



**Министерство высшего и среднего специального образования
СССР**
**Редколлегия журнала "Известия высших учебных заведений"
раздел "Геология и разведка"**

№6154-84 Деп.

УДК 550.837:518

Юдин М.Н., Веселовский В.В.

**АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ ПО
МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Москва-1984 г

Использование метода конечных элементов (МКЭ) для решения задач геоэлектрики имеет некоторые преимущества перед методом конечных разностей. Одно из них состоит в возможности учета априорной информации о поведении электромагнитного поля в пределах элемента, что позволяет существенно повысить точность численного решения задачи на грубой сетке. В этом можно убедиться на примере одномерной задачи с кусочно-постоянным изменением свойств среды:

$$\begin{aligned} d^2 u_i / dz^2 &= \eta_i^2 u_i, & i = \overline{1, N}, \\ u|_{z=z_0} &= A_0; & u|_{z=z_N} &= A_N; \\ [u] &= 0; [du/dz] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где η_i^2 - комплексная величина, зависящая от параметров разреза и относящаяся к i -тому пласту мощности h_i . Введем на интервале $[z_0, z_N]$ сетку $\bar{\omega}_1$:

$$\bar{\omega}_1 = \left\{ d_1 \left| d_2 = \zeta_j - \zeta_{j-1}, j = \overline{0, N_z}, \zeta_0 = z_0, \zeta_{N_z} = z_N, N_z \geq N \right. \right\},$$

таким образом, чтобы узлы дискретизации совпадали с границами раздела слоев $z_i, i = \overline{0, N} : \forall i \exists z_i : z_i = \zeta_j$. В пределах каждого частичного интервала (элемента) поле будем аппроксимировать функцией

$$v_j(z) = A_j q_{1j}(\bar{z}) + A_{j+1} q_{2j}(\bar{z}), \quad (2)$$

где \bar{z} - локальная координата элемента, соответствующая расстоянию от его верхней границы

$$\begin{aligned} q_{1j}(\bar{z}) &= sh \left[\eta_j (d_j - \bar{z}) \right] / sh \eta_j d_j, \\ q_{2j} &= sh \eta_j \bar{z} / sh \eta_j d_j, \\ \bar{z} &\in [0, h_j], h_j = const, j = \overline{0, N_z - 1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что $q_{1j}(\bar{z}), q_{2j}(\bar{z})$ удовлетворяют уравнению (1) и, кроме того, для них выполняются равенства

$$\begin{aligned} q_{1j}(0) &= q_{2j}(d_j) = 1; \\ q_{1j}(d_j) &= q_{2j}(0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Задаче (1) соответствует экстремальная задача

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{z_0}^{z_N} \left[(u'_z)^2 + \eta^2 u^2 \right] dz \rightarrow ext; \\ u|_{z=z_0} &= A_1; u|_{z=z_N} &= A_{N+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Докажем утверждение. Если узлы дискретизации ζ_j сетки $\bar{\omega}_1$ совпадают с границами z_i интервалов, соответствующих постоянным значениям η ($\eta = \eta_i$), т.е.

$$\forall_i, i = \overline{0, N}; \exists_j, j = \overline{0, N_z}; (N \leq N_z),$$

такие, что $z_i = \zeta_j$ причем $\eta(z) = \eta_i$, $z \in (z_i, z_{i+1})$, то метод конечных элементов позволяет получить решение экстремальной задачи (5) на сетке $\bar{\omega}_1$, совпадающее с решением задачи (1.)

Доказательство.

Рассмотрим сначала решение дифференциальной задачи (I). Общее решение $u(z)$ уравнения системы (1) в i -том однородном по η интервале (пласте) дает функция $v_i(z)$:

$$\begin{aligned} i(z) = v(z) &= A_j q_{1j}(\bar{z}) + A_{j+1} q_{2j}(\bar{z}); \\ \bar{z} &\in [0, h_j]; z = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_{j1} + \bar{z}, \end{aligned}$$

в которой коэффициенты A_i совпадают со значениями искомой функции на границах z_i ($A_i = u(z_i)$), а равенства (4) обеспечивают её непрерывность. Выполнение требований непрерывности производной du/dz дает систему уравнений для вычисления неизвестных значений A_j . На произвольной j -той границе будем иметь:

$$A_j q'_{1j-1}(h_{j-1}) + A_j q'_{2j-1}(h_{j-1}) = A_j q'_{1j}(0) + A_{j+1} q'_{2j}(0) \quad (6)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} b_j &= q'_{1j}(h_j) = \eta_j / \operatorname{sh} \eta_j h_j; \\ c_j &= q'_{2j}(h_j) = \eta_j \operatorname{cth} \eta_j h_j, \end{aligned}$$

из (6) получим

$$b_j A_j + (C_{j+1} + C_j) A_j + b_j A_{j+1} = 0; J = \overline{1, N-1}. \quad (7)$$

При решении задачи (6) по методу конечных элементов будем использовать базисные функции (3) и (без потери общности) считать, что узлы сетки ζ_j соответствуют границам z_i раздела пластов ($\eta_j = z_i$, $i = 0, N_z$, $N = N_z$). С учетом (2) функционал (5) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{z_0}^{z_N} [(u'_z)^2 + \eta^2 u^2] dz = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} [(u'_{jz})^2 + \eta_j^2 u_j^2] dz = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} [A_j q'_{1j} + A_{j+1} q'_{2j}]^2 + h_j^2 [A_j q_{1j} + A_{j+1} q_{2j}]^2 dz = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} A_j^2 (Q_{1j} + \eta_j^2 Q_{1j}) + 2A_j A_{j+1} (Q_{12j} + \eta_j^2 Q_{12j}) + A_{j+1}^2 (Q_{2j} + \eta_j^2 Q_{2j}), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{2j} &= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} [q_{2j}'(z)]^2 dz, & Q_{2j} &= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} q_{2j}^2(z), \\
Q_{12j} &= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} q_{1j}(z)q_{2j}(z)d(z) & Q_{12j}' &= \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} q_{1j}'(z)q_{2j}'(z)d(z).
\end{aligned} \tag{9}$$

