



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Российский государственный  
геологоразведочный университет**

**Кафедра МАТЕМАТИКИ**

---

*М. Н. Юдин, В. М. Юдин*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЕОЭЛЕКТРИКИ**

**ЧАСТЬ II. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ**

*Допущено УМО по образованию в области прикладной геологии в качестве  
учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности  
230401 «Прикладная математика» и 130201 «Геофизические методы  
поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»*

Москва  
2012

## **Математические модели геоэлектрики.**

### **Часть II. Численные исследования одномерных моделей: Учебное пособие.**

М.Н.Юдин, Юдин В.М. Рос. госуд. геологоразв. унив. – М.: 2011. 177 с.

Первая часть пособия («Слоистые модели среды») издана в 2007 г. Вторая часть посвящена численному исследованию одномерных моделей геоэлектрики.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям: 230401 «Прикладная математика» и 130201 «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых» (08.07, 09.01, 09.02, 09.05). Объем и содержание пособия соответствуют учебной программе по дисциплине «Математическое моделирование в геоэлектрике» специальности ПМ и будет полезным при изучении курсов «Теория поля», «Уравнения математической физики», «Электроразведка» геофизических специальностей.

Рецензент: проф. каф. геофизики Пермского государственного научно-исследовательского университета (ПГНИУ) Б.А. Спасский.

## СОДЕРЖАНИЕ

Список основных условных обозначений и сокращений .....	5
Предисловие .....	6
Глава 1. Численное исследование одномерных моделей .....	15
Введение .....	15
1.1. Метод конечных разностей.....	17
1.1.0. Основные понятия метода сеток.....	17
1.1.1. Стационарные задачи.....	28
1.1.2. Нестационарные задачи .....	36
1.1.3. Трехслойные разностные схемы .....	40
1.2. Вариационная формулировка задачи.....	42
1.2.1. Стационарные задачи.....	43
1.2.2. Нестационарные задачи .....	49
1.3. Метод Рунге и метод Галеркина .....	50
1.3.1. Основная идея метода Рунге и метода Галеркина.....	50
1.3.2. Применение методов Рунге и Галеркина. ....	54
1.3.3. Метод конечных элементов. Примеры базисных функций и алгоритмов численного решения задач.....	57
1.4. Метод вейвлет-Галеркина .....	82
1.4.1. Элементы теории дискретного вейвлет-преобразования.....	83
1.4.2. Вейвлет-Галеркинская аппроксимация функций.....	85
1.4.3. Постановка и решение одномерных задач.....	88
1.5. Метод интегральных уравнений. ....	92
1.6. Вычислительные схемы для уравнения Гельмгольца на основе локальных интегральных уравнений.....	100
1.7. Метод граничных элементов. ....	103
1.8. О решении систем линейных алгебраических уравнений.....	114
1.8.1. Прямые методы.....	116
1.8.2. Итерационные методы .....	119
1.9. Альтернирующий метод Шварца.....	124

1.9.1. Решение задачи Дирихле для суммы двух областей по методу Шварца .....	126
1.9.2. Стационарные задачи геоэлектрики.....	129
1.9.3. Нестационарные задачи геоэлектрики .....	144
Заключение.....	159
Список литературы.....	160
Приложение. Основные математические понятия и определения.....	165
П.1. Некоторые функциональные пространства .....	165
П.1.1. Пространство функций, интегрируемых с квадратом.....	165
П.1.2. Пространство непрерывных функций.....	166
П.2. Обобщенные ряды Фурье.....	167
П.2.1. Ортогональные системы функций.....	167
П.2.2. Линейные операторы и некоторые их свойства.....	170
П.3. Обобщенная производная в смысле Соболева и пространство $H_1$ .....	172
П.4. Пространства Соболева $W_2^l$ .....	174
П.5. Энергетические пространства .....	174
П.6. Квадратичные функционалы .....	177

## Список основных условных обозначений и сокращений

$\mathbf{E}, \widehat{\mathbf{E}}$  – электрическое поле и его Фурье-спектр

$\mathbf{H}, \widehat{\mathbf{H}}$  – магнитное поле и его спектр

$\mathbf{E}^n, \widehat{\mathbf{E}}^n, \mathbf{H}^n, \widehat{\mathbf{H}}^n$  – нормальное электромагнитное поле и его Фурье-спектр

$\mathbf{E}^a, \widehat{\mathbf{E}}^a, \mathbf{H}^a, \widehat{\mathbf{H}}^a$  – аномальное электромагнитное поле и его Фурье-спектр

$\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau$  – тангенциальные составляющие векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$

$U, U_h$  – вектор-функция  $U$  и ее сеточный аналог  $U_h$

$F, F^{-1}$  – операторы прямого и обратного одномерного преобразования Фурье

$\mu$  – магнитная проницаемость

$\mu_0$  – магнитная проницаемость воздуха

$\sigma$  – удельная электропроводность среды

$\rho = 1/\sigma$  – удельное электрическое сопротивление среды

$\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды

$k$  – волновое число среды

$\lambda$  – длина электромагнитной волны

$\omega$  – круговая частота колебаний

$T$  – период колебаний

$[f]_{\partial\Omega}$  – скачек (разрыв) функции  $f$  на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$

АМШ – альтернирующий метод Шварца

ДАМ – декомпозиционный альтернирующий метод

□ – конец раздела

$L^2(a,b)$  – пространство функций, интегрируемых с квадратом

$W_2^l(\Omega)$  – пространство Соболева

МКР (FDM) – метод конечных разностей (Finite Difference Method)

МКЭ (FEM) – метод конечных элементов (Finite Element Method)

МИУ (IEM) – метод интегральных уравнений (Integral Equation Method)

## Предисловие

Под *моделью* понимают такой объект, который в процессе изучения замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Ее можно рассматривать как специальную форму кодирования информации. Модель содержит в себе потенциальное знание, которое можно приобрести в процессе ее исследования.

Процесс построения и использования модели называется *моделированием*. Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то считают, что модель *адекватна* объекту.

Сущность *математического моделирования* состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью алгоритмов, реализуемых на компьютерах. Работа с моделью дает возможность исследовать ее свойства и поведение с различных точек зрения. Вычислительные эксперименты иногда позволяют изучать модели более полно и являются важным дополнением к чисто теоретическим подходам.

