] + \psi \mathbf{u} + \vec{\varphi} \right\} \right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

и известному условию сопряжения на $\partial\Omega_{S_j}$ -той поверхности

$$\left[\mathbf{H}_\tau \right] = S\mathbf{E}_\tau . \tag{4}$$

Учитывая ограниченные ресурсы памяти ЭВМ, будем использовать только конечные элементы, представляющие собой прямоугольные параллелепипеды в прямоугольной декартовой системе координат. Они получаются в результате разбиения трехмерной области системой плоскостей, параллельных координатным плоскостям.

При решении задачи будем использовать краевое условие первого рода

$$\left. \mathbf{u} \right|_{\partial\Omega} = \vec{\varphi} . \tag{5}$$

Функция $\vec{\varphi}$ корректируется в процессе расчетов на основе решения внешней краевой задачи для полупространства (верхняя и нижняя границы) и посредством учета асимптотического поведения компонент электромагнитного поля на относительно больших расстояниях от неоднородности (боковые границы) в соответствии с алгоритмом Шварца (асимптотика 3-го порядка).

В пределах каждого элемента будем использовать локальные координаты $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$. Начало координат соответствует ближней левой верхней вершине ячейки.

Вычисления будем вести на сетке:

$$\bar{\varpi}=\left\{\left(x_{1i},x_{2j},x_{3k}\right)|\,i=\overline{1,N_1},\ j=\overline{1,N_2}\ k=\overline{1,N_3}\right\}$$

с шагами

$$h_{\alpha i}=x_{\alpha i+1}-x_{\alpha i},\ \alpha=1,2,3,\ i=\overline{1,N_\alpha-1}.$$

Для решения задачи (2-3) в каждом из M конечных элементов будем использовать набор базисных (пробных) функций $P^{(i)}_{\alpha,j}\left(\bar{x}_i\right)$, i = 1,2,3; α =1,2; $j=\overline{1,M}$. В локальной системе координат должны удовлетворять условиям:

$$P^{(i)}_{1,j}\left(0\right)=P^{(i)}_{2,j}\left(h_{ij}\right)=1,$$
$$P^{(i)}_{1,j}\left(h_{ij}\right)=P^{(i)}_{2,j}\left(0\right)=0.$$

Для упрощения индексации выделим один элемент с волновым числом k и вычислим его вклад ΔF_3 в функционал (1) (рис. 1a). У функции $P^{(i)}_{\alpha,j}$ индекс *j* временно будем опускать.

Сначала будем полагать, что в пределах элемента *S*-пленки отсутствуют. Поле $\mathbf{u}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$ будем аппроксимировать в нем отношением

$$\mathbf{u}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\simeq\sum_{i=1}^{8}\mathbf{u}_i\tau_i\ , \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
\tau_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)&=P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_2)P_1^{(3)}(\bar{x}_3),\\
\tau_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)&=P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_2^{(2)}(\bar{x}_2)P_1^{(3)}(\bar{x}_3),\\
\tau_3(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)&=P_2^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_2)P_1^{(3)}(\bar{x}_3),\\
\tau_4(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)&=P_2^{(1)}(\bar{x}_1)P_2^{(2)}(\bar{x}_2)P_1^{(3)}(\bar{x}_3),\\
\tau_5(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)&=P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_2)P_2^{(3)}(\bar{x}_3),\\
\tau_6(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)&=P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_2^{(2)}(\bar{x}_2)P_2^{(3)}(\bar{x}_3),\\
\tau_7(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)&=P_2^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_2)P_2^{(3)}(\bar{x}_3),\\
\tau_8(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)&=P_2^{(1)}(\bar{x}_1)P_2^{(2)}(\bar{x}_2)P_2^{(3)}(\bar{x}_3).
\end{aligned} \tag{7}$$

В дальнейшем будем использовать оператор $d_\alpha:=\partial/\partial x_\alpha,\ \alpha=1,2,3$. Введем, кроме того, обозначения

$$\begin{aligned}
&h_{\alpha i}=x_{\alpha i+1}-x_{\alpha i},\ \alpha=1,2,3,\ i=\overline{1,N_\alpha-1}.\\
&v^t\triangleq(v_1,v_2,\ldots v_8);\\
&w^t\triangleq(w_1,w_2nw_8);\\
&F_\alpha^t\triangleq(F_1^{(\alpha)},F_2^{(\alpha)},\ldots F_\alpha^{(\alpha)});\\
&\hat{T}_0=(\tau_i\cdot\tau_j),i,\ j=1,\overline{8};\\
&\hat{T}_{\alpha\beta}\triangleq(d_\alpha\tau_i\cdot d_\beta\tau_j);\\
&\alpha,\beta=1,2,3,
\end{aligned}$$

где матрицы $\hat{T}_0, \hat{T}_{\alpha\beta}$ имеют размер 8x8, а u_i, v_i, w_i, $i=\overline{1,8}$ -значения составляющих u_x, u_y, u_z вектора **u** *в* узлах сетки и $F_i^{(1)}, F_i^{(2)}, F_i^{(3)}$ - величины составляющих вектора ***f*** в вершинах элемента. Для дальнейшего функционал ΔF_3 запишем в следующем виде:

$$\Delta F_3 = \int\limits_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2 + \frac{k^2}{\eta}u_x^2 + \right.$$
$$+2f_x u_x + \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \frac{k^2}{\eta}u_y \ + \tag{8}$$
$$+2f_y u_y + \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2 + \frac{k^2}{\eta}u_z \ +$$
$$\left. +2f_z u_z - 2\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] dv.$$

Легко доказать, что

$$f_x u_x \cong \sum_{i=1}^{8} u_i\,\tau_i \cdot \sum_{j=1}^{8} f_j \tau_j = u^t \hat{T}_0 F_1. \tag{9}$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 \cong \sum_{i=1}^{8} u_i\, d_2\tau_i \cdot \sum_{j=1}^{8} u_j d_2 \tau_j = u^t \hat{T}_{22} u, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_y}{\partial z} \cong \sum_{i=1}^{8} w_i\, d_2\tau_i \cdot \sum_{j=1}^{8} v_j d_3 \tau_j = w^t \hat{T}_{23} u. \tag{11}$$

Если матричные выражения типа (9) - (11) сопоставить всем слагаемым в (8), то после простых преобразований получим:

$$\Delta F_3 = \int\limits_{\Omega_1} \left[u^t\,\hat{T}_1 u + 2u^t \hat{T}_0 F_1 + \vartheta^t \hat{T}_2 v + \right.$$
$$+2v^t \hat{T}_0 F_2 + w^t \hat{T}_3 w + 2w^t \hat{T}_0 F_3 -$$
$$\left. -2(w^t\,\hat{T}_{23} v + u^t \hat{T}_{31} w + v^t \hat{T}_{12} u)\right] dv, \tag{12}$$