Вычисляя интегралы, получим

$$\begin{aligned}
Q_j &\triangleq Q_{1j} = Q_{2j} = (sh2\eta_j h_j / (2\eta_j - h_j)) / (2sh^2\eta_j h_j), \\
Q_j' &= Q_{1j}' = Q_{2j}' = \eta_j^2 (\eta_j + sh2\eta_j h_j / 2\eta_j) / (2sh^2\eta_j h_j), \\
Q_{12j} &= (h_j ch\eta_j h_j - sh\eta_j h_j / h_j) / (2sh^2\eta_j h_j), \\
Q_{12j}' &= \eta_j^2 (h_j ch\eta_j h_j + sh\eta_j h_j / h_j) / (2sh^2\eta_j h_j).
\end{aligned} \tag{10}$$

На основании последних соотношений нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
Q_j' + \eta_j^2 Q_j &= \eta_j ch\eta_j h_j = C_j, \\
Q_{12j}' + \eta_j^2 Q_{12j} &= -h_j / sh\eta_j h_j = b_j.
\end{aligned} \tag{11}$$

Окончательно, для внутренних узлов сетки по методу конечных элементов получаем систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial A_j} = A_{j-1} b_{j-1} + A_j (C_{j-1} + C_j) + A_{j+1} b_{j+1} = 0, \quad j = \overline{2, N-1}, \tag{12}$$

тождественную системе (8). Следовательно, при одинаковых краевых условиях численное решение экстремальной задачи (5) по методу конечных элементов совпадает с аналитическим решением задачи (1).

Утверждение доказано. Таким образом, если шаги сетки равны мощностям горизонтально-однородных пластов и узлы совпадают с границами их раздела, то численное решение экстремальной задачи (5) на этой сетке посредством базисных функций (3) совпадает с аналитическим решением задачи (1).

Сопоставим уравнения (11) с аналогичной системой, полученной по методу конечных разностей. Для простоты будем считать $\eta = const$ и шаги сетки также постоянными и равными d . Тогда конечно-разностная аппроксимация дифференциального уравнения (1) может быть представлена в следующем виде:

$$u_{j-1} - (2 + \eta^2 d^2)u_j + u_{j+1} = 0.$$

С учётом $\eta = const$ уравнение (8) упрощается

$$u_{j-1} - 2u_j ch(\eta d) + u_{j+1} = 0.$$

Если $|\eta d| \ll 1$, то $ch(\eta d) \approx 1 + (\eta d)^2 / 2$ и системы становятся эквивалентными, т.е. в одномерном случае разностные схемы являются асимптотиками (при $\eta d \rightarrow 0$) по отношению к конечно-элементным, получаемым на основе базисных функций (3).

Рассмотрим вычислительные схемы по методу конечных элементов для двумерных задач, построенные на основе функций (3) при аппроксимации изменения поля в направлении оси z в проводящей среде. Целесообразность использования экспоненциального изменения поля с глубиной в пределах элемента очевидна, так как

на относительно больших расстояниях от локальной неоднородности аномальное поле может быть приближенно описано полем кабеля (Е-поляризация) или диполя, которое, как известно [1], в дальней зоне проникает в землю подобно неоднородной плоской волне.

Алгоритмы численного решения двумерных задач по методу конечных элементов известны [8]. Мы остановимся на двух аспектах этой проблемы:

1. Получим расчетные формулы общего вида, учитывающие присутствие в математической модели локальных S-пленок (при решении задачи Е-поляризации).
2. Построим вычислительную схему, учитывающую асимптотическое поведение поля на относительно больших расстояниях от неоднородности.

Будем считать, что модель геоэлектрического разреза представляет собой горизонтально-однородную слоистую среду, содержащую локальную двумерную неоднородность. Допускается присутствие в ней проводящих неоднородных S-пленок. Удельная электропроводность σ , магнитная проницаемость μ и диэлектрическая проницаемость ϵ являются кусочно-гладкими функциями координат y и z . Плоскость XOY прямоугольной декартовой системы координат соответствует границе раздела земля-воздух. Ось z направлена вниз. Свойства среды остаются без изменения в направлении оси x . В общем случае предполагается, что при $y \rightarrow \infty$ модель геоэлектрического разреза представлена различными горизонтально-однородными слоистыми разрезами, а в её основании лежит однородный по проводимости пласт неограниченной мощности.

Рассмотрим функционал [1,8]

$$F = \int_D \left[\left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{k^2}{\eta} u^2 - 2uf \right] ds + i\omega \sum_{j=1}^m \int_{\partial D_{sj}} S_j u^2 dl \quad (13)$$

стационарный на решении задачи:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{k^2}{\eta} u = -f, \quad \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0, [u] = 0, \quad (14)$$

а на i -той S-пленке выполняется краевое условие

$$\left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial n} \right] = S_i \cdot i\omega u \quad (u \equiv E_x).$$

Имея в виду обобщение алгоритмов решения двумерных задач на трехмерный случай, ограничимся анализом прямоугольных элементов, получающихся разбиением области D прямыми, параллельными координатным осям OY и OZ.