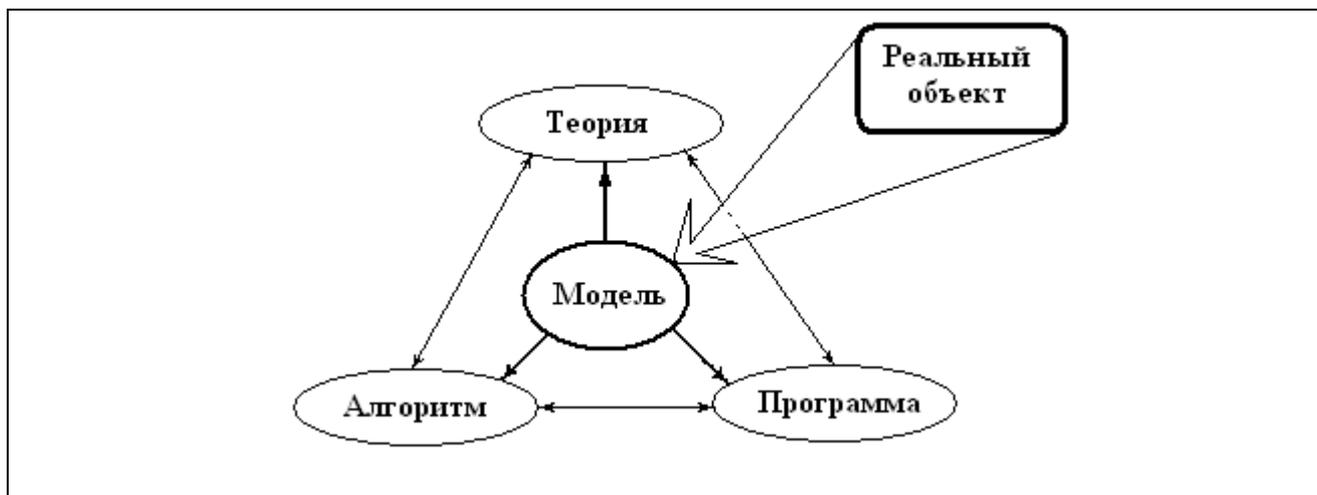
Процесс моделирования начинается с построения совокупности уравнений, данных и связей, отражающих в математической форме важнейшие свойства, обеспечивающие *адекватность* модели реальному объекту.

Изучение математической *модели* предполагает три этапа: *теория* – *алгоритм* – *программа* (см. рисунок).

На *первом этапе* предварительные знания об объекте получают на основании изучения модели (или ее фрагментов) *теоретическими* методами. Теория дает общее понимание модели и процесса решения задачи. Это один из путей качественного представления о том, что происходит в действительности.

*Второй этап* — выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и

логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы не должны искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.



На *третьем этапе* создаются программы, «переводящие» алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на «экспериментальной установке» – компьютере.

В конечном итоге специалист по изучаемой проблеме (пользователь) должен получить программный продукт – удобный инструмент для выполнения вычислительных экспериментов, обеспечивающих все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Если это не так, то может потребоваться изменение всех звеньев построения и исследования модели.

В геоэлектрике объектами модели являются электромагнитное поле, источники поля и параметры среды. Задание уравнений поля, его источников, а также геометрических и электромагнитных параметров геологической среды полностью определяют модель.

*Определение.* Нахождение величин, характеризующих параметры поля, по заданному распределению источников поля и параметров среды называют *прямыми задачами*.

*Определение.* Задачи, в которых нужно найти характеристики модели среды (коэффициенты дифференциальных уравнений) по результатам экспериментальных наблюдений, называют *обратными задачами*.

Чаще всего геометрические и электромагнитные параметры модели среды находят путем сравнения результатов решения прямых задач с экспериментальными (полевыми) данными.

*Математическое моделирование в геофизике* состоит в анализе класса математических моделей посредством решения прямых задач.

Цели моделирования могут быть разными. Основные из них заключаются в следующем:

- оценка разрешающей способности различных методов,
- изучение закономерностей влияния параметров модели среды и источников на измеряемое поле,
- интерпретация полевых данных (решение обратных задач) методом подбора.

При численном решении задач математической физики (и геоэлектрики, в частности) все большее распространение получают гибридные алгоритмы. Они основаны на одновременном использовании нескольких численных методов, обеспечивающих большую эффективность решения поставленной задачи. Их можно разделить на две основные группы: *композиционные* и *декомпозиционные*.

Большинство известных комбинированных методов решения прямых задач геоэлектрики относятся к числу *композиционных*. Суть их состоит в построении единой системы алгебраических уравнений для нескольких численных методов, участвующих в решении одной задачи. Это приводит к нарушению простой (ленточной) структуры матрицы системы разностных уравнений и усложнению методов ее решения, а также предъявляет

повышенные требования к памяти и быстродействию ЭВМ. Сложность реальных геоэлектрических разрезов и их большая протяженность ограничивают сферу применения комбинированных методов, построенных на композиционной основе, когда моделируемому объекту как единому целому сопоставляется краевая задача. Совершенствование вычислительных средств в обозримом будущем не устранил возникающих затруднений.

Более перспективным представляется *декомпозиционный* подход к численному решению прямых задач. Сложная модель среды (плоскость, пространство) разделяется на несколько подобластей, в каждой из которых автономно находится решение прямой задачи меньшей сложности по сравнению с общей задачей. Искомое решение получается в результате "сшивания" (рекомпозиции) автономных решений для соответствующих подобластей. Этот подход давно известен в прикладной электродинамике («метод частичных областей», Хан, 1941). Он получил дальнейшее развитие в монографии В.В.Никольского и Т.И.Никольской (1983).

Применительно к задачам геоэлектрики гибким и простым в реализации на ЭВМ является декомпозиционный альтернирующий метод (ДАМ), являющийся обобщением алгоритма Шварца на скалярные и векторные задачи ЭМЗ. Он впервые применен одним из авторов к решению прямых задач в 1981 году и получил дальнейшее развитие в ряде последующих публикаций. Основное достоинство ДАМ заключается в том, что связь между независимо решаемыми задачами устанавливается через краевые условия и не изменяет вида матриц системы разностных уравнений. Рекомпозиция общего решения происходит в итерационном процессе, охватывающем все автономные задачи. На этом пути открывается больше число конкретных алгоритмов решения прямых задач, реализующих различные уровни декомпозиции. Кроме того, алгоритм Шварца является эффективным средством для параллельных вычислений на многопроцессорных ЭВМ.

Сущность алгоритма ДАМ сводится к следующему.

а) Неограниченная область (плоскость или пространство) разделяется на две налегающие подобласти, одна из которых  $\Omega_1$  ограничена и содержит локальную неоднородность, а вторая  $\Omega_2$  – неограничена и соответствует фоновой модели (нормальному разрезу). Кроме того, граница  $\partial\Omega_1$  области  $\Omega_1$  целиком содержится в  $\Omega_2$  и наоборот. Задавая первоначально достаточно произвольно краевые условия, например, на  $\partial\Omega_1$  численно находится решение первой краевой задачи в  $\partial\Omega_1$ . Найденное приближенное решение выбирается в качестве краевого условия при решении задачи в области  $\Omega_2$ . Последовательно решение внутренней и внешней краевых задач (альтернирование) позволяет построить искомое решение,

б) При решении задачи в области  $\Omega_1$  алгоритм позволяет выполнить вторичную декомпозицию – сделать разбиение ее на несколько пересекающихся подобластей и находить в них решения прямыми методами или методом итераций, используя в качестве краевых условий результаты решения в соседних элементарных областях. При итерационном решении системы разностных уравнений в автономных блоках количество итераций будет возрастать в тех подобластях, в которых решение устанавливается наиболее медленно. Эффективность прямых методов также повышается благодаря относительно небольшим размерам подобластей и стандартного числа узлов используемых для их дискретизации. Вторичная декомпозиция практически снимает ограничения на размеры области и позволяет выполнять моделирование электромагнитных полей для геоэлектрических разрезов большой протяженности.

