

Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Редколлегия журнала "Известия высших учебных
заведений", раздел "Геология и разведка"

№ 3437-78 Деп

УДК 550.837:518

М.Н.Юдин

К РАСЧЕТУ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО КАБЕЛЯ В ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ

При решении нестационарных задач методом сеток необходимо задавать краевые и начальные условия. Обычно граничные условия находятся согласно предположению о том, что вторичное (аномальное) поле, вызванное локальной неоднородностью, в некоторой метрике мало по сравнению с так называемым "нормальным" полем – полем в отсутствие возмущающего тела. Для задания краевых условий нормальное поле нужно рассчитывать как в земле, так и в некоторых случаях в воздухе.

Начальные условия целесообразно задавать в такой момент времени t_0 , когда поле либо не зависит от геоэлектрических свойств земли, либо может быть аппроксимировано нормальным полем.

Рассмотрим с этих позиций гармонически изменяющееся и нестационарное поле БДК. В случае гармонически изменяющегося тока в кабеле примем зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$. Нестационарное поле кабеля создается ступенеобразным изменением тока в момент времени $t = 0$:

$$J_0(t) = J \cdot l(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ J, & t \geq 0, \end{cases}$$

где $l(t)$ - единичная функция Хевисайда.

Пусть на высоте h_0 от поверхности земли находится бесконечно-длинный кабель (БДК), проекция которого на плоскость $z = 0$ (поверхность земли) совпадает с осью x . Нижнее проводящее полупространство $z \geq 0$ соответствует земле, а верхнее полупространство $z < 0$ – воздуху.

© ВИНИТИ, 1978 г.

Москва, 1978

Рассмотрим нестационарное поле БДК в случае однородной земли для любых z .

1. Верхнее полупространство.

Для $\tilde{A}_x(-i\omega)$ в воздухе, согласно [2], имеем:

$$\tilde{A}_{xj}(r, z) = \frac{I\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-n_0(h_0+z)}}{n_0} + \frac{1 - \frac{n_1}{n_0 R^*}}{n_0 + \frac{n_1}{R^*}} e^{-n_0(h_0-z)} \right] \cos my \, dm \quad (3)$$

где: $R^* = R^*(m, -i\omega, h_j, \rho_j)$, $n_j = \sqrt{m^2 + k_j^2}$,

$k_j^2 = -i\omega\mu\sigma_j$ - волновое число,

ω - круговая частота,

$\mu = 4\pi 10^{-7}$ - магнитная проницаемость,

σ_j - удельная электропроводность,

h_j - мощность пластов горизонтально-слоистого n -слойного разреза, $j = 0, 1, \dots, n$.

Мощность h_n неограничена, n_0 соответствует воздуху. Для того, чтобы получить выражение для компонент поля в замкнутом виде, рассмотрим простейший случай, когда нижнее полупространство однородно и имеет волновое, число k_1 , а воздух является изолятором ($k_0 = 0$). Тогда $n_0 = m$ и $R^* = 1$ и выражение (3) легко преобразуется к виду:

$$\tilde{A}_{xj}(r, z) = \frac{I\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty e^{-mh_0} \left[e^{-mz} - e^{mz} - \frac{2m^2 - 2mn_1}{k_1^2} e^{mz} \right] \frac{\cos(my)}{m} \, dm \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$I_1 = \int_0^\infty (e^{-mz} - e^{mz}) e^{-mh_0} \frac{\cos(my)}{m} \, dm \quad (5)$$

$$I_2 = \int_0^\infty m e^{-m(h_0-z)} \cos(my) \, dm \quad (6)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{n_1}{k_1^2} e^{-m(h_0-z)} \cos(my) \, dm \quad (7)$$

тогда

$$\tilde{A}_x(r, z) = \frac{I\mu_0}{2\pi} \left(I_1 - \frac{2}{k_1^2} I_2 + 2I_3 \right) \quad (8)$$

Интегралы I_2 и I_3 являются табличными [2]:

$$I_2 = \frac{(h_0 - z)^2 - y^2}{(h_0 - z)^2 + y^2}.$$

Обозначим:

$$\alpha := \sqrt{\mu\sigma_1} [(h_0 - z) + iy]. \quad (9)$$

С учетом (9)

$$I_3 = \frac{S_{1,1}(\alpha\sqrt{-i\omega})}{2\alpha\sqrt{-i\omega}} + \frac{S_{1,1}(\bar{\alpha}\sqrt{-i\omega})}{2\bar{\alpha}\sqrt{-i\omega}}. \quad (10)$$

где $S_{1,1}(\cdot)$ - функция Ломмеля.