Вычисление будем вести на сетке $\bar{\omega} = \{(y_j, z_j | j = \overline{1, N_y}, k = \overline{1, N_z})\}$ В каждом (j, k) -том элементе будем использовать локальные координаты (\bar{y}, \bar{z}) с началом в его верхнем левом углу:

$$\bar{y} \in [0, h_j], \quad z \in [0, d_k], \quad j = \overline{1, N_y - 1}$$

h_j, d_k -шаги сетки соответственно по осям y и z . Искомое решение будем аппроксимировать набором базисных функций $\{p_{\alpha j}(\bar{y})\}, \{pq_{\alpha k}(\bar{z})\}, \alpha=1,2$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} p_{1j}(0) = q_{1k}(0) = p_{2j}(h_j) = q_{2k}(d_k) = 1; \\ p_{1j}(h_j) = q_{1k}(d_k) = p_{2j}(0) = q_{2k}(0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для упрощения выкладок рассмотрим один элемент с волновым числом k и размером $h \times d$ (рис. 1а). В нем поле $u(\bar{y}, \bar{z})$ будем приближать функцией (второй индекс у p и q временно опускаем)

$$v(\bar{y}, \bar{z}) = u_0 p_1(\bar{y}) q_1(\bar{z}) + u_1 p_2(\bar{y}) q_1(\bar{z}) + u_2 p_1(\bar{y}) q_2(\bar{z}) + u_5 p_1(\bar{y}) q_2(\bar{z}), \quad (16)$$

совпадающей в узлах сетки (вершинах прямоугольника) со значениями $u(\bar{y}, \bar{z})$.

Примером функций, удовлетворяющих этим условиям являются:

$$p_1(\bar{y}) = 1 - \bar{y}/h; \quad p_2(\bar{y}) = \bar{y}/h; \quad q_1(\bar{z}) = sh[kz(d - \bar{z})/shkd]; \quad q_2(\bar{z}) = sh/shk\bar{z}/shkd. \quad (17)$$

Если волновое число элемента постоянно, то функция $v(\bar{y}, \bar{z})$ в пределах ячейки удовлетворяет дифференциальному уравнению (14), ($f_x = 0$). Недостатком пробных функций q_α является то, что они не обеспечивают непрерывности поля на вертикальных границах элементов, имеющих разные волновые числа. Затруднение можно обойти, если использовать линейную интерполяцию на этих границах. Чаще функции $q_\alpha(\bar{z})$ берут того же вида, что $p_\alpha(\bar{y})$ [8]:

$$q_1(\bar{z}) = 1 - \bar{z}/d, \quad q_2(\bar{z}) = \bar{z}/d.$$

По аналогии с (9) обозначим

$$P_\alpha = \int_0^h p_\alpha^2(y) dy, \quad P'_\alpha = \int_0^h (p'_\alpha)^2 dy, \quad P_{12} = \int_0^h p_1(y) p_2(y) dy, \quad P'_{12} = \int_0^h p'_1(y) p'_2(y) dy. \quad (18)$$

Если $p_\alpha(\bar{y})$ и $p'_\alpha(\bar{y})$ задаются соотношениями (17), то

$$P_1 = P_2 = h/3; \quad P'_1 = P'_2 = 1/h; \quad P_{12} = h/6; \quad P'_{12} = -1/h. \quad (19)$$

На основании (17) легко показать, что при $|kh| \rightarrow 0$

$$Q_\alpha \rightarrow P_\alpha, \quad Q'_\alpha \rightarrow P'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

и экспоненциальная интерполяция асимптотически совпадает с линейной. В том случае, когда волновое число элемента равно нулю, значения P_α, P'_α и Q_α, Q'_α , в общем случае могут быть не определены. Тогда их следует заменить предельными значениями. В частности, если функция $q_i(\bar{z})$ ($i=1,2$) вычисляются по формулам (17), то при $k=0$ вместо Q_α, Q'_α в расчетах следует использовать значения P_α, P'_α .

Интеграл по одному элементу ΔF_h принято записывать в матричной форме [8]

$$\Delta F_h = U_c^T K_c U_c + f_c^T K_{fc} U_c, \quad (20)$$

где

$$U_c = (U_0, U_1, U_2, U_5)^T, \quad f_c = (f_0, f_1, f_2, f_5)^T, \quad (21)$$

$$K_c = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_5 \\ q_1 & q_0 & q_5 & q_2 \\ q_2 & q_5 & q_0 & q_1 \\ q_5 & q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}; \quad K_{fc} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_5 \\ a_1 & a_0 & a_5 & a_2 \\ a_2 & a_5 & a_0 & a_1 \\ a_5 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Элементами матриц K_c и K_{fc} являются числа:

$$\begin{aligned} q_0 &= (P_1 Q_1' + P_1' Q_1 + k^2 P_1 Q_1 + \mathcal{G}_{0S})/\eta, & a_0 &= P_1 Q_1/\eta, \\ q_1 &= (P_1 Q_1' + P_{12}' Q_1 + k^2 P_{12} Q_1 + \mathcal{G}_{1S})/\eta, & a_1 &= P_{12} Q_1/\eta, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= (P_1 Q_{12}' + P_1' Q_{12} + k^2 P_1 Q_{12} + \mathcal{G}_{2S})/\eta, & a_2 &= P_1 Q_{12}/\eta, \\ q_5 &= (P_{12} Q_{12}' + P_{12}' Q_{12} + k^2 P_{12} Q_{12} + \mathcal{G}_{5S})/\eta, & a_5 &= P_1 Q_1/\eta. \end{aligned} \quad (24)$$

Слагаемые $\mathcal{G}_{\alpha S}$ ($\alpha = 0,1,2,5$) отличны от нуля, если узел "0" принадлежит S-пленке (случай E-поляризации). Пусть направление пленки совпадает с осью OY, осью OZ или диагональю элемента (рис. 1б). Обозначим среднюю проводимость пленки в пределах ячейки в первом случае S_y , во втором - S_y , в третьем - S_{yz} . Тогда, используя технику метода конечных элементов, нетрудно найти выражения для $g_{\alpha S}$

$$\begin{aligned} g_{0S} &= -i\omega\eta \left(S_y P_1 + S_z P_1^{(z)} + \gamma_0 S_{yz} \sqrt{1 + (d/h)^2} \right), \\ g_{1S} &= -i\omega\eta \left(S_y P_{12} + \gamma_1 S_{yz} \sqrt{1 + (d/h)^2} \right), \\ g_{2S} &= -i\omega\eta \left(S_z P_{12}^{(z)} + \gamma_2 S_{yz} \sqrt{1 + (d/h)^2} \right), \\ g_{5S} &= -i\omega\eta \gamma_5 S_{yz} \sqrt{1 + (d/h)^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \int_0^h p_1^2(\bar{y}) q_1^2(d\bar{y}/h) d\bar{y}, \\ \gamma_1 &= \int_0^h p_1(\bar{y}) p_2(\bar{y}) q_1^2(d\bar{y}/h) d\bar{y}, \\ \gamma_2 &= \int_0^h p_1(\bar{y}) q_1(dy/h) q_2(dy/h) dy, \\ \gamma_5 &= \int_0^h p_1(y) p_2(y) q_1(dy/h) q_2(dy/h) dy. \end{aligned} \quad (26)$$

причем $P_1^{(z)}, P_{12}^{(z)}$ - вычисляются по формулам (18) с заменой h на d .