В методе ДАМ прямые задачи можно разделить на два основных класса: *внешние* и *внутренние*.

*Внешним краевым задачам* обычно соответствуют достаточно простые модели геоэлектрической среды, поэтому они, как правило, допускают *аналитическое* решение в неограниченных областях. Нередко решение задачи можно удовлетворительно аппроксимировать посредством *асимптотических*

разложений. Аналитические решения позволяют с меньшими вычислительными затратами изучить фундаментальные свойства электромагнитных полей за счет математического анализа этих решений. Классической одномерной моделью среды в электроразведке, относительно которой чаще всего решаются *внешние краевые задачи*, является горизонтально-однородная слоистая земля. В скважинной геофизике (электромагнитный каротаж, изучение околоскважинного пространства) модель среды представляет собой совокупность коаксиальных цилиндрических слоев, ось которых совпадает с осью скважины.

*Определение.* Плоскопараллельные и цилиндрические слоистые одномерные модели среды называют *нормальными* моделями (разрезами), а поля различных источников в этих моделях – *нормальными* полями. ▸

Решение задач геоэлектрики в слоистых средах обсуждается в первой части Пособия [Юдин, Юдин, 2007].

Обобщая понятие *нормальной* модели и *нормальных* полей, введем понятие *фоновой* геоэлектрической модели и *фоновых* полей.

*Определение.* *Фоновым геоэлектрическим разрезом* или *фоновой моделью* среды назовем такую модель среды, для которой известно численное или аналитическое решение задачи. Поля различных источников, соответствующие фоновым моделям, будем называть *фоновыми полями*. ▸

Фоновой моделью среды по отношению к классу одномерных моделей могут служить однородное полупространство или более «простые» одномерные модели. По отношению к классу двумерных моделей фоновой моделью могут служить одномерные или более «простые» (по сравнению с рассматриваемой) двумерные модели. Аналогично фоновой моделью среды по отношению к трехмерным моделям могут служить одномерные, двумерные или более «простые» трехмерные модели. Выбор фоновой модели определяется тем, для каких моделей мы располагаем решениями задач к моменту исследования текущей модели.

Большинство известных аналитических решений ориентированы на выполнение расчетов *фоновых* полей только на поверхности земли или на оси скважины. Разработка программ, инвариантных по отношению к размерности модели среды, предполагает расчет таких полей в точках наблюдения, а также в произвольной точке исследуемой двумерной или трехмерной неоднородности. Это обстоятельство потребовало обобщения некоторых классических решений задач.

*Внутренним краевым задачам* соответствуют сложно построенные модели реальной среды, содержащиеся в ограниченной области. Во второй части Пособия будет обсуждаться численное решение *внутренних краевых задач геоэлектрики* (одномерных, двумерных и трехмерных), которые представляют интерес для глубинных, структурных, скважинных и рудных электромагнитных методов. Будет дана постановка и численного решения задач, обеспечивающих моделирование электромагнитных полей применительно к сложным моделям геоэлектрики и реальным источникам поля. *Геоэлектрическая модель среды (модель геоэлектрического разреза)* представляет собой локальную двух- или трехмерную неоднородность, содержащуюся в горизонтально-однородной слоистой среде (или более сложном фоновом разрезе). При *численном подходе* совокупность математических соотношений и модели заменяется конечномерным аналогом. Это достигается заменой исходных континуальных соотношений их дискретными аналогами, т.е. переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. Найденное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи. Нами отдано предпочтение *вариационному подходу* к построению вычислительных схем, так как на этом пути удастся учесть априорную информацию о поведении электромагнитного поля и присутствие в модели среды неоднородностей специального вида, например, тонких проводящих пленок. Кроме того, функция, на которой достигается минимум вариационных функционалов, автоматически обеспечивает выполнение условий сопряжения на поверхностях

разрыва свойств среды, так как они относятся к классу естественных краевых условий. Построены алгоритмы, обеспечивающие повышенную точность численного решения при относительно небольшом количестве узлов сетки. Мы отдали предпочтение *методу конечных элементов* (МКЭ). В слоях нормального разреза, содержащих двумерную неоднородность (на достаточно большом расстоянии от нее), искомое решение строится либо путем использования полубесконечных элементов (нефинитных функций базиса), либо посредством согласования коэффициентов асимптотических разложений с разностным решением внутренней краевой задачи. На примере одномерной задачи МТЗ показано, что ее аналитическое и численное решения по МКЭ при использовании по вертикальной оси  $z$  специального вида экспоненциальных функций приводит к одной и той же системе уравнений, если узлы дискретизации совпадают с границами раздела пластов слоистого разреза. Это гарантирует совпадение обоих решений. В программах экспоненциальная аппроксимация поведения поля по вертикальной оси в пределах элементов допускается наряду с билинейной (трилинейной) традиционной аппроксимацией. Одновременное использование их имеет следующие преимущества:

1) Экспоненциальная (по оси  $z$ ) и билинейная (по осям  $x$  и  $y$ ) аппроксимация приводит к тому, что электромагнитное поле в пределах элемента удовлетворяет дифференциальному уравнению, если свойства среды в пределах элемента постоянны.

2) В случае МТЗ вычислительные схемы позволяют получить решение экстремальной задачи, совпадающее с аналитическим в двумерном и трехмерном случаях, если модель среда одномерна (свойства среды зависят только от  $z$ ) и узлы дискретизации совпадают с границами пластов.

Как показали численные эксперименты, использование экспоненциальных пробных функций делает вычислительные схемы устойчивыми по отношению к шагам дискретизация по оси  $z$  (Юдин, Веселовский, 1984).

Вычислительные алгоритмы целесообразно строить для расчета *аномальных* полей, источниками которых являются избыточные токи, расположенные в месте сосредоточения локальной неоднородности геоэлектрического разреза и возбуждаемые нормальным полам конкретного источника. Вычислительные схемы для аномального поля инвариантны по отношению к конкретному типу возбудителя поля. Для решения задачи нужно уметь рассчитывать нормальное поле в области, занятой: неоднородностью, а также в тех точках, в которых необходимо получить результаты (например, на поверхности земли).

Мы будем рассматривать алгоритмы численного решения задач геоэлектрики в порядке возрастания их размерности и сложности. Такой подход оправдан тем, что учебное пособие нацелено на студентов с различным уровнем математической подготовки (геофизиков и прикладных математиков). Предполагается, что читатель знаком с основами уравнений математической физики.

В этом Пособии обсуждаются алгоритмы численного решения стационарных и нестационарных одномерных задач посредством МКР, МКЭ, метода интегральных уравнений (МИУ). Исследование моделей большей размерности будет сделано в третьей части Пособия.

Пособие состоит из одной главы и приложения.

*Глава 1. Численное исследование одномерных моделей.*

Глава ориентирована в большей степени на понимание алгоритмов численного решения задач геоэлектрики и ориентирована на студентов с втузовским уровнем подготовки по математике.