где

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{\eta}\left(T_{22} + T_{33} + k^2 \hat{T}_0\right),$$
$$\hat{T}_2 = \eta^{-1}\left(T_{11} + T_{33} + k^2 \hat{T}_0\right),$$
$$\hat{T}_1 = \eta^{-1}\left(T_{11} + T_{22} + k^2 \hat{T}_0\right). \tag{13}$$

При надлежащем выборе пробных функций $P_\alpha^{(i)}$ интеграл (12) вычисляется в замкнутом виде. Обозначая

$$T_\alpha = \int\limits_{\Omega_1} \hat{T}_2 dv\,;\; T_{\alpha\beta} = \int\limits_{\Omega_1} \frac{1}{\eta}\,\hat{T}_{\alpha\beta} dv, \tag{14}$$

получим окончательное выражение для вклада в интеграл

$$\Delta F_3 = u^t T_1 u + 2u^t T_0 F_1 + v^t T_2 v + 2v^t T_0 F_2 + w^t T_3 w + 2w^t T_0 F_3 - \\ -2(w^t T_{23} \vartheta + u^t T_{31} w + v^t T_{23} u). \tag{15}$$

Рассмотрим теперь фрагмент сетки, изображенный на рис. 2. Каждый внутренний узел является общей вершиной восьми, элементов. Согласно (14), он будет использоваться для вычисления вкладов ΔF_3 в интеграл F_3 только этих восьми элементов и не будет использоваться во всех остальных ячейках.

Для получения системы алгебраических уравнений нужно найти частные производные от функционала (1) по неизвестным значениям поля в узлах сетки и приравнять их нулю:

$$\frac{\partial F_3}{\partial u_{ijk}} = 0; \ \frac{\partial F_3}{\partial v_{ijk}} = 0; \frac{\partial F_3}{\partial w_{ijk}} = 0; \\ i = 2, \overline{N_x - 1}\,; \ j = 2, \overline{N_y - 1}\,; k = 2, \overline{N_z - 1}\,. \tag{16}$$

Таким образом, общий вид уравнения системы (16) получается в результате суммирования вкладов типа (15) для восьми ячеек, примыкающих к рассматриваемому узлу (№14 на рис. 2). Затем находятся частные производные по составляющим вектора $\vec{u}$ в нем и приравниваются нулю. Воспользуемся соотношением (15). Пусть узел 14 на рис. 2 соответствует узлу 1 на рис. 1а. Найдем $\partial \Delta F_3/\partial u_1$, $\partial \Delta F_3/\partial \vartheta_1, \partial \Delta F_3/\partial \omega_1$. Пусть $\mathbf{I}(l) \in \mathbb{R}^8$ вектор, l-тая составляющая которого равна 1, а все другие –нулю. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(u^t T_\alpha u) = \vec{I}\,(i) T_\alpha u + u^t T_\alpha \vec{I}\,(i), \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(u^t T_0 F_1) = \vec{I}\,(i) T_0 F_1. \tag{18}$$

Учитывая формулы (17), (18), получим

$$\frac{\partial \Delta F_3}{\partial u_1} = \vec{I}^t\,(1) T_1 u + u^t T_1 \vec{I}\,(1) + 2\vec{I}^{\,t}(1) T_0 F_1 - \\ -2\left(\vec{I}^t\,(1) T_{31} w + v^t T_{12} \vec{I}\,(1)\right); \tag{19}$$

$$\frac{\partial \Delta F_3}{\partial v_1} = \vec{I}^t\,(1) T_2 v + v^t T_2 \vec{I}\,(1) + 2\vec{I}^{\,t}(1) T_0 F_2 - \\ -2\left(w^t T_{23} \vec{I}\,(1) + \vec{I}\,(1) T_{12} u\right); \tag{20}$$

$$\frac{\partial \Delta F_3}{\partial v w_1} = \vec{I}^t\,(1) T_3 w + w^t T_3 \vec{I}\,(1) + 2\vec{I}^{\,t}(1) T_0 F_3 - \\ -2\left(\vec{I}^t\,(1) T_{23} v + u^t T_{31} \vec{I}\,(1)\right). \tag{21}$$

Пусть

$$T_\alpha = \left(t_{\alpha,i,j}\right); \ \ i,j = 1{,}8; \ \ \alpha = 0{,}1{,}2{,}3{,}12{,}31{,}23,$$

тогда из (19) получим:

$$\frac{\partial \Delta F_3}{\partial u_1} = 2u_1 t_{1,11} + \sum_{i=2}^{8} (t_{1,1i} + t_{i1,1}) u_1 + \\ +2\sum_{i=1}^{8} t_{0,1i} F_i^{(1)} - 2\left(\sum_{i=1}^{8} t_{31,1i} w_i + \sum_{i=1}^{8} t_{12,i1} v_i\right) \tag{22}$$

Аналогично записываются производные для $\frac{\partial \Delta F_3}{\partial v_1}, \frac{\partial \Delta F_3}{\partial w_1}$. Обозначим интегралы от элементов матриц $\hat{T}_0$, $\hat{T}_{\propto\beta}$, $\int_{\Omega_1} \tau_i \tau_j dv = r_{ij}, r_{\alpha\beta,ij} = \int_{\Omega_1} d_\alpha \tau_i d_\beta \tau_j dxdydz$. Тогда $t_{0,1i} = r_{1i;}$

$$t_{1,1i} = \eta^{-1}(r_{22,1i} + r_{33,1i} + k^2\, r_{1i}),$$
$$t_{1,i1} = \eta^{-1}(r_{22,i1} + r_{33,i1} + k^2\, r_{i1}),$$
$$t_{31,i1} = \eta^{-1} r_{31,1i};\ t_{12,i1} = \eta^{-1} r_{12,1i}.$$

Пусть по определению

$$P_\alpha^{(i)} = \int_0^{h_i} \left[p_\alpha^{(i)}(x_i)\right]^2 dx_i;\ DP_\alpha^{(i)} = \int_0^{h_i} \left\{\left[p_\alpha^{(i)}(x_i)\right]'\right\}^2 dx_i;$$
$$P_{12}^{(i)} = \int_0^{h_i} p_1^{(i)}(x_i) p_2^{(i)}(x_i) dx_i;\ DP_1^{(i)} = \int_0^{h_i} \left\{\left[p_1^{(i)}(x_i)\right]'\right\}^2 dx_i;$$
$$\bar{P}_\alpha^{(i)} = \int_0^{h_i} p_\alpha^{(i)}(x_i)\left[p_\alpha^{(i)}(x_i)\right]' dx_i;\ DP_\alpha^{(i)} = \int_0^{h_i} \left[p_\propto^{(i)}(x_i)\right]'\left[p_\propto^{(i)}(x_i)\right]' dx_i;$$
$$\bar{P}_{12}^{(i)} = \int_0^{h_i} p_1^{(i)}(x_i)\left[p_2^{(i)}(x_i)\right]' dx_i;\ DP_{12}^{(i)} = \int_0^{h_i} \left[p_2^{(i)}(x_i)\right]'\left[p_1^{(i)}(x_i)\right]' dx_i.$$