Интегралы по всем элементам собираются в квадратичную форму F_h относительно узлов сетки

$$F_h = U^T K U + f^T K_f U, \quad (27)$$

где вектор u имеет размерность, равную количеству узлов сетки, K, K_f - глобальные матрицы, получаемые из матриц K_c, K_{fc} (количество последних равно числу конечных элементов).

Квадратичная форма (27) комплекснозначна. Численное отыскание её стационарного значения рассмотрено в работах [1,8] и др. Для того, чтобы получить систему алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функции u в узлах сетки u_{jk} нужно найти частные производные функционала F_h по u_{jk} и приравнять их нулю:

$$\frac{\partial F_h}{\partial u_{jk}} = 0, \quad j = \overline{2, N_y - 1}, \quad k = \overline{2, N_z - 1}. \quad (28)$$

Получим общий вид уравнения системы (28). С этой целью преобразуем выражение для ΔF_h , выделив в нем слагаемые, содержащие значения поля в нулевом узле u_0 :

$$\begin{aligned} \Delta F_h = & u_0^2 g_0 + 2u_0 (u_1 g_1 + u_2 g_2 + u_5 g_5) + \dots + \\ & + 2u_0 (f_0 g_0 + f_1 g_1 + f_2 a_2 + f_5 a_5) + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Каждому внутреннему узлу сетки соответствуют четыре элемента, в которых он будет использоваться для аппроксимации поля при вычислении интеграла (13). Для упрощения индексации на рис. 2 изображен фрагмент сетки, в котором внутренний узел имеет номер 0. Суммируя вклады (29) от элементов, общей вершиной которых он является, и приравнивая частную производную от этой суммы к нулю, получим общий вид уравнения системы (28):

$$\frac{\partial F_h}{\partial u_0} = \sum_{i=0}^8 (C_i u_i + D_i f_i) = 0, \quad (30)$$

в котором

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{j=0}^4 g_{0,j}; & C_l &= g_{5,l}, \quad l = \overline{5,8}; \\ C_1 &= g_{1,1} + g_{1,4}; & C_3 &= g_{1,2} + g_{1,3}; \\ C_2 &= g_{2,1} + g_{2,2}; & C_4 &= g_{2,3} + g_{2,4}. \end{aligned} \quad (31)$$

Формулы для коэффициентов D_α получается из соотношений (31) заменой $g_{\alpha,j}$ на $g_{\alpha,j}$ ($\alpha = \overline{0,8}, j = \overline{0,4}$). Здесь второй индекс при g и a указывает на номер элемента, которому они соответствуют на рис. 2.

На относительно больших расстояниях $|y|$ от локальной двумерной неоднородности решение двумерной задачи при фиксированном значении $z=z_0$ удовлетворительно аппроксимирует асимптотическое соотношение

$$U(y, z_0) \cong \frac{C_1}{y} + \frac{C_2}{y^2} + U^n(z_0), \quad (32)$$

где C_1, C_2 - некоторые коэффициенты, не зависящие от y , $u^n(z_0)$ - нормальное поле. В этой области вместо $p_i(\bar{y})$ возьмем функции:

$$\tilde{p}_i(y) = \alpha_i/y + \beta_i/y^2. \quad (33)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_i &= y_i^2/(y_2 - y_1) \cdot (-1)^i, & i &= 1, 2, \\ \beta_i &= y_1^2 y_2 / (y_2 - y_1); \beta_2 = -y_1 y_2^2 / (y_2 - y_1). \end{aligned} \quad (34)$$

y - расстояние от центра локальной двумерной неоднородности; y_i - узлы сетки.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что соотношения (15) выполняются. Вычисляя интегралы (18) найдем

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= y_1(y_2 - y_1)/3y_2; \quad \tilde{P}_{12} = (y_2 - y_1)/6; \\ \tilde{P}'_1 &= \alpha_1^2(y_1^{-3} - y_2^{-3})/3 + \alpha_1\beta_1(y_1^{-4} - y_2^{-4}) + 4\beta_1^2(y_1^{-5} - y_2^{-5})/5, \\ \tilde{P}'_{12} &= \alpha_1\alpha_2(y_1^{-3} - y_2^{-3})/3 + 0,5(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(y_1^{-4} - y_2^{-4}) + 4\beta_1\beta_2(y_1^{-5} - y_2^{-5})/5. \end{aligned} \quad (35)$$