*Приложение. Основные математические понятия и определения.*

Развиваемая в Пособии технология численного решения стационарных задач (вариационный подход и декомпозиция задачи на более простые подзадачи) применима также к расчету нестационарных полей в неоднородных средах. Альтернирующий метод сходится, т.к. основным

требованием для этого является выполнение принципа максимума, который справедлив для уравнений параболического типа.

В учебном пособии мы не стремились соблюдать в полной мере математическую строгость в изложении материала и полагали (по умолчанию), что свойства математических объектов таковы, что они обеспечивают законность выполняемых над ними математических операций.

Отличительной особенностью изложения является большое количество иллюстраций, полученных посредством СКМ *MathCad*.

Список литературы включает лишь необходимый минимум – это либо работы, результаты которых непосредственно отражены в тексте, либо ключевые книги, где можно найти более подробное изложение материала и дальнейшие ссылки.

## **Глава 1. Численное исследование одномерных моделей**

### **Введение**

Напомним ([Юдин, Юдин, 2007]), что в одномерной задаче МТЗ компоненты  $E_x(z)$  электрического и  $H_y(z)$  магнитного поля удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\eta(z)} \frac{du}{dz}(z) \right) - \frac{k^2(z)u(z)}{\eta(z)} = f(z), \quad z > 0, \quad (\text{A})$$
$$u = E_x \mid H_y, \quad \eta = \mu \mid \sigma,$$

где  $f(z)$  – заданная функция источников. Если функция  $u(z)$  является компонентой электрического поля  $E_x(z)$ , то параметру  $\eta$  соответствует магнитная проницаемость  $\mu$ , если же  $u(z)$  – компонента магнитного поля  $H_y(z)$ , то  $\eta$  – комплексная удельная электропроводность  $\hat{\sigma} = \sigma - i\omega\epsilon$ . Здесь  $\epsilon$  диэлектрическая проницаемость среды,  $k(z)$  – волновое число. Функция  $k(z)$  связана с круговой частотой и параметрами  $\mu$  и  $\hat{\sigma}$  посредством соотношения:

$$k^2(z) = -i\omega\mu\hat{\sigma}.$$

Мы будем рассматривать модели с медленно меняющимся во времени полями (квазистационарное приближение) и полагать  $\hat{\sigma} \approx \sigma$ ,  $k^2(z) = -i\omega\mu\sigma$ .

Обозначим

$$p(z) := 1/\eta(z), \quad q(z) := k^2(z)/\eta(z),$$

тогда уравнение (А) примет вид

$$(p(z)u'(z))' - q(z)u(z) = f(z). \quad (\text{В})$$

Как правило, функция  $p(z)$  является вещественной и неотрицательной, в то время как  $q(z)$  – комплексной из-за комплексности волнового числа. Это приводит к комплекснозначности функции  $u(z)$ . При дальнейшем изложении в этой главе будем считать функции  $p(z)$ ,  $q(z)$  и  $u(z)$  вещественными. Это упростит изложение и не приведет к радикальным изменениям или ошибкам в численных алгоритмах. Кроме того, будем считать, что

$$p(z) \in C^1[0, \infty), \quad q(z), f(z) \in C[0, \infty), \quad p(z) > p_0 > 0, \quad q(z) \geq 0.$$

В геоэлектрике уравнения типа (В) появляются также при исследовании моделей в неоднородных средах с числом измерений, большим 1. Поэтому в главе будут достаточно подробно рассматриваться различные аспекты численного решения краевых задач для уравнения (В) на полупрямой.

Глава ориентирована в большей степени на студентов с вузовским уровнем подготовки по математике. Последующие главы потребуют знания элементов функционального анализа, который не входит в программу по математике для студентов геофизической специальности.

В этой главе будут рассмотрены алгоритмы решения одномерных стационарных и нестационарных задач различными методами. Перечислим основные из них

- метод конечных разностей (МКР),

- метод конечных элементов (МКЭ, проекционно-сеточный метод),
- метод вейвлет-Галеркина (МВГ),
- метод интегральных уравнений (МИУ),
- метод локальных интегральных уравнений (МЛИУ),
- метод граничных элементов (МГЭ).

В процессе изложения материала будут более подробно рассмотрены соответствующие разделы математики.

В первом разделе будет обсуждена связь между простейшей вариационной задачей и соответствующей ей дифференциальной краевой задачей. Более полную информацию об этом можно найти в монографии [Канторович, Крылов, 1962].

Так как при решении задач в неограниченных областях многие проблемы удается преодолеть посредством декомпозиции их на основе альтернирующего метода Шварца (АМШ), то в заключительном разделе главы будет приведено описание этого алгоритма на примере решения простой задачи геоэлектрики на полупрямой и обсуждению вопросов его сходимости.

## **1.1. Метод конечных разностей**

### **1.1.0. Основные понятия метода сеток**

При написании этого раздела мы пользовались книгами А.А.Самарского и его соавторов [Самарский, 1976,1973] и учебниками Г.И.Марчука [1989, 1981].

Метод конечных разностей, или метод сеток, в настоящее время является одним из наиболее распространенных методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Суть метода состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов (например, отрезок, прямоугольник и т. д.) заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемых сеткой. Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые *сеточными функциями*. Производные, входящие в

дифференциальное уравнение и дополнительные (граничные, начальные) условия, заменяются (аппроксимируется) разностными соотношениями, т. е. линейными комбинациями значений сеточной функции в некоторых узлах сетки, При этом *краевая задача* для дифференциального уравнения заменяется системой линейных алгебраических уравнений (*разностной схемой*).

Если полученная таким образом разностная краевая задача разрешима и ее решение при измельчении сетки приближается (сходится) к решению исходной задачи для дифференциального уравнения, то оно и принимается за приближенное решение исходной задачи.

Несмотря на кажущуюся простоту метода, прежде чем приступать к решению конкретной задачи, необходимо уметь дать ответы на следующие вопросы:

1. Как выбрать сетку?
2. Как написать разностную схему? Если эти вопросы решены, то важно иметь информацию по следующим вопросам:
3. Сколь хорошо разностная схема аппроксимирует исходную задачу?
4. Устойчива ли разностная схема и в каком смысле?
5. Какова скорость сходимости решения разностной задачи к решению исходной задачи?

Обсуждения этих вопросов для тех или иных задач посвящено ряд учебников и монографий.

1. Сетки и сеточные функции. Рассмотрим простейшие примеры сеток. Пусть область изменения аргумента  $z$  есть отрезок  $0 \leq z \leq H$ . Разобьем этот отрезок точками  $z_i = ih$ , ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) на  $N$  равных частей длины  $h = H/N$  каждая. Множество точек  $z_i = ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , называется *равномерной сеткой* на отрезке  $0 \leq z \leq H$  и обозначается  $\mathfrak{w} = \{z_i = ih \mid i = 0, 1, \dots, N\}$ , а число  $h$  – расстояние между точками (узлами) сетки  $\mathfrak{w}$  называется *шагом сетки*.