Тогда

$$r_{22,11} = \int_{\Omega_1} \left[p_1^{(1)}(\bar{x})\right]^2 \left[d_2 p_1^{(2)}(\bar{y})\right]^2 \left[p_1^{(3)}(\bar{z})\right]^2 dxdydz = P_1^{(1)} DP_1^{(2)} P_1^{(3)}.$$

Аналогично

$$r_{33,11} = P_1^{(1)} \cdot P_1^{(2)} \cdot DP_1^{(3)};$$
$$r_{11} = P_1^{(1)} \cdot P_1^{(2)} \cdot P_1^{(3)}$$

Таким образом,

$$t_{1,11} = \eta^{-1} P_1^{(1)}\left(DP_1^{(2)} \cdot P_1^{(3)} + P_1^{(2)} DP_1^{(3)} + k^2 P_1^{(2)} P_1^{(3)}\right),$$
$$t_{1,12} = \eta^{-1} P_1^{(1)}\left(DP_{12}^{(2)} \cdot P_1^{(3)} + P_{12}^{(2)} DP_1^{(3)} + k^2 P_{12}^{(2)} P_1^{(3)}\right),$$
$$t_{1,13} = \eta^{-1} P_{12}^{(1)}\left(DP_1^{(2)} \cdot P_1^{(3)} + P_1^{(2)} DP_1^{(3)} + k^2 P_1^{(2)} P_1^{(3)}\right),$$
$$t_{1,14} = \eta^{-1} P_{12}^{(1)}\left(DP_{12}^{(2)} \cdot P_1^{(3)} + D_{12}^{(2)} DP_1^{(3)} + k^2 P_{12}^{(2)} P_1^{(3)}\right),$$
$$t_{1,15} = \eta^{-1} P_1^{(1)}\left(DP_1^{(2)} \cdot P_{12}^{(3)} + P_1^{(2)} DP_{12}^{(3)} + k^2 P_1^{(2)} P_{12}^{(3)}\right),$$
$$t_{1,16} = \eta^{-1} P_1^{(1)}\left(DP_{12}^{(2)} \cdot P_{12}^{(3)} + P_{12}^{(2)} DP_{12}^{(3)} + k^2 P_{12}^{(2)} P_{12}^{(3)}\right),$$
$$t_{1,17} = \eta^{-1} P_{12}^{(1)}\left(DP_1^{(2)} \cdot P_{12}^{(3)} + P_1^{(2)} DP_{12}^{(3)} + k^2 P_1^{(2)} P_{12}^{(3)}\right),$$
$$t_{1,18} = \eta^{-1} P_{12}^{(1)}\left(DP_{12}^{(2)} \cdot P_{12}^{(3)} + P_{12}^{(2)} DP_{12}^{(3)} + k^2 P_{12}^{(2)} P_{12}^{(3)}\right). \qquad (23)$$

Матрицы T_α, $\alpha = 0,3$ симметричны, поэтому

$$t_{1,1i} + t_{1,i1} = 2t_{1,1i} = 2t_{1,i1}$$

Запишем выражение для всех коэффициентов в (22):

$$t_{0,1i} = \int_{\Omega_1} \tau_1\, \tau_i d\vartheta$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
t_{0,11} &= P_1^{(1)} P_1^{(2)} P_1^{(3)},\\
t_{0,12} &= P_1^{(1)} P_{12}^{(2)} P_1^{(3)},\\
t_{0,13} &= P_{12}^{(1)} P_1^{(2)} P_1^{(3)},\\
t_{0,14} &= P_{12}^{(1)} P_{12}^{(2)} P_1^{(3)},\\
t_{0,15} &= P_1^{(1)} P_1^{(2)} P_{12}^{(3)},\\
t_{0,16} &= P_1^{(1)} P_{12}^{(2)} P_{12}^{(3)},\\
t_{0,17} &= P_{12}^{(1)} P_1^{(2)} P_{12}^{(3)},\\
t_{0,18} &= P_{12}^{(1)} P_{12}^{(2)} P_{12}^{(3)}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Далее

$$\begin{aligned}
t_{31,11} &= \eta^{-1} \bar{P}_1^{(1)} P_1^{(2)} \bar{P}_1^{(3)},\\
t_{31,12} &= \eta^{-1} \bar{P}_1^{(1)} P_{12}^{(2)} \bar{P}_1^{(3)},\\
t_{31,13} &= \eta^{-1} \bar{P}_{12}^{(1)} P_1^{(2)} \bar{P}_1^{(3)},\\
t_{31,14} &= \eta^{-1} \bar{P}_{12}^{(1)} P_{12}^{(2)} \bar{P}_1^{(3)},\\
t_{31,15} &= \eta^{-1} \bar{P}_1^{(1)} P_1^{(2)} \bar{P}_{21}^{(3)},\\
t_{31,16} &= \eta^{-1} \bar{P}_1^{(1)} P_{12}^{(2)} \bar{P}_{21}^{(3)},\\
t_{31,17} &= \eta^{-1} \bar{P}_{12}^{(1)} P_1^{(2)} \bar{P}_{21}^{(3)},\\
t_{31,18} &= \eta^{-1} \bar{P}_{12}^{(1)} P_{12}^{(2)} \bar{P}_{21}^{(3)},
\end{aligned} \tag{25}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned}
t_{12,11} &= \eta^{-1} \bar{P}_1^{(1)} \bar{P}_1^{(2)} P_1^{(3)},\\
t_{12,12} &= \eta^{-1} \bar{P}_1^{(1)} \bar{P}_{12}^{(2)} P_1^{(3)},\\
t_{12,13} &= \eta^{-1} \bar{P}_{12}^{(1)} \bar{P}_1^{(2)} P_1^{(3)},\\
t_{12,14} &= \eta^{-1} \bar{P}_{21}^{(1)} \bar{P}_{12}^{(2)} P_1^{(3)},\\
t_{12,15} &= \eta^{-1} \bar{P}_1^{(1)} \bar{P}_1^{(2)} P_{12}^{(3)},\\
t_{12,16} &= \eta^{-1} \bar{P}_1^{(1)} \bar{P}_{21}^{(2)} P_{12}^{(3)},\\
t_{12,17} &= \eta^{-1} \bar{P}_{21}^{(1)} \bar{P}_1^{(2)} P_{12}^{(3)},\\
t_{12,18} &= \eta^{-1} \bar{P}_{21}^{(1)} \bar{P}_{12}^{(2)} P_{12}^{(3)}.
\end{aligned}$$

Аналогично находятся коэффициенты в производных $\frac{\partial \Delta F_3}{\partial \vartheta_1}, \frac{\partial \Delta F_3}{\partial w_1}$, определяемых формулами (20), (21).