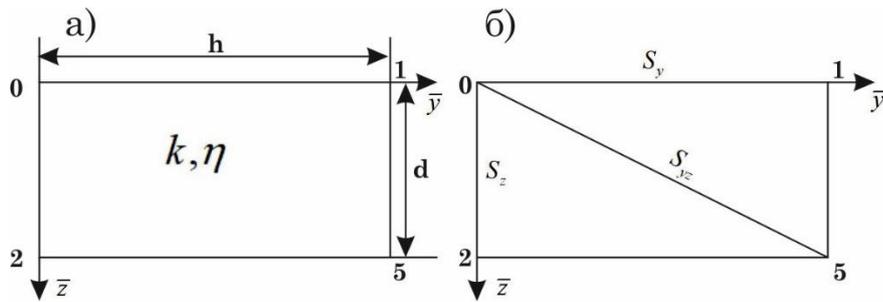


Рис.1. Конечный элемент

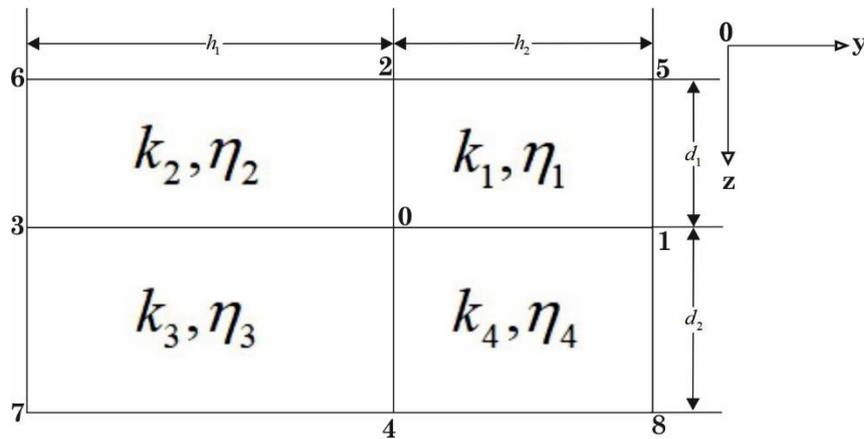


Рис.2. Фрагмент сетки

Покажем эквивалентность соотношений (35) формулам (19) в области $y \gg h = y_2 - y_1$. Положим $y_1 = y - h/2$, $y_2 = y + h/2$, тогда

$$y_1^{-l} - y_2^{-l} \approx \frac{lh}{y^{l+1}}; \quad \alpha_1 \approx y^2/h; \quad \beta_1 \approx y^3/h; \quad \beta \approx -y^3/h. \quad (36)$$

на основании приближенных равенств (36) и (35), получим

$$\tilde{P}_1 \approx P_1; \quad \tilde{P}'_1 \approx P'_1; \quad \tilde{P}_{12} \approx P_{12}; \quad \tilde{P}'_{12} \approx P'_{12}$$

По методу конечных элементов построена вычислительная схема, соответствующая конечно-разностной схеме типа "ящик" [5]. Она трудоемка при решении системы уравнений прямыми методами. За счет более точного задания

коэффициентов есть основания надеяться на достаточно высокую скорость сходимости итерационного процесса к решению и большую точность результата.

Реализация краевых условий в двумерных задачах.

Будем предполагать, что на границах двумерной области D , содержащей локальную двумерную неоднородность, заданы краевые условия первого рода, которые корректируются в процессе вычислений на основе алгоритма альтернирующего метода Шварца. Для этого используются приведенные выше решения внешних краевых задач. Согласование решений внутренней и внешней краевых задач детально рассмотрено в работах [1,4].

Если нормальные разрезы слева и справа от неоднородности совпадают (симметричная модель), то верхнюю и нижнюю границы сетки всегда можно расположить на расстоянии одного шага дискретизации по оси z от аномалиеобразующего объекта. В том случае, когда левый и правый нормальные разрезы различны (модель несимметрична по вмещающей среде), предпочтительнее использовать аналитические решения двумерных задач для полуплоскости.

Построение краевых условий на боковых границах сетки выполняется двумя способами:

1. Учет асимптотического поведение поля при $y \rightarrow \infty$.
2. Использование решения задачи для полуполосы.

Учет асимптотики второго порядка.

Пусть $z = z_k$ слой сетки, а y_1, y_2 - ординаты двух внутренних узлов дискретизации двумерной области и y_Γ - ордината границы сетки на слое $z = z_k$, причем

$$|y_1| < |y_2| < |y_\Gamma|$$

Тогда величину $u(y_\Gamma, z_k) = u_\Gamma$ на границе можно приближенно рассчитать путем экстраполяции по формуле [1]

$$U_n = C_1/|y_\Gamma| + C_2/|y_\Gamma|^2 + u^n(z_k), \quad k = \overline{1, N}, \quad (37)$$

где

$$C_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2; C_2 = \beta_2 u_2 + \beta_1 u_1; u_1 = u(y_1, z_k); u_2 = u(y_2, z_k),$$

$u^n(z_k)$ - нормальное поле.

В случае равномерной сетки расчет u_Γ сильно упрощается. Пусть y_1 соответствует j -тому узлу сетки, а узел j_0 центру двумерной неоднородности. Обозначим

$$y_1 = |j - j_0|h = lh, y_2 = (l + 1)h.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_1 &= -l^2 h u_1 + (l + 1)^2 h u_2, \\ C_2 &= l^2 (l + 1)^2 h^2 u_1 - l (l + 1) h^2 u_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Допустим $|y_\Gamma| = (l + m)h$, m - целое число ($m > 1$). Согласно (38), найдем

$u_\Gamma = u_1(1 - m)(l/(l + m))^2 + u_2 m[(l + 1)/(l + m)]^2 + u^n$. Аналогичное выражение для асимптотики третьего порядка впервые получено Е.С. Киселевым.

Решение задачи для полуполосы.

Для адаптации краевых условий на боковой границе необходимо решить задачу (рис.3):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{dy^2} + \frac{\partial^2 v}{dz^2} = k^2 v, & y > 0, & z \in (z_1, z_2'), \\ v|_{y=0} = \tilde{v}_0(z), & \frac{\partial v}{\partial y}|_{y=0} = \tilde{v}(z) \cdot \gamma(-0)/\gamma(+0), \\ [v] = \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial z} \right] = 0, & v|_{z=z_1} = v_1(y), \\ v|_{z=z_2'} = \tilde{v}_2(y), \end{cases} \quad (39)$$

где $\gamma(-0)$ и $\gamma(+0)$ - значения параметра γ слева и справа от нуля (по оси y) $\tilde{v}_0, \tilde{v}_y, \tilde{v}_1$ и \tilde{v}_2 - заданные функции, получаемые в процессе решения внутренней краевой задачи на некотором этапе расчетов на ЭВМ.