Отрезок  $[0, H]$  можно разбить на  $N$  частей, вводя произвольные точки  $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{N-1} < H$ . Тогда получим сетку

$$\varpi = \{z_i | i = 0, 1, \dots, N, z_0 = 0, z_N = H\}$$

с шагом  $h_i = z_i - z_{i-1}$ , который зависит от номера  $i$  узла  $z_i$ . Если  $h_i \neq h_{i+1}$  хотя бы для одного номера  $i$ , то сетка и называется *неравномерной*. Если  $h_i = \text{const} = h = H/N$  для всех  $i = 1, 2, \dots, N$ , то мы получаем построенную выше *равномерную сетку*.

На бесконечной прямой  $-\infty < z < +\infty$  можно рассматривать сетку  $\Omega = \{z_i = ih | i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  с началом в любой точке  $z$ , состоящую из бесконечного числа узлов.

Иногда бывает удобно строить сетку так, что лишь один первый шаг отличен от остальных, а прочие шаги совпадают. Примером на  $[0, H]$  может служить сетка

$$\varpi = \{z_i = ih + 0.5h | i = 0, 1, \dots, N, h = H / (N + 0.5)\}$$

В этом случае левый конец отрезка  $z = 0$  не является узлом сетки.

Функцию  $\varphi = \varphi(z_i)$  дискретного аргумента  $z_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ), называют *сеточной функцией*, определенной на сетке  $\varpi$ , (сетка задана на отрезке  $[0, H]$ ).

Всякой непрерывной функции  $f(z)$ , заданной на отрезке  $[0, H]$ , можно поставить в соответствие сеточную функцию  $\varphi_i$ , заданную на сетке  $\varpi$

(спроектировать  $f(z)$  на сетку  $\varpi$ ), полагая, например,  $\varphi_i = f(z_i) \equiv f_i$ ,  $\varphi_i = \frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} f(z) dz$

и т.д. Вторая из указанных проекций на сетку может быть осуществлена не только для непрерывных функций, но и для функций, имеющих разрывы первого рода и даже для просто интегрируемых функций. Видим, что одна и та же сеточная функция, будучи заданной на двух различных сетках, имеющих общие узлы, не обязана в этих общих узлах принимать одно и то же значение.

## 2. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов.

### Погрешность аппроксимации.

Оператор  $L_h$  преобразующий сеточную функцию  $u$  в сеточную функцию  $U = L_h u$  называется сеточным или *разностным оператором*. Дифференциальный оператор  $L$ , заданный в классе функций непрерывного аргумента, может быть

приближенно заменен (аппроксимирован) разностным оператором  $L_h$ , заданным на сеточных функциях. Для этого каждая из производных заменяется разностным отношением, содержащим значения сеточной функции в нескольких узлах сетки.

Посмотрим, как строится аппроксимация для первых и вторых производных функции одного переменного.

Пусть  $\Omega = \{z_i = ih \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  – равномерная сетка с шагом  $h$  на прямой  $-\infty < z < +\infty$ . Рассмотрим первую производную  $Lv = v'$  функции  $v(z)$ . Заменить ее разностным выражением можно различными способами. Например:

$$Lv \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{h} := L_h^- v_i \quad (1.1.1)$$

– левое разностное отношение,

$$Lv \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{h} := L_h^+ v_i \quad (1.1.2)$$

– правое разностное отношение,

$$Lv \approx \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} := L_h^0 v_i \quad (1.1.3)$$

– центральное разностное отношение.

Здесь  $v_i = v(z_i)$ , знак  $\sim$  означает соответствие или аппроксимацию.

Множество узлов, значения сеточной функции в которых входит в выражение  $L_h v_i$ , называется *шаблоном* оператора  $L_h$  в точке  $z_i$ .

При замене  $Lv$  разностным выражением  $L_h v$  допускается погрешность  $L_h v_i - (Lv)_i = \psi_i$ , называемая *погрешностью аппроксимации* оператора  $L$  разностным оператором  $L_h$ . Естественно требовать, чтобы при стремлении  $h$  к нулю эта погрешность стремилась к нулю. Для оценки  $\psi_i$  нужно предположить, что  $v(z)$  – гладкая функция. Пусть функция  $v(z)$  имеет  $m$  непрерывных производных ( $v(z) \in C^m$ ), где  $m \geq 2$ . Разложим  $v(z)$  в окрестности точки  $z = z_i$  по формуле Тейлора:

$$v(z \pm h) = v(z) + \frac{1}{1!} v'(z)[(z \pm h) - z] + \frac{1}{2!} v''(z)[(z \pm h) - z]^2 + \dots \quad (1.1.4)$$

или

$$v(z_i \pm h) \equiv v_{i\pm 1} = v_i \pm v'(z_i)h + \frac{1}{2!}v''(z_i)h^2 + \dots \quad (1.1.5)$$

Вычислим

$$L_h^- v_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h} = v'(z_i) - \frac{1}{2!}v''(z_i)h + \dots \quad (1.1.6)$$

и найдем погрешность замены первой производной разностной

$$\psi_i^- := L_h^- v_i - v'_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h} - v'_i = C \cdot h, \quad C = -\frac{1}{2!}v''(z_i)h + \dots$$

При  $h \rightarrow 0$   $C \approx -\frac{1}{2!}v''(z_i)h$ , поэтому последнюю формулу обычно записывают

следующим образом:  $\psi_i^- = O(h)$ . Аналогично

$$\psi_i^+ := L_h^+ v_i - v'_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{h} - v'_i = O(h). \quad (1.1.7)$$

Отсюда следует, что  $\psi_i^\pm \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Пусть  $L$  – дифференциальный оператор,  $L_h$  – разностный оператор, заданный на некоторой сетке  $\Omega$ , где  $h$  – параметр, характеризующий мелкость сетки,  $v(z)$  – достаточно гладкая функция. Говорят, что разностный оператор  $L_h$ :

1) *аппроксимирует* дифференциальный оператор  $L$  в узле  $z_i \in \Omega$ , если разность

$$L_h v_i - (Lv)_i = \psi_i, \text{ стремится к нулю при } h \rightarrow 0;$$

2) *аппроксимирует*  $L$  с порядком  $n$  ( $n > 0$ ) в узле  $z_i \in \Omega$ , если  $\psi_i = O(h^n)$ .

Обращаясь к формулам для  $L_h^\pm$ , видим, что они аппроксимируют  $Lv = v'$  с первым порядком при  $v(x) \in C^m$ , где  $m \geq 2$ . Увеличение числа  $m$  не меняет порядка аппроксимации.

Возьмем теперь оператор  $L_h^0$ . Как нетрудно показать,  $L_h^0 v_i$  аппроксимирует  $v'(z)$  при  $v(z) \in C^m$ ,  $m = 3$ , со вторым порядком.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$v_{\bar{z},i} := \frac{v_i - v_{i-1}}{h}, \quad v_{z,i} := \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \quad v_{z,i}^0 := \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2}(v_{\bar{z},i} + v_{z,i}). \quad (1.1.8)$$

В тех случаях, когда номер узла не будет иметь значения, будем его опускать и писать просто  $v_{\bar{z}}, v_z, v_z^0$ .