Интеграл I_1 можно рассматривать как преобразование Лапласа функции

$$\frac{\sin(izm) \cos(my)}{m}.$$

По таблицам [3] находим

$$I_1 = -\text{arth} \frac{2zh_0}{h_0^2 + y^2 + z^2}. \quad (11)$$

Найдем асимптотику для I_1, I_2, I_3 при $h_0 \rightarrow \infty$ и $y = 0$:

$$I_1 = -2 \frac{z}{h_0} + O(h_0^{-2}), \quad I_2 = O(h_0^{-2}), \quad I_3 = \frac{1}{k_1 h_0} + O(h_0^{-2}).$$

Подставляя (12)- (14) в (8) в учитывая (1),(2),получим

$$E_x = \frac{J\mu i\omega}{\pi k_1 h_0} (1 + k_1 z) + O(h_0^{-2}), \quad (15)$$

$$B_y = -\frac{J\mu}{\pi h_0} + O(h_0^{-2}). \quad (16)$$

Формулы (15) и (16) с точностью до постоянного множителя $J\mu/\pi h_0$ и слагаемого $O(h_0^{-2})$ совпадают с соответствующими соотношениями, получаемыми исходя из предположения о плоской волне, падающей на поверхность земли.

В дальнейшем для нахождения нестационарного поля будем пользоваться таблицами обратного преобразования Лапласа-Карсона, поэтому введем обозначение:

$$f(t) = C^{-1}[\tilde{f}(p)], \quad p = -i\omega,$$

где C^{-1} оператор обратного преобразования Лапласа-Карсона.

По таблицам [3]

$$\varphi(\alpha, t) = C^{-1}[\sqrt{p} S_{1,1}(\alpha\sqrt{p})] = \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad (17)$$

Тогда

$$A_x(t) = C^{-1}[\tilde{A}_x] = \frac{I\mu_0}{2\pi} \left\{ I_1 - 2I_2 \frac{t}{\mu\sigma_1} + \int_0^t \left[\frac{1}{\alpha^2} \varphi(\alpha, t) + \frac{1}{\bar{\alpha}^2} \varphi(\bar{\alpha}, t) + \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{\sqrt{\pi t}|\alpha^2|} \right] dt \right\} \quad (18)$$

Найдем асимптотику при $h_0 \rightarrow \infty$ и $y = 0$ для компоненты $E_x(t)$:

$$E_x(t) = \frac{I\mu}{\pi h_0 \sqrt{\mu\sigma_1 \pi t}} (1 - z\sqrt{\mu\sigma_1 \pi t}) + O(h_0^{-2}) \quad (19)$$

Выражение (19) с точностью до множителя $J\mu/\pi h_0$ и слагаемого $O(h_0^{-2})$ совпадает с нестационарным полем МТЗ, рассмотренным в работе [1]. Соотношение (19) немедленно следует также из (15), т.к. $C^{-1}[\sqrt{p}] = 1/\sqrt{\pi t}$.

2. Нижнее полупространство

По таблицам [3] находим

$$C^{-1} \left[p \frac{\exp\left(-z\sqrt{z^2\mu\sigma_1(p+m^2/\mu\sigma)}\right)}{\frac{m}{\sqrt{\mu\sigma_1}} + \sqrt{p + \frac{m^2}{\mu\sigma_1}}} \right] = \quad (20)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{m^2 t}{\mu\sigma_1} - \frac{z^2 \mu\sigma_1}{4t}\right) - \frac{m}{\sqrt{\mu\sigma_1}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z\sqrt{\mu\sigma_1}}{2\sqrt{t}} + \frac{m}{\sqrt{\mu\sigma_1}}\right).$$

$$\text{Обозначим } \beta = \sqrt{\mu\sigma_1}(h_0 - iy). \quad (21)$$

Воспользуемся табличными интегралами [4]

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-m^2 t / \mu\sigma_1 - m h_0} \cos(my) dm, \quad (22)$$

$$J_2 = \int_0^\infty m e^{-m(h_0 - z)} \operatorname{erfc}\left(\frac{z\sqrt{\mu\sigma_1}}{2\sqrt{t}} + \frac{m\sqrt{t}}{\sqrt{\mu\sigma_1}}\right) \cos(my) dm \quad (23)$$

Введем также обозначение

$$\psi(\alpha, t) = \exp\left(\frac{\beta^2}{4t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{t}}\right) + \exp\left(\frac{\bar{\beta}^2}{4t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\bar{\beta}}{2\sqrt{t}}\right), \quad (24)$$