Обратимся снова к рис.2. Выполним суммирование выражений вида (22) по всем ячейкам, окружающих точку 14 и приравняем сумму к нулю. В результате получим общий вид уравнений системы, к которой редуцируется вариационная задача:

$$\sum_{i=1}^{27} (u_i C_i^{(1)} + v_i D_i^{(1)} + w_i G_i^{(1)}) - R_i^{(1)} F_i^1 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{27}(vC_i^{(2)} + w_iD_i^{(2)} + u_iG_i^{(2)}) - R_i^{(2)}F_i^2 = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{27}(wC_i^{(3)} + u_iD_i^{(3)} + v_iG_i^{(3)}) - R_i^{(3)}F_i^3 = 0, \qquad (26)$$

где, согласно (24), (25)

$$C_{14}^{(1)} = \sum_{j=1}^{8} t_{1,11}^{(j)}, \qquad t_{1,11}^{(j)} = P_{1,j}^{(1)}\left(DP_{1,j}^{(2)}P_{1,j}^{(3)} + P_{1,j}^{(2)}DP_{1,j}^{(3)} + k_j^2 P_{1,j}^{(2)}P_{1,j}^{(3)}\right),$$
$$C_{13}^{(1)} = \sum_{j=1,2,5,6}^{8} t_{1,15}^{(j)}, \qquad C_{15}^{(1)} = \sum_{j=3,4,7,8}^{8} t_{14,15}^{(j)},$$
$$C_{5}^{(1)} = \sum_{j=1}^{4} t_{1,13}^{(j)}, \qquad C_{23}^{(1)} = \sum_{j=5}^{8} t_{1,13}^{(j)},$$

$$C_{11}^{(1)} = \sum_{j=2,3,6,7}^{8} t_{1,12}^{(j)}, \quad C_{17}^{(1)} = \sum_{j=1,4,5,8}^{8} t_{1,12}^{(j)}, \quad C_{10}^{(1)} = t_{1,16}^{(2)} + t_{1,16}^{(6)},$$
$$C_{16}^{(1)} = C_{1,16}^{(1)} + C_{1,16}^{(5)}, \quad C_{12}^{(1)} = t_{1,16}^{(3)} + t_{1,16}^{(7)}, \quad C_{18}^{(1)} = t_{1,16}^{(4)} + t_{1,16}^{(8)},$$
$$C_{4}^{(1)} = t_{1,17}^{(1)} + t_{1,16}^{(2)}, \quad C_{6}^{(1)} = t_{1,17}^{(3)} + t_{1,17}^{(4)}, \quad C_{22}^{(1)} = t_{1,17}^{(4)} + t_{1,17}^{(6)},$$
$$C_{24}^{(1)} = t_{1,17}^{(7)} + t_{1,17}^{(8)}, \quad C_{2}^{(1)} = t_{1,14}^{(2)} + t_{1,14}^{(3)}, \quad C_{8}^{(1)} = t_{1,14}^{(1)} + t_{1,14}^{(4)},$$
$$C_{20}^{(1)} = t_{1,14}^{(6)} + t_{1,14}^{(7)}, \quad C_{26}^{(1)} = t_{1,14}^{(5)} + t_{1,14}^{(8)}, \quad C_{1}^{(1)} = t_{1,18}^{(2)},$$
$$C_{7}^{(1)} = t_{1,18}^{(1)}, \quad C_{25}^{(1)} = t_{1,18}^{(5)}, \quad C_{19}^{(1)} = t_{1,18}^{(6)},$$
$$C_{3}^{(1)} = t_{1,18}^{(3)}, \quad C_{9}^{(1)} = t_{1,18}^{(4)}, \quad C_{21}^{(1)} = t_{1,18}^{(7)},$$
$$C_{27}^{(1)} = t_{1,18}^{(8)}.$$

Коэффициенты $D_i^{(1)}, G_i^{(1)}, R_i^{(1)}$вычисляются по тем же формулам, что и $C_i^{(1)}$, путем замены $t_{1,1i}^{(j)}$ на $t_{12,1i}^{(j)}$, $t_{31,1i}^{(j)}$, $t_{0,1i}$ соответственно.

Аналогично из соображений симметрии записываются выражения для коэффициентов $C_i^{(\alpha)}$, $D_i^{(\alpha)}$, $G_i^{(\alpha)}$, $R_i^{(\alpha)}$, i =1,8, α=2,3.

Каждому внутреннему (i, j, k)-тому узлу сетки соответствует система из трех уравнений (26). Общее количество та-ких систем равно $(N_x-2)\times(N_y-2)\times(N_z-2)$.

Вычислительные схемы, учитывающие присутствие в геоэлектрическом разрезе *S* -пленок.

Вклад пленок в функционал (1) определяет интеграл

$$F_S = -i\omega\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial\Omega_{Sj}} S_j\,\vec{u}_\tau^2 ds, \qquad (27)$$

где $\partial\Omega_{S_j}$ - поверхности пленок.

Для получения расчетных формул снова рассмотрим отдельный элемент и различное положение пленок в нем. Ограничимся случаями, изображенными на рис. 1.

1. Пленка S_1 (рис. 1б).

В этом случае $\mathbf{u}_\tau = (0, u_y, u_z)$. Поле будем аппроксимировать функцией

$$u_r = \sum_{i=1}^{8} (u_r)_i \tau_i, \tag{28}$$

где $(\mathbf{u}_\tau)_i$ – значения вектора $\mathbf{u}_\tau$ в вершинах элемента,

$$\tau_1(\bar{x}_2, \bar{x}_3) = P_1^{(2)}(\bar{x}_2) P_1^{(3)}(x_3);\ \tau_2 = P_2^{(2)} P_1^{(3)};$$
$$\tau_5 = P_1^{(2)} P_2^{(3)};\ \ \tau_6 = P_2^{(2)} P_2^{(3)};\ \tau_3 = \tau_4 = \tau_7 = \tau_8 = 0.$$

Заменяя проводимость пленки средним значением $\bar{S}_1$. Получим

$$\Delta F_{s1} = -i\omega \bar{S}_1 \int_0^{\sim 2} \int_0^{\sim 3} (u_y^2 + u_z^2) dx_2 dx_3 \cong -i\omega \bar{S}_1 (\vartheta^t T_{S1} \vartheta + w^t T_{S_1} w). \tag{29}$$

Первая строчка матрицы T_{S_1} имеет элементы $t_{1i}^{(S_1)}$:

$$t_{11}^{(s_1)} = P_1^{(2)} P_2^{(3)};\ t_{12}^{(s_1)} = P_{12}^{(2)} P_2^{(3)};\ t_{15}^{(s_1)} = P_1^{(2)} P_{12}^{(3)};$$
$$t_{16}^{(s_1)} = P_{12}^{(2)} P_{12}^{(3)};\ t_{13}^{(s_1)} = t_{14}^{(s_1)} = t_{17}^{(s_1)} = t_{18}^{(s_1)} = 0. \tag{30}$$

2. Пленка S_2 (рис. 1г).