Рассмотрим теперь вторую производную  $Lv = v''$ . Очевидно, что на двухточечном шаблоне ее аппроксимировать нельзя. Выберем *трехточечный шаблон*, состоящий из узлов  $z_{i-1}, z_i, z_{i+1}$ , и рассмотрим разностный оператор

$$L_h v_i \equiv v_{\bar{z}\bar{z},i} := \frac{1}{h} (v_{z,i} - v_{\bar{z},i}) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}. \quad (1.1.9)$$

Если  $v(z) \in C^m$ ,  $m = 4$ , то можно написать разложение в ряд Тейлора

$$v(z \pm h) = v(z) \pm v'(z)h + v''(z)\frac{h^2}{2} \pm v'''(z)\frac{h^3}{3!} + O(h^4).$$

Отсюда следует, что

$$v_{\bar{z}\bar{z},i} - v_i'' = O(h^2), \quad (1.1.10)$$

т. е. (индекс  $i$  опускаем)  $v_{\bar{z}\bar{z}}$  аппроксимирует  $v''$  со вторым порядком.

Отметим, что на самом деле порядок аппроксимации разностного оператора  $L_h$ , зависит от порядка  $m$  дифференцируемости функции  $v(x)$ . Мы везде фактически говорили о том максимальном порядке аппроксимации, который не меняется при увеличении номера  $m$  класса  $C^m$ , считая, что  $v(x)$  – любая функция из  $C^m$ .

До сих пор мы оценивали величину погрешности аппроксимации  $\psi_i = L_h v_i - (Lv)_i$  в отдельном узле  $x_i \in \Omega$ .

*Определение.* Если оператор  $L_h$  аппроксимирует оператор  $L$  во всех узлах  $x_i \in \Omega$ , то говорят, что  $L_h$  аппроксимирует  $L$  на сетке  $\Omega$ .

В этом случае для оценки погрешности аппроксимации удобно пользоваться *нормой  $C$* , которая определяется формулой:

$$\|\psi\|_C := \max_{z \in \Omega} |\psi(z)|. \quad (1.1.11)$$

Для оценки величины сеточной функции  $\psi$  можно использовать и другие нормы, такие как

$$\|\psi\|_{L^1} := \sum h|\psi(z)|, \|\psi\|_{L^2} := \sqrt{\sum h|\psi^2(z)|}. \quad (1.1.12)$$

Пусть  $\|\psi\|$  – некоторая норма для функций  $\psi(z)$ , заданных на сетке  $\Omega$ . В дальнейшем будем говорить, что разностный оператор  $L_h$  *аппроксимирует* дифференциальный оператор  $L$ :

- по норме  $\|\cdot\|$ , если  $\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ;
- по норме с порядком  $n > 0$  ( $L_h$  имеет  $n$ -й порядок аппроксимации), если  $\|\psi\| = O(h^n)$ , или  $\|\psi\| \leq Mh^n$ , где  $M = \text{const} > 0$  не зависит от  $h$ .

Если  $v$  достаточно гладкая функция, а  $\Omega$  – равномерная сетка, то все рассмотренные выше разностные операторы имеют один и тот же порядок аппроксимации в любой из норм (1.1.11), (1.1.12).

### 3. Постановка разностных задач. Аппроксимация и сходимость.

До сих пор мы занимались аппроксимацией простейших дифференциальных операторов разностными. Обычно требуется решить дифференциальное уравнение  $Lu=f(z)$  с некоторыми дополнительными (например, краевыми) условиями. Поэтому, кроме построения разностного оператора, нужно аппроксимировать на сетке правую часть дифференциального уравнения и дополнительные условия, после чего можно дифференциальной задаче поставить в соответствие *разностную задачу*, т. е. написать систему разностных (алгебраических) уравнений.

Закон построения на сетке разностных уравнений и дополнительных условий называется *разностной схемой*. Под разностной схемой понимается совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение во внутренних узлах сетки, и дополнительные (начальные и граничные) условия – в граничных узлах сетки.

Разностная схема называется *однородной*, если ее коэффициенты во всех узлах сетки для любых коэффициентов дифференциального уравнения вычисляются по одним и тем же формулам.

Разностная схема называется *консервативной*, если она не нарушает разностные аналоги физических законов сохранения (энергии, массы и т.п.).

Целесообразно строить разностные схемы, удовлетворяющие требованиям однородности и консервативности.

Рассмотрим пример постановки разностной задачи.

*Пример 1.* Краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} Lu \equiv u'' - qu = f(z), 0 < z < H, \\ u(0) = g_0, u(H) = g_1 \end{cases} \quad (1.1.13)$$

на равномерной сетке  $\bar{\omega}$  ставятся в соответствие разностная краевая задача:

$$\begin{cases} v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} - r_i v_i h^2 = \varphi_i h^2, i = 1, 2, \dots, N-1, \\ v_0 = g_0, v_1 = g_1, \end{cases} \quad (1.1.14)$$

где  $\varphi_i = f(z_i)$ ,  $r_i = q(z_i)$ .  $\square$

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$Lu = f(z), \quad (1.1.15)$$

которое аппроксимируется разностным уравнением

$$L_h v = \varphi(z) \quad (1.1.16)$$

на сетке  $\Omega$ . Рассмотрим невязку  $\psi(z) = L_h u - \varphi(z)$ ,  $z \in \Omega$ , где  $u$  – решение уравнения (1.1.15).

Будем говорить, что функция  $\psi(x)$  есть *погрешность аппроксимации уравнения* (1.1.15) разностным уравнением (1.1.16), если разностный оператор  $L_h$  аппроксимирует на достаточно гладких функциях дифференциальный оператор  $L$ .

В дальнейшем будем говорить, что разностное уравнение (1.1.16):

- *аппроксимирует дифференциальное уравнение* (1.1.15) *по норме*  $\|\cdot\|$ , если  $\|\psi(z)\| = \|L_h u - \varphi(z)\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ,
- *аппроксимирует дифференциальное уравнение с порядком*  $n$  ( $n > 0$ ), если,  $\|\psi\| = O(h^n)$  или  $\|\psi\| \leq Mh^n$ , где  $M = \text{const} > 0$  и не зависит от  $h$ .

Исходя из нового определения погрешности аппроксимации разностных схем, проверим порядок погрешности схемы (1.1.14) в предположении, что решение уравнения (1.1.5) достаточно гладкое. Для схемы (1.1.14)

$$\psi = L_h u - \varphi = u_{zz} - p_h u - f = u'' + \frac{h^2}{12} u^{(4)} + O(h^4) - p_h u - f = O(h^2).$$

*Определение сходимости.* Будем говорить, что решение разностной задачи (1.1.16)

- 1) *сходится* к решению исходной задачи на сетке  $\omega$  в смысле некоторой сеточной нормы  $\|\cdot\|_h$ , если  $\|v - u\|_h \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ,
- 2) *сходится* к решению исходной задачи в смысле нормы  $\|\cdot\|_h$  со скоростью  $O(h^n)$ , если  $\|v - u\|_h = O(h^n)$  (или  $\|v - u\|_h \leq Mh^n$ , где  $M$  – положительная постоянная, не зависящая от  $h$ ).