Применяя одностороннее преобразование Лапласа L по переменной y к задаче (39), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= (k^2 - p)u + p\tilde{\vartheta}_0(z) + \tilde{\vartheta}_y(z)\gamma(-0)\gamma(+0); & [u] &= \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0; & u|_{z=z_1} &= V_m(p); \\ u|_{z=z_1'} &= V_n(p); & u(p, z) &= \mathcal{L}[\vartheta(y, z)]. \end{aligned} \quad (40)$$

Преобразование Лапласа для функций из $L_1(0, \infty)$ эквивалентно преобразованию Фурье функции $v(y, z)$, равной нулю при $y < 0$. При этом $p = i\alpha$.

После решения одномерной задачи (40) найдем

$$\vartheta(y, z) = F^{-1}[u(\alpha, z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha, z) e^{i\alpha y} d\alpha.$$

Преобразования Фурье выполняются по алгоритмам БПФ.'

Решение задачи для полуполосы позволяет располагать боковую границу области D на расстоянии одного шага сетки по оси y .

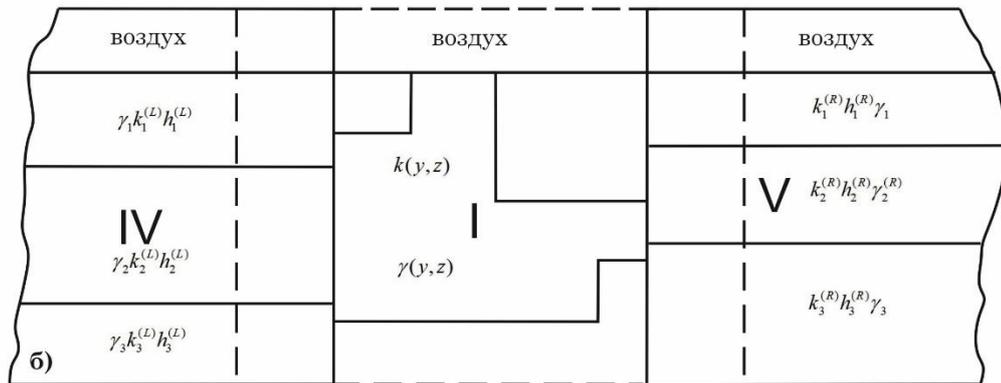
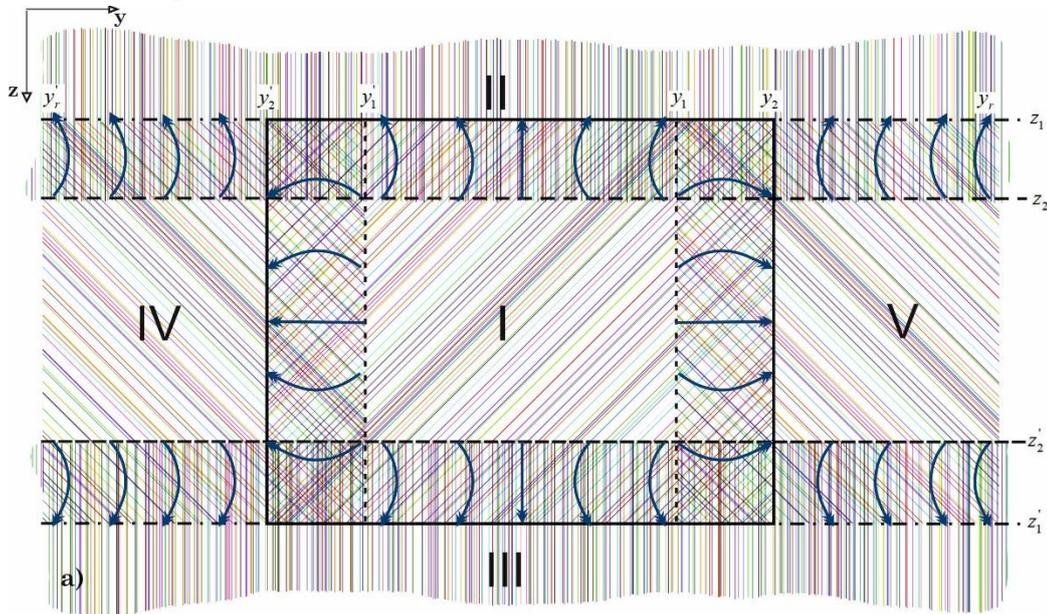
Приведем описание общей схемы, по которой происходит построение краевых условий внутренней краевой задачи.

Пусть численное решение выполняется в области (рис. 3)

$$D = \{(y, z) | y_2' < y < y_2, z < z_1'\}.$$

Прямые $y = y'$ и $y = y_1$; $z = z_2$ и $z = z'$ совпадают с внутренними слоями сетки в D . На них должны быть заданы граничные значения, необходимые для решения внешних краевых задач. Выберем y_r и y_r' такими, чтобы аномальное поле при $y > y_r$ по модулю было существенно меньше нормального. На основании априорной информации построим начальное приближение для поля на прямой $z = z_2$ ($z = z_2'$). Далее вычисления выполняются по следующему алгоритму:

1. Пересчитать поле с уровня z_2 (z_2') на прямую $z=z_1$ (z_1'), решая задачу для верхней (нижней) полуплоскости.
2. Решить задачу в правой (левой) полуплоскости области $y > y_1$, ($|y| > |y_1'|$).
3. Рассчитать поле на границах $y = y_2$ ($y = y_2'$) сетки и на полупрямых $y > y_1$ ($|y| = y_1'$) при $z = z_2$ ($z = z_2'$).
4. С полученными краевыми условиями решить задачу в области D.
5. Если не выполнен критерий окончания расчетов, то перейти к 1, иначе закончить итерации.