Здесь $\mathbf{u}_\tau = (u_x, 0, u_z)$ и

$$\tau_1 = P_1^{(1)}(\bar{x}_1) P_1^{(3)}(\bar{x}_3);\ \tau_3 = P_2^{(1)} P_1^{(3)}; \tau_5 = P_1^{(1)} P_1^{(3)};\ \tau_7 = P_2^{(1)} P_2^{(3)};$$
$$\tau_2 = \tau_4 = \tau_6 = \tau_8 = 0.$$

По аналогии с (29) для вклада ΔF_{S_2} получим:

$$\Delta F_{S_2} = -i\omega \bar{S}_2 (u^t T_{S_2} u + w^t T_{S_2} w). \tag{31}$$

Элементы $t_{1i}^{(S_2)}$ первой строчки матрицы T_{S_2} определяются формулами:

$$t_{13}^{(s_2)} = P_{12}^{(2)} P_1^{(3)};\ t_{11}^{(s_2)} = P_1^{(2)} P_1^{(3)};\ t_{15}^{(s_2)} = P_1^{(2)} P_{12}^{(3)};$$
$$t_{17}^{(s_2)} = P_{12}^{(2)} P_{12}^{(3)};\ t_{12}^{(s_2)} = t_{14}^{(s_2)} = t_{16}^{(s_2)} = t_{18}^{(s_2)} = 0.$$

3. Пленка S_3 (рис. 1в),

Очевидно, $\mathbf{u}_\tau = (u_x, u_y, 0)$ и

$$\tau_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = P_1^{(1)}(\bar{x}_1) P_1^{(2)}(\bar{x}_2);\ \tau_2 = P_1^{(1)}(\bar{x}_1) P_2^{(2)}(\bar{x}_2);$$
$$\tau_3 = P_2^{(1)}(\bar{x}_1) P_1^{(2)}(\bar{x}_2);\ \tau_4 = P_2^{(1)}(\bar{x}_1) P_2^{(2)}(\bar{x}_2);$$
$$\tau_5 = \tau_6 = \tau_7 = \tau_8 = 0.$$

Вклад пленки S_3 равен:

$$\Delta F_{S_2} \cong -i\omega \bar{S}_3 (u^t T_{S_3} u + \vartheta^t T_{S_3} \vartheta), \tag{32}$$

где элементы первой строчки матрицы T_{S_3} имеют вид:

$$t_{11}^{(s_3)} = P_1^{(1)} P_1^{(2)};\ t_{12}^{(s_3)} = P_{12}^{(1)} P_1^{(2)};\ t_{13}^{(s_3)} = P_1^{(1)} P_{12}^{(2)};$$
$$t_{14}^{(s_3)} = P_{12}^{(1)} P_{12}^{(2)};\ t_{15}^{(s_3)} = t_{16}^{(s_3)} = t_{17}^{(s_3)} = t_{18}^{(s_3)} = 0. \tag{33}$$

4. Пленка S_{13} (рис.1б).

В пределах пленки $\bar{x}_3 = -\bar{x}_1 h_3 / h_1$, а вектор

$$\vec{u}_\tau = \left(\cos\alpha_{13} \cdot u_x, u_y, \cos\gamma_{13} \cdot u_z\right),$$

где

$$\cos\alpha_{13} = h_1 / \sqrt{h_1^2 + h_3^2}\,; \; \cos\gamma_{13} = h_3 / \sqrt{h_1^2 + h_3^2}.$$

Вклад $\Delta F_{S_{13}}$ в интеграл (27) равен

$$\Delta F_{s_3} \cong i\omega\sqrt{1 + (h_3/h_1)^2} \int_0^{h_1}\int_0^{h_2} S_{13}\left[\cos^2\alpha_{13} u_x^2 + u_y^2 \cos^2\gamma_{13} u_z^2\right] dx_1 dx_2 =$$

$$= i\omega\bar{S}_{13}(\cos^2\alpha_{13} u^t\, T_{s_{13}}\vartheta + \cos^2\gamma_{13} w^t T_{s_{13}} w). \qquad (34)$$

Функции τ_i в (28) имеют вид:

$$\tau_1 = P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(x_2)P_1^{(3)}(\bar{x}_1 \cdot h_3/h_1);\; \tau_2 = P_1^{(1)} \cdot P_2^{(2)} \cdot P_1^{(3)}(\bar{x}_1 \cdot h_3/h_1);$$
$$\tau_7 = P_2^{(1)} \cdot P_1^{(2)} \cdot P_2^{(3)};\; \tau_8 = P_2^{(1)} \cdot P_2^{(2)} \cdot P_2^{(3)}(\bar{x}_1 \cdot h_3/h_1);$$
$$\tau_5 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_6 = 0.$$

а элементами первой строчки матрицы S_{13} являются числа

$$t_{13}^{(s_{13})} = P_1^{(2)}P_{11,11}^{(13)};\; t_{12}^{(s_{13})} = P_{12}^{(2)}P_{11,11}^{(13)};\; t_{17}^{(s_{13})} = P_1^{(2)}P_{12,12}^{(13)};\; t_{18}^{(s_{13})} = P_{12}^{(2)}P_{12,12}^{(13)}$$
$$t_{13}^{(s_{13})} = t_{14}^{(s_{13})} = t_{15}^{(s_{13})} = t_{16}^{(s_{13})} = 0, \qquad (35)$$

где

$$P_{\alpha_m,\beta_n}^{(lk)} = \sqrt{1 + (hk/hl)^2} \int_0^{h_l} P_\propto^{(l)}(x_l)P_m^{(l)}(x_l)P_\beta^{(k)}(x_l h_k/h_l)P_n^{(k)}(x_l h_k/h_l)dx_l,$$
$$\propto, \beta, m, n = 1{,}2;\; l, k = 1{,}2{,}3.$$

5. Пленка S_{12} (рис. 1в). В пределах пленки $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 h_2 / h_1$, а вектор

$$\vec{u}_\tau = \left(\cos\alpha_{12} \cdot u_x, \cos\beta_{12} \cdot u_y, u_z\right),$$