4. *Устойчивость разностных схем.* Выше мы познакомились с понятиями аппроксимации и сходимости схемы. Следует подчеркнуть, что погрешность аппроксимации рассматривается не на одной фиксированной сетке, а на последовательности сеток  $\{\omega_h\}$ . Поэтому можно считать, что всюду речь шла не о решении отдельной разностной задачи, а о последовательности  $\{v^h\}$  решений разностной задачи, зависящей от выбора сеток. Здесь  $h$  – параметр, характеризующий сетку. Если сетка одномерна и равномерна, то  $h$  – число (шаг сетки). В общем случае  $h$  – вектор.

Для оценки сходимости схемы надо исследовать сходимость последовательности  $\{z^h = v^h - u^h\}$  при  $|h| \rightarrow 0$ , где  $u^h$  – проекция точного решения  $u = u(z)$  исходной задачи на пространство сеточных функций, заданных на сетке  $\omega$ .

Одним из основных понятий теории разностных схем является понятие устойчивости разностной схемы.

Пусть для некоторого дифференциального уравнения поставлена краевая задача

$$Lu = f(z) \tag{1.1.17_1}$$

с дополнительными (например, краевыми) условиями

$$lu = g(z). \quad (1.1.17_2)$$

Задача (1.1.17) на некоторой сетке аппроксимирована разностной задачей

$$L_h v = \varphi, z \in \omega, \quad l_h v^h = s(z), z \in \gamma, \quad (1.1.18)$$

где  $\omega$  – множество внутренних узлов сетки и, а  $\gamma$  – множество граничных узлов, причем  $\varpi = \omega \cup \gamma$ .

Пусть дана некоторая схема

$$L_h v^h = \varphi^h(z), \quad l_h v^h = s^h(z)$$

и ее погрешность аппроксимации:

$$\psi^h = L_h v^h - \varphi^h(z), \quad \psi_s^h = l_h v^h - s^h(z).$$

Предполагая, что  $u = u(z)$  имеет достаточное число производных, можно получить асимптотическое разложение  $\psi^h$  и  $\psi_s^h$  относительно  $|h|$ . В качестве  $u = u(z)$  естественно выбрать решение исходной задачи для дифференциального уравнения. Однако знания порядка аппроксимации недостаточно для суждения о качестве схемы. Необходимо оценить точность схемы, т. е. порядок погрешности  $z^h = v^h - u^h$ . Эта оценка может быть получена, если схема устойчива.

*Дадим определение устойчивости схемы.* Пусть  $v_1^h$  и  $v_2^h$  – решения задач (1.1.18) с правыми частями  $\varphi_1^h, s_1^h$  и  $\varphi_2^h, s_2^h$  соответственно. Схема (1.1.18) называется *устойчивой*, если существуют такие положительные постоянные  $M_1, M_2$  и  $h_0$ , не зависящие от сетки  $\omega_h$ , (от векторного параметра  $h$ ) и от выбора правых частей, что при  $|h| \leq h_0$  справедливо неравенство

$$\|v_2^h - v_1^h\|_h^{(1)} \leq M_1 \|\varphi_2^h - \varphi_1^h\|_h^{(2)} + M_2 \|s_2^h - s_1^h\|_h^{(3)}, \quad (1.1.19)$$

где  $\|\cdot\|_h^{(1)}, \|\cdot\|_h^{(2)}, \|\cdot\|_h^{(3)}$  – некоторые нормы, введенные на множестве сеточных функций, заданных на сетке  $\omega_h$ . Устойчивость разностной схемы означает, что решение  $\{v^h\}$  задачи (1.1.18) равномерно по  $h$  непрерывно зависит от правых

частей (входных данных)  $\{\varphi^h, \nu^h\}$  и, следовательно, малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения.

Если схема (1.1.18) разрешима при любых допустимых правых частях (входных данных)  $\{\varphi^h, \nu^h\}$  и устойчива, то говорят, что разностная задача (1.1.18) поставлена *корректно* или схема (1.1.18) *корректна*.

Если схема корректна, то она имеет единственное решение. В самом деле, предположим, что существует два решения  $v_1^h$  и  $v_2^h$  задачи (1.1.18), соответствующие одним и тем же входным данным  $\{\varphi^h, \nu^h\}$ , так что  $\varphi_2^h = \varphi_1^h = \varphi^h$ ,  $s_2^h - s_1^h = s^h$ . Тогда из (1.1.19) следует

$$\|v_2^h - v_1^h\|_h^{(1)} \leq M_1 \|0\|_h^{(2)} + M_2 \|0\|_h^{(3)} = 0, \text{ т.е. } v_2^h \equiv v_1^h.$$

При определении устойчивости (1.1.19) не предполагалось, что уравнения (1.1.18) линейны. Предположим, что схема (1.1.18) линейна. Тогда  $v^h \equiv 0$  есть решение задачи при  $\varphi^h = s^h = 0$ . Полагая в (1.1.19)  $y_1^h = y^h$ ,  $\varphi_1^h = \varphi^h$ ,  $\nu_1^h = \nu^h$  и  $y_2^h = \varphi_2^h = s_2^h = 0$ , видим, что устойчивость линейной схемы означает выполнение априорной оценки

$$\|v^h\|_h^{(1)} \leq M_1 \|\varphi^h\|_h^{(2)} + M_2 \|s^h\|_h^{(3)}. \quad (1.1.20)$$

Мы будем рассматривать только линейные уравнения.

Если схема устойчива, то нетрудно получить оценку погрешности решения

$$y^h = v^h - u^h,$$

где  $v^h(x)$  – решение задачи (1.1.18), а  $u = u(x)$  – решение исходной задачи (1.1.17), через погрешность аппроксимации.

В случае линейной схемы для погрешности  $y^h$  получаем задачу

$$L_h y^h = \psi^h, z \in \omega; l_h y^h = \psi_s^h, z \in \gamma,$$

являющуюся аналогом задачи (1.1.18); для нее сразу можно воспользоваться оценкой (1.1.19) и получить

$$\|v^h - u^h\|_h^{(1)} \leq M_1 \|\psi^h\|_h^{(2)} + M_2 \|\psi_s^h\|_h^{(3)}. \quad (1.1.21).$$

Из оценки (1.1.21) следует вывод: если схема (1.1.18) устойчива и аппроксимирует задачу (1.1.17), то эта схема сходится при  $|h| \rightarrow 0$ . В самом деле,  $\|v^h - u^h\|_h^{(1)} \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ , если  $\|\psi^h\|_h^{(2)} \rightarrow 0$  и  $\|\psi_s^h\|_h^{(3)} \rightarrow 0$ .

Из оценки (1.1.21) видно, что порядок точности схемы (1.1.18) определяется порядком аппроксимации. Чтобы схема сходилась, например, со скоростью  $O(h^m)$ ,  $m > 0$  (имела точность  $O(h^m)$ ), достаточно чтобы она имела аппроксимацию (на решении  $u = u(z)$  задачи (1.9.30)) того же порядка, т. е.

$$\|\psi^h\|_h^{(2)} = O(|h|^m), \|\psi_s^h\|_h^{(3)} = O(|h|^m).$$

Доказательство устойчивости схем сводится к получению априорных оценок (1.1.19) или (1.1.20).