а) Общий вид двумерных областей

-  Верхняя (II) и нижняя (III) полуплоскости
-  Двумерная область (I)
-  Левая (IV) и правая (V) полуплоскости

б) Правая (R) и левая (L) полуплоскости и общий вид двумерной неоднородности.

Рис. 3. Математическая модель двумерной среды.

Сходимость итерационного процесса к решению гарантируется [4]. В результате получаем решение двумерной задачи в произвольной точке плоскости.

На основании приведенных алгоритмов разработан комплекс программ для ЭВМ БЭСМ-6 на языке ФОРТРАН. В нем реализованы и доступны пользователю все рассмотренные в работе типы: аппроксимации поля в конечном элементе. Математическое обеспечение построено таким образом, что для введения в него нового алгоритма интерполяции электромагнитного поля в пределах элемента достаточно заменить одну или две простые подпрограммы нижнего уровня. Все другие подпрограммы инвариантны по отношению к типу интерполяционных процедур.

Расчеты для тестовых моделей свидетельствуют об их работоспособности и эффективности. Применение экспоненциальной интерполяции поля позволило вести вычисления при весьма грубых шагах сетки по оси z . Так, например, расчет электрического поля над горстом [3] был выполнен на сетке 4×16 с приемлемой точности.

На рис. 4 и 5 приведены результаты сравнения решений прямой задачи МТЗ по методу конечных элементов и вариационно-разностным методом [1]. В методе конечных элементов использована экспоненциальная аппроксимация по вертикальной оси (z) линейная по горизонтальной (y). Расчеты по МКЭ и ВРМ (Е и Н поляризации) проводились на одной и той же сетке с равномерными шагами по оси y , постоянными в различных вариантах расчетов и равными 0.5 км. По оси z шаги были равномерными в пределах пласта и проводящего основания и переменными в воздухе. Модель для обеих поляризаций представляла собой горизонтально-неоднородный пласт, лежащий на идеально проводящем основании (рис. 4). На этот слой и основание по оси z отводилось по одному шагу ($N_z=2$) или по два шага ($N_z=4$).

Для уменьшения влияния на точность решения числа итераций, в каждом варианте задача решалась до получения устойчивой картины поля на поверхности земли.

В случае Е-поляризации (рис.4) в исследованных нами случаях точность решения по МКЭ практически не зависела от отношения шага сетки к длине волны λ в соответствующих однородных по сопротивлению фрагментах слоя. В худшей ситуации, когда на неоднородный пласт модели был отведен всего один шаг ($h_z = 2000$ м), решение по МКЭ с погрешностью порядка 1% совпало с точным. Для ВРМ, напротив, она сильно зависит от величины h_z / λ , изменяясь от нескольких процентов над плохо проводящей частью пласта ($h_z / \lambda \approx 0.1$) до нескольких сотен процентов в хорошо проводящей его части ($h_z / \lambda \approx 1.0$) (см. рис. 4).

В случае Н-поляризации МКЭ также дает на грубой сетке существенно более точное решение по сравнению с ВРМ, однако, в отличие от Е-поляризации, точность МКЭ в большей степени зависит от параметра h_z / λ (рис.5).