где

$$\cos\alpha_{12} = h_1 / \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\,, \cos\beta_{12} = h_2 / \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Интеграл по поверхности пленки $\Delta F_{S_{12}}$ равен:

$$\Delta F_{s_{12}} = -i\omega\sqrt{1 + (h_2/h_1)^2} \int_0^{h_1}\int_0^{h_2} S_{12}\left[\cos^2\alpha_{12} u_x^2 + \cos^2\beta_{12} u_y^2 + u_z^2\right] dx_1 dx_2$$

$$\cong i\omega\bar{S}_{12}(\cos^2\alpha_{12} u^t\, T_{s_{12}} u + \cos^2\beta_{12}\vartheta^t T_{s_{12}}\vartheta + w^t T_{s_{13}} w). \qquad (36)$$

В аппроксимации (28) функции τ_i имеют вид:

$$\tau_1 = P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_1 \cdot h_2/h_1)P_1^{(3)}(\bar{x}_3);\; \tau_4 = P_2^{(1)} \cdot P_2^{(2)} \cdot (\bar{x}_1 \cdot h_2/h_1)P_1^{(3)}(\bar{x}_3);$$
$$\tau_5 = P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_1 \cdot h_2/h_1)P_2^{(3)}(\bar{x}_3);\; \tau_4 = P_2^{(1)} \cdot P_2^{(2)} \cdot P_2^{(3)};$$
$$\tau_2 = \tau_3 = \tau_6 = \tau_7 = 0.$$

После интегрирования элементами первой строчки матрицы $T_{S_{12}}$ будут числа:

$$t_{11}^{(s_{12})} = P_{11,11}^{(12)}P_1^{(3)};\; t_{14}^{(s_{12})} = P_{12,12}^{(12)}P_1^{(3)};\; t_{15}^{(s_{12})} = P_{11,11}^{(12)}P_{12}^{(3)};\; t_{18}^{(s_{12})} = P_{12,12}^{(12)}P_{12}^{(3)};$$

$$t_{12}^{(s_{23})} = t_{14}^{(s_{23})} = t_{15}^{(s_{23})} = t_{17}^{(s_{23})} = 0. \qquad (37)$$

6. Пленка S_{23} (рис. 1г).

На пленке

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_2 h_3 / h_2$$

и

$$\vec{u}_\tau = (u_x, \cos\beta_{23} \cdot u_y, \cos\gamma_{23}\, u_z),$$

где

$$\cos\beta_{23} = h_2 / \sqrt{h_2^2 + h_3^2}\,; \ \cos\gamma_{23} = h_3 / \sqrt{h_2^2 + h_3^2}.$$

Её вклад $\Delta F_{S_{23}}$ равен

$$\Delta F_{S_{23}} = -i\omega \sqrt{1 + (h_3/h_2)^2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} S_{23} \left[u_x^2 + \cos^2\beta_{23} u_y^2\, u_x^2 + \cos^2\gamma_{23} u_z^2\right] dx_1 dx_2.$$

После интегрирования получим

$$\Delta F_{S_{23}} \cong -i\omega \bar{S}_{23} (u^t T_{S_{23}} u + \cos^2\gamma_{23} \vartheta^t T_{S_{23}} \vartheta + \cos^2\gamma_{23} w^t T_{S_{23}} w).$$

При использовании аппроксимации (28) функции τ_i имеют вид:

$$\tau_1 = P_1^{(1)}(\bar{x}_1) P_1^{(2)}(\bar{x}_2) P_1^{(3)}(\bar{x}_2 \cdot h_3/h_2);\ \tau_3 = P_2^{(1)} P_1^{(2)} P_1^{(3)}(\bar{x}_2 \cdot h_3/h_2);$$
$$\tau_6 = P_1^{(1)}(\bar{x}_1) P_2^{(2)}(\bar{x}_2) P_2^{(3)}(\bar{x}_2 \cdot h_3/h_2);\ \tau_8 = P_2^{(1)} P_2^{(2)} P_2^{(3)}(\bar{x}_2 \cdot h_3/h_2);$$
$$\tau_2 = \tau_4 = \tau_5 = \tau_7 = 0. \qquad (38)$$

Элементы матрицы $T_{S_{23}}$ – суть числа:

$$t_{11}^{(s_{23})} = P_1^{(1)} P_{11,11}^{(23)};\ t_{13}^{(s_{23})} = P_{12}^{(1)} P_{11,11}^{(23)};\ t_{16}^{(s_{23})} = P_1^{(1)} P_{12,12}^{(23)};\ t_{18}^{(s_{23})} = P_{12}^{(1)} P_{12,12}^{(23)}$$
$$t_{12}^{(s_{23})} = t_{14}^{(s_{23})} = t_{15}^{(s_{23})} = t_{17}^{(s_{23})} = 0. \qquad (39)$$

Из полученных матриц построим матрицы $T_S^{(1)}, T_S^{(2)}, T_S^{(3)}$, относящиеся к компонентам вектора **u** и учитывающие присутствие в одном элементе всех рассмотренных типов проводящих пленок. Все они симметричные. При вычислении производных из них выделяется только первая строка и первый столбец, поэтому достаточно выписать элементы одной строчки для $T_S^{(\alpha)}$.

В общем виде вклад всех пленок ΔF_S в функционал (1) определим равенством

$$\Delta F_S = -i\omega (u^t T_S^{(1)} u + \vartheta^t T_S^{(2)} \vartheta + w^t T_S^{(3)} w), \qquad (40)$$

где матрицы $T_S^{(\alpha)} = \left(t_{S_{ij}}^{(\alpha)}\right)$ - собираются из таблиц $T_{S_1}, T_{S_2}, T_{S_3}$, $T_{S_{13}}, T_{S_{12}}, T_{S_{23}}$. Запишем элементы первой строчки каждой матрицы:

$$t_{s_{1i}}^{(1)} = \bar{S}_2 t_{1i}^{(s_2)} + \bar{S}_3 t_{1i}^{(s_3)} + \cos^2 \propto_{13} \bar{S}_{13} t_{1i}^{(s_{13})} + \cos^2 \propto_{12} \bar{S}_{12} t_{1i}^{(s_{12})} + \bar{S}_{23} t_{1i}^{(s_{23})}, \qquad (41)$$
$$t_{s_{1i}}^{(2)} = \bar{S}_1 t_{1i}^{(s_1)} + \bar{S}_3 t_{1i}^{(s_3)} + \cos^2\beta_{12} \bar{S}_{12} t_{1i}^{(s_{12})} + \bar{S}_{13} t_{1i}^{(s_{12})} + \cos^2\beta_{12} \bar{S}_{23} t_{1i}^{(s_{23})}, \qquad (42)$$
$$t_{s_{1i}}^{(3)} = \bar{S}_1 t_{1i}^{(s_1)} + \bar{S}_2 t_{1i}^{(s_2)} + \bar{S}_{13} \cos^2\gamma_{13} \bar{S}_{12} t_{1i}^{(s_{13})} + \bar{S}_{12} t_{1i}^{(s_{12})} + \cos^2\gamma_{23} \bar{S}_{23} t_{1i}^{(s_{23})}. \qquad (43)$$

Складывая (40) с (15) получим окончательное выражение для вклада $\Delta \bar{F}_3$ одного элемента в интеграл по всем элементам области Ω:

$$\Delta\bar{F}_3 = u^t\bar{T}_1 u + 2u^t T_0 F_1 + \vartheta^t \bar{T}_2 \vartheta + 2\vartheta^t T_0 F_2 + \\ + w^t \bar{T}_1 w + 2w^t T_0 F_3 - 2(w^t T_{23}\vartheta + u^t \bar{T}_{31} w + \vartheta^t \bar{T}_{12} u), \quad (44)$$

где

$$\bar{T}_1 = T_1 + T_S^{(1)};\ \bar{T}_2 = T_2 + T_S^{(2)};\ \bar{T}_3 = T_3 + T_S^{(3)}.$$

Изменения в формулах (41) - (43) и в выражениях для элементов матриц очевидны.

Приведенная вычислительная конечно-элементная схема инвариантна по отношению к базисным функциям $P_\alpha^{(1)}(\bar{x}_1)$, $P_\alpha^{(2)}(\bar{x}_2)$, $P_\alpha^{(3)}(\bar{x}_3)$. Их целесообразно выбирать такими, чтобы максимально учесть априорную информации о поведении поля в различных частях области *S1*. В частности, не составляет большого труда учесть асимптотическое поведение поля на относительно больших расстояниях от неоднородности. Как показывает опыт решения двумерных задач по методу конечных элементов, по оси z целесообразно использовать экспоненциальные пробные функции $P_{\alpha,j}^{(3)}(\bar{x}_3) = q_{\alpha,j}(\bar{x}_3)$.

Краевые условия в трехмерной задаче

Алгоритмы адаптации граничных значений в процессе расчетов в соответствии с альтернирующим методом Шварца рассмотрены в работах [1,5]. Основное внимание в ней уделено сопряжению решений внешней и внутренней краевых задач на верхней и нижней границах сетки. Базой для их согласования является аналитическое решение в области Фурье-изображений трехмерной задачи для слоистого полупространства, приведенные в [4].

Здесь мы остановимся только на построении краевых условий на боковых границах области Ω. Наиболее простым путем является аппроксимация решения внешней краевой задачи решением асимптотического дифференциального уравнения (с асимптотикой 3-го порядка) [1]:

$$\frac{r^3}{3!}\frac{d^2u}{dr^2} + 3\frac{r^2}{2!}\frac{d^2u}{dr^2} + 3r\frac{du}{dr} + u = f(r), \quad (45)$$

где r - расстояние от центра трехмерной неоднородности, а функция $u(r)$ соответствует компонентам электромагнитного поля. Решение уравнения (45) должно удовлетворять краевым условиям

$$u|_{r=r_i} = u_0;\ \frac{du}{dr}|_{r=r_i} = u_1;\ \frac{d^2u}{dr^2}|_{r=r_i} = u_2. \quad (46)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением задачи (45), (46) является функция:

$$u(r) = C_1 r^{-1} + C_2 r^{-2} + C_3 r^{-3} + f, \quad (47)$$

в которой

$$C_1 = r_i[3(u_0 - f) + 3r_i u_1 + 0{,}5 r_i u_2], \\ C_2 = -r_i^2[3(u_0 - f) + 5r_i u_1 + r_i^2 u_2], \\ C_3 = r_i^3[(u_0 - f) + 2r_i u_1 + 0{,}5 r_i^2 u_2]. \quad (48)$$

Значения $u_i\ \left(i = \overline{0,2}\right)$ рассчитываются по сеточной функции, получаемой в процессе решения трехмерной задачи в ограниченной области Ω.

На основании описанных в статье алгоритмов автором разработаны программы, которые входят в состав новой версии программного обеспечения, для численного решения прямых задач геоэлектрики произвольной размерности, предназначенного как для расчета полей плоской волны, так и полей искусственных источников. В основе вычислительных схем лежат вариационно-разностные методы и альтернирующий метод Шварца [1,5].

Программы позволяют выполнять расчет всех компонент электрического и магнитного полей по методу конечных элементов (МКЭ) [4] и вариационно-разностным методом (ВРМ) [1,4].

При заказе работ с использованием МКЭ вычисления могут выполняться как относительно электрического поля (с последующим пересчетом в магнитное), так и магнитного поля (с последующим пересчетом в электрическое).

Расчет производных на грубой сетке в процессе пересчетов полей в соответствии с уравнениями Максвелла дает большие погрешности. Для устранения этого недостатка разностные производные рассматриваются как начальное приближение для итерационного процесса, уточняющего вычисленные значения. Такую возможность дает программа ***MTDEH*** 3, допускающая решение системы сеточных уравнений как относительно электрического, так и магнитного полей.

При использовании ВРМ первоначально рассчитывается электрическое поле (аномальное или полное). Оно затем пересчитывается в магнитное, которое может быть уточнено по МКЭ в режиме расчета магнитного поля.

Программа пригодна для расчета полей произвольного источника, если имеются программы вычисления его нормального поля в области, занятой неоднородностью, в точках, в которых необходимо вычислить полное поле (например, на поверхности земли). Для коррекции граничных значений используется альтернирующий метод Шварца (АМШ) на основе двумерного быстрого преобразования Фурье. Система разностных уравнений решается итерационным методом с использованием алгоритма верхней релаксации. При этом большое значение имеет выбор достаточно близкого к решению начального приближения. Для источника типа плоской волны оно находится в результате решения ряда двумерных задач, модели которых согласованы с трехмерной моделью среды.

Подготовка исходной информации построена таким образом, чтобы, с одной стороны, облегчить переход пользователей программ численного решения двумерных задач к расчету трехмерных полей, с другой, - использовать уже имеющееся программное обеспечение для моделирования электромагнитных полей в двумерных средах. С этой целью трехмерная модель рассматривается как упорядоченный набор согласованных с ней псевдодвумерных фрагментов. Такая интерпретация модели позволяет включить программы решения двумерных задач в пакет моделирования трехмерных полей на ЭВМ и дает возможность изучать эффекты от трехмерной неоднородности, расположенной в двумерной вмещающей среде.

Программы написаны на языке ФОРТРАН-ГДР применительно к ЭВМ БЭСМ-6 и входят в состав пакета ЭПАК, развиваемого во ВНИИГеофизике.