### 1.1.1. Стационарные задачи

Построим равномерную сетку на интервале  $[0, H]$

$$\bar{\omega}_h = \{z_i = ih, i = 0, \dots, N\}$$

с шагом  $h = H/N$ ,  $N$  – натуральное число. Обозначим через  $\tilde{\omega}_h$  множество средних точек сетки

$$\tilde{\omega}_h = \{z_{i+1/2} = (i + 1/2)h, i = 0, \dots, N - 1\},$$

а через  $\omega_h$  – множество внутренних узлов сетки

$$\omega_h = \{z_i = ih, i = 1, \dots, N - 1, h = H/N\}.$$

Отметим, что  $z_{i+1/2} = (z_i + z_{i+1})/2 = z_i + h/2$ .

Пусть  $v$  – сеточная функции, определенная в узлах сетки  $\bar{\omega}_h$ .

Конечно-разностный аналог дифференциальной задачи будем называть *разностной схемой (РС)* или *разностной задачей*.

1) *Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.*

Пример. Построим разностную схему на для задачи:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} - q(z)u = f(z), z \in (0, H), \\ u|_{z=0} = u_0, u|_{z=H} = u_1. \end{cases} \quad (1.1.22).$$

Каждому внутреннему узлу сетки  $\omega_h$  поставим в соответствие уравнение

$$\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} - q_i^h v_i = f_i^h, i = 1, \dots, N-1. \quad (1.1.23)$$

Кроме того, добавим к ним два краевых условия

$$v_0 = u_0, v_N = u_1. \quad (1.1.24)$$

Запишем (1.1.23) несколько иначе

$$v_{i+1} - (2 + h^2 q_i^h) v_i + v_{i-1} = h^2 f_i^h. \quad (1.1.25)$$

Получим систему  $N-1$  линейных уравнений для отыскания значений сеточной функции  $v$  в узлах сетки  $\omega_h$ . Запишем несколько уравнений этой системы:

$$\begin{cases} -(2 + h^2 q_1^h) v_1 + v_2 = h^2 f_1^h - u_0, \\ v_1 - (2 + h^2 q_2^h) v_2 + v_3 = h^2 f_2^h, \\ \dots \\ v_{i-1} - (2 + h^2 q_i^h) v_i + v_{i+1} = h^2 f_i^h, \\ \dots \\ v_{N-3} - (2 + h^2 q_{N-1}^h) v_{N-2} + v_{N-1} = h^2 f_{N-2}^h, \\ v_{N-2} - (2 + h^2 q_{N-1}^h) v_{N-1} = h^2 f_{N-1}^h - u_1. \end{cases} \quad (1.1.26)$$

Матрица системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет трехдиагональный вид. Если дифференциальное уравнение однородное, то правая часть СЛАУ отлична от нуля только в первом и последнем уравнении. Эффективным методом решения такой системы является алгоритм прогонки (вариант метода Гаусса).

*Замечание.* Трехдиагональная структура СЛАУ сохраняется для большинства разностных схем, соответствующих различным одномерным задачам, меняется только вид коэффициентов системы.

## 2) Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

В случае дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами задача построения разностных схем существенно усложняется. На заданном шаблоне можно создать бесчисленное множество схем, эквивалентных по порядку аппроксимации.

Рассмотрим одномерную задачу Дирихле для стационарного уравнения диффузии

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left( p(z) \frac{du}{dz} \right) - q(z)u = f(z), z \in (0, H), \\ u|_{z=0} = u_0, u|_{z=H} = u_1, \\ p(z) \geq p_0 > 0, q(z) \geq 0. \end{cases} \quad (1.1.27).$$

Обычно полагают, что  $p'(z), q(z), f(z)$  непрерывны. Уравнению (1.1.27) удовлетворяют напряженность электрического и магнитного поля при переменных значениях магнитной проницаемости и проводимости в частотной области (в этом случае коэффициенты уравнения могут быть комплекснозначными функциями). Оно также описывает стационарное (не зависящее от времени) распределение температур (стационарное уравнение теплопроводности) или концентрации вещества (уравнение диффузии). Если  $u(z)$  – температура, то  $W(z) = -p(z)du/dz$  – тепловой поток, а  $p(z)$  – коэффициент теплопроводности.

Разностные схемы в пространстве сеточных функций должны правильно отражать основные свойства исходной задачи.

*А. Пример простой разностной схемы для первой краевой задачи (1.1.27).*

Разностная схема на сетках  $\omega_h, \tilde{\omega}_h$  определим следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{p_{i+1/2}(v_{i+1} - v_i) - p_{i-1/2}(v_i - v_{i-1})}{h^2} - q_i^h v_i = f_i^h, \\ v_0 = u_0, v_N = u_1, \end{cases} \quad (1.1.28)$$

где  $p_{i\pm 1/2} = p(z_i \pm h/2)$ ,  $q_i^h = q(z_i)$ ,  $f_i^h = f(z_i)$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

Из СЛАУ, состоящей из  $N-1$  уравнения, находим приближенное решение задачи  $u(z)$  в узлах сетки  $\omega_h$ . Можно показать, что разностная задача имеет второй порядок аппроксимации.

Если функции  $p(z), q(z), f(z)$  разрывны, то в формулах следует брать полусумму предельных значений слева и справа.

Запишем общий вид уравнений разностной схемы (1.1.28) для компонент  $E_x$  и  $H_x$ . Для компоненты  $E_x$  имеем

$$\frac{\mu_{i+1/2}^{-1} E_{x,i+1} - \left( \mu_{i+1/2}^{-1} + \mu_{i-1/2}^{-1} + (k^2 \mu^{-1})_i^h \right) E_{x,i} + \mu_{i-1/2}^{-1} E_{x,i-1}}{h^2} = f_{E,i}^h, \quad (1.1.28_E)$$

где  $(k^2 \mu^{-1})_i^h = -i\omega(\sigma)_i^h$  – проекция коэффициента  $k^2 \mu^{-1}$  на сетку.

Для компоненты  $H_x$  получим

$$\frac{\rho_{i+1/2} H_{x,i+1} - \left( \rho_{i+1/2} + \rho_{i-1/2} + (k^2 \rho)_i^h \right) H_{x,i} + \rho_{i-1/2} H_{x,i-1}}{h^2} = f_{H,i}^h. \quad (1.1.28_H)$$

Рассмотрим более подробно аппроксимацию термина  $k^2 \mu^{-1}$  в уравнении (1.1.28<sub>E</sub>) на неравномерной сетке. Одним из возможных вариантов является интегральное среднее значение этой функции на интервале  $[z_{i-1}, z_{i+1}]$

$$(k^2 \mu^{-1})_i^h = -i\omega \frac{1}{z_{i+1} - z_{i-1}} \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \sigma(z) dz = -i\omega \frac{1}{h_i + h_{i+1}} \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \sigma