тогда

$$J_1 = \sqrt{\pi\mu\sigma_1} \psi(\beta, t) / (4\sqrt{t}). \quad (25)$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$a^2 := t / \mu\sigma_1 \quad (26)$$

тогда [3]

$$J_2 = -\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial h_0} [f(\alpha, h_0) + f(\bar{\alpha}, h_0)], \quad (27)$$

где

$$f(\alpha, h_0) = e^{z\alpha/2a\sqrt{t}} \left[\alpha^{-1} \sqrt{\mu\sigma_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \right) - \int_0^{z/2\alpha} e^{-au/\sqrt{t}} \operatorname{erfc}(u) du \right]$$

С учетом (24), (27)

$$A_x(t) = \frac{I\mu_0}{\pi\sqrt{\mu\sigma_1}} \int_0^t \left(\frac{e^{-z^2/4a}}{\sqrt{\pi t}} J_1 - \frac{1}{\sqrt{\mu\sigma_1}} J_2 \right) dt \quad (28)$$

При $h_0 \rightarrow \infty$ $J_1 = h_0^{-1} + O(h_0^{-2})$, $J_2 = O(h_0^{-2})$, поэтому

$$E_x(t) = \frac{J\mu}{\pi h_0} \frac{e^{-z^2\mu\sigma_1/4t}}{\sqrt{\mu\sigma_1\pi t}} + O(h_0^{-2}). \quad (29)$$

Формула (29) совпадает с точностью до $O(h_0^{-2})$ с нестационарным полем МТЗ в однородной проводящей земле.

Таким образом, по формулам (18) и (28) можно рассчитать значения поля для любых значений аргументов, что позволяет рассчитать краевые условия при решении двумерных нестационарных задач для моделей среды содержащей локальную неоднородность.

Очевидно

$$\lim_{t \rightarrow 0+} A_x(t) = \begin{cases} -\frac{I\mu}{2\pi} \operatorname{arth} \frac{2zh_0}{h_0^2 + y^2 + z^2}, & |z| < h_0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \quad (30)$$

поэтому целесообразнее решать методом сеток задачу о нестационарном поле кабеля относительно компоненты A_x , т.к. в этом случае в момент $t = 0+$ величина A_x не зависит от свойств нижнего полупространства.

При решении задачи относительно $E_x(t)$ начальный момент времени $t_0 > 0$ следует выбирать достаточно малым, чтобы величина $E_x(y, z, t_0)$ могла быть рассчитана приближе-

нно по формулам для однородного полупространства $z > 0$. Такое t_0 всегда можно выбрать, если в верхней части разреза имеется пласт возможно переменной мощности, но с постоянными электрическими свойствами.

Расчет нормального поля $A_x(y, z, t_0)$ или $E_x(y, z, t_0)$ в слоистой среде может быть выполнен численно по формуле (3) с использованием обратного преобразования Фурье.

Рассмотрим двумерную прямоугольную область D

$$D = \{(y, z) \in R^2 \mid (y_1 < y < y_2) \wedge (-d_1 < z < d_2)\},$$

где $d_1 > 0$.

Пусть область D_0

$$D_0 = \{(y, z) \in D \mid (y_1 < y < y_2) \wedge (z < 0)\}$$

соответствует воздуху, а область $\bar{D}_0 = D \setminus D_0$ соответствует земле и содержит локальную неоднородность. Тогда в области D получаем нестационарную краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \mu\sigma(y, z) \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad (y, z) \in D,$$

с краевыми условиями (18) для части границы $z < 0$ и (28) для части границы области D при $z > 0$ и начальном условии (30).

Расстояние от поверхности земли до "верхней" границы d_1 следует выбирать таким, чтобы вторичным полем на ней, вызванным локальной неоднородностью, можно было пренебречь. Тогда на границе $z = -d_1$ поле можно считать постоянным и равным

$$A_x(y_1, -d_1, t) = A_x(y_2, -d_1, t).$$

Из аналогичных соображений выбирается величина d_2 . Частным случаем нестационарной задачи для БДК является нестационарная задача магнитотеллурических зондирований, если в расчетах использовать достаточно большую величину h_0 .

Автор выражает благодарность проф. Л.Л.Ваньяну за обсуждение содержания работы и критические замечания.

Литература

1. Бердичевский М.Н., Безрук И.А., Дмитриев, В.И. .Ключкин В.Н. Куликов А.В. Об использовании переходных характеристик при МТЗ. В сб. «Магнитотеллурические методы изучения строения земной коры и верхней мантии» ,№ 4, Наука, 1969.
2. Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. М., Недра, 1965.
3. Диткин В.А. «Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. Высшая школа,1965.

© ВИНИТИ, 1978 г.