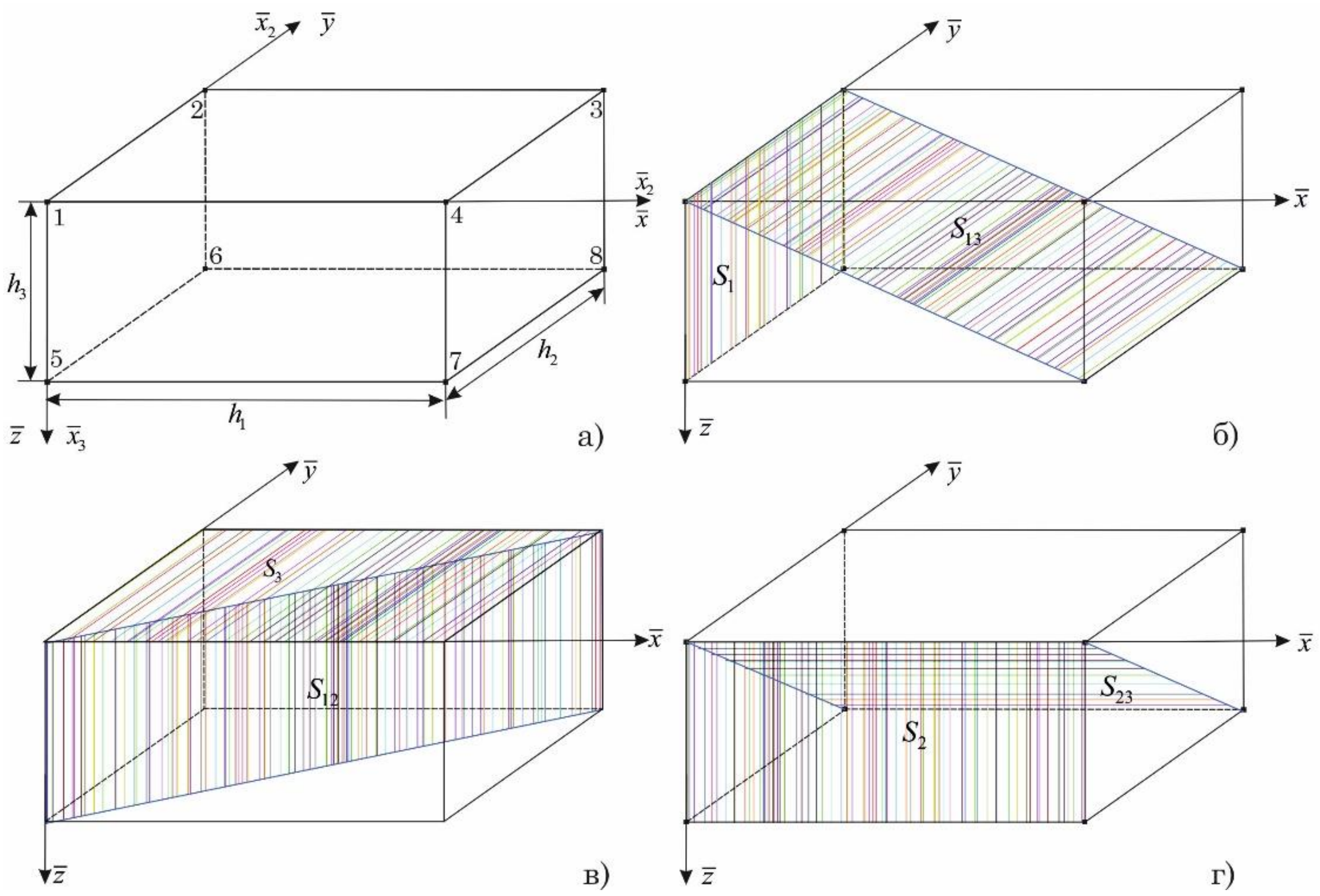

Рис.1

а) Общий вид;

б), в), г) Иллюстрация различного положения S-плёнок.

Вернуться на стр. 8

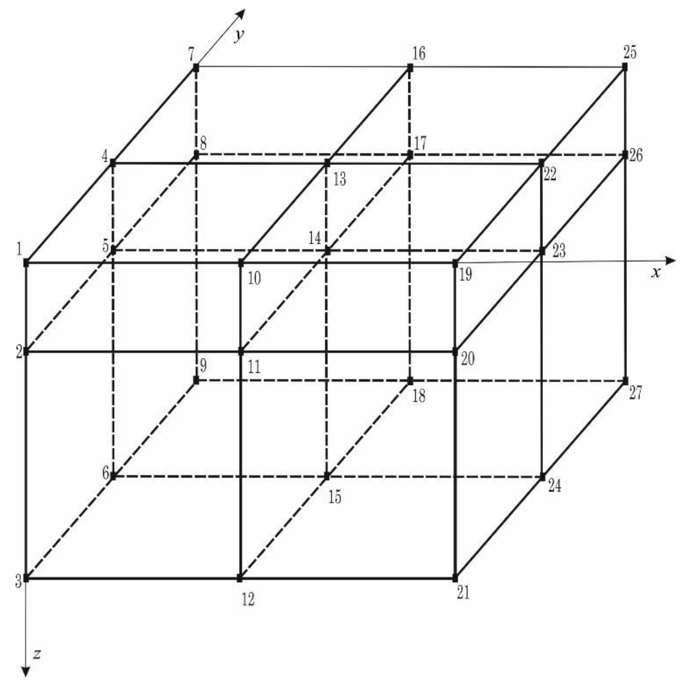

Рис.2 Фрагмент трехмерной сетки.

Вернуться на стр. 4
Вернуться на стр. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваньян Л.Л., Дебабов А.С., Юдин М.Н. Интерпретация магнитотеллурических зондирований неоднородных сред. М., Недра, 1984.
2. Никольский В.В. Вариационные методы внутренних задач электродинамики. М., Наука, 1967, 400 с.
3. Юдин М.Н., Веселовский В.В. Алгоритмы решения двумерных задач геоэлектрики по методу конечных элементов. 1984, 24 с. Рукопись представлена МГРИ. Деп. В ВИНИТИ 11 сентября 1984 г., № 6154-84 Деп.
4. Юдин М.Н. О применении вариационных принципов в прямых задачах геоэлектрики с гармоническим возбуждением поля. Изв. ВУЗов, Геология и разведка, М. 1982, 21 с. Рукопись представлена МГРИ. Деп. в ВИНИТИ 2.06.82, № 2755-82 Деп.
5. Юдин М.Н. Применение альтернирующего метода Шварца для численного решения задач геоэлектрики. М., 1982, 19 с. Рукопись представлена МГРИ. Деп. в ВИНИТИ 12.03.82, № 1047-82 Деп.