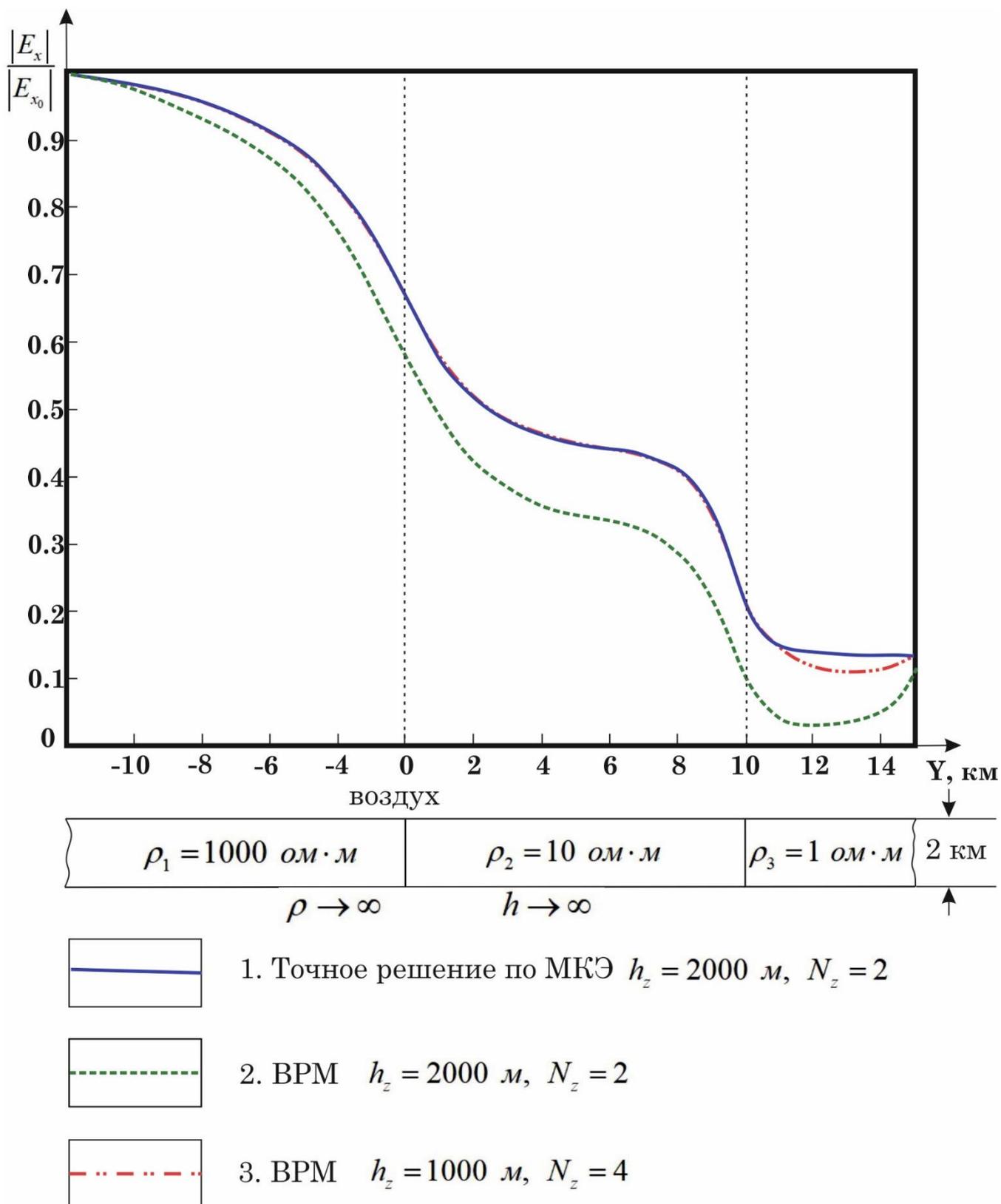


Рис. 4 Сравнение результатов расчетов электрического поля по ВРМ и МКЭ при различных шагах сетки по оси z на периоде $T=0.5$ сек (Е-поляризация)

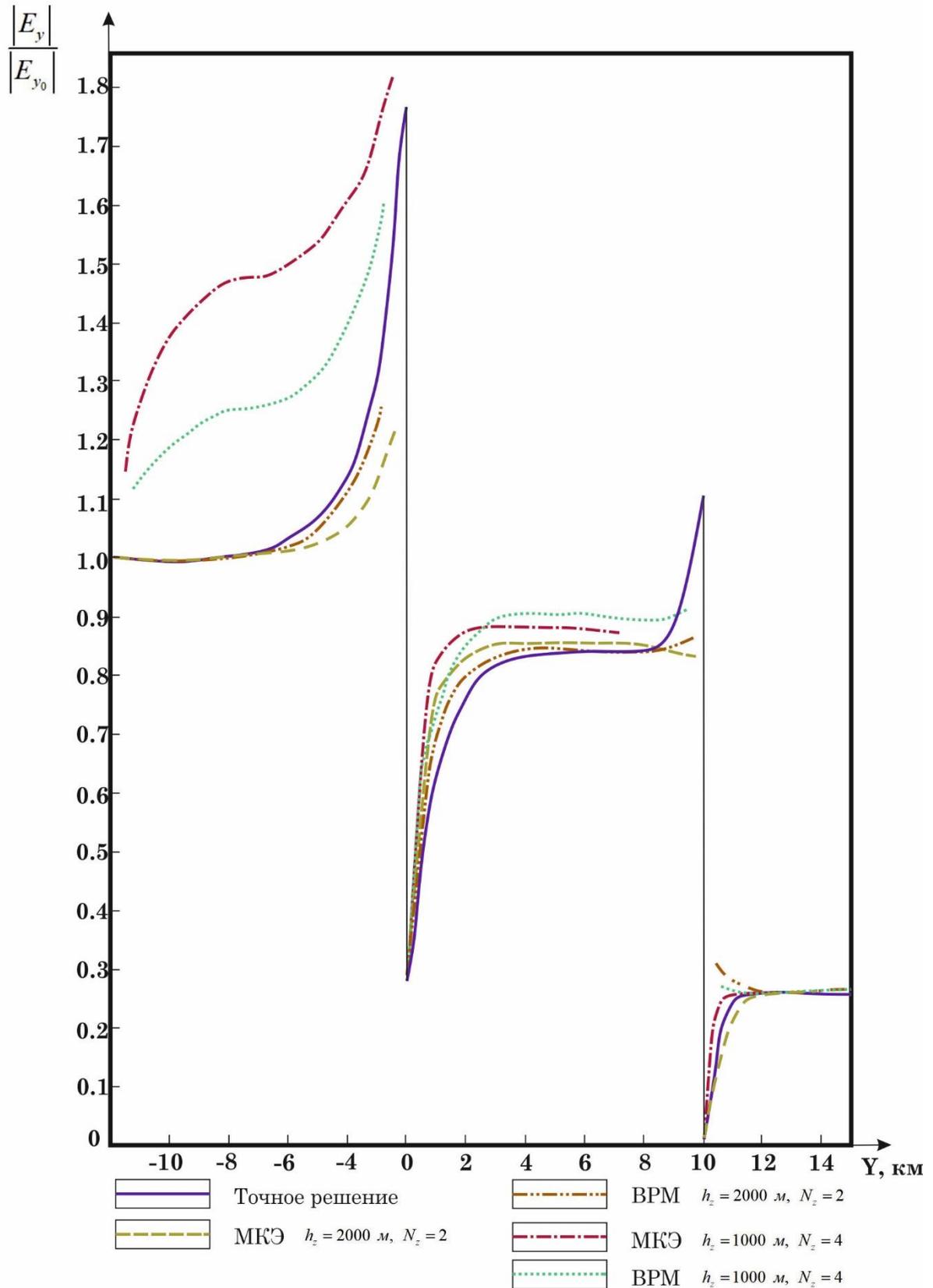


Рис.5. Сравнение результатов расчетов электрического поля E_y по ВРМ и МКЭ при различных шагах сетки по оси z на периоде $T = 2$ сек (Н-поляризация).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вальян Л.Л., Дебабов А.С., Юдин М.Н. Интерпретация данных магнитотеллурических зондирований неоднородных сред. М. Недра, 1984.
2. Вальян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. М. Недра, 1965.
3. Дмитриев В.И. Кокотушкин Г.А. Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах. МГУ, 1971.
4. Завадский Ю.В. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.Наука, 1972.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977. 6. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Мир, 1977.
6. Coggon J. H. Electromagnetic and electrical modelling by the finite element method. Geophysics, vol. 36, 1, 1971.
7. Rodi W.L. Technique for improving the accuracy of finite element solution for magnetotelluric data. Geophys. J.R. astr. Soc., 44, 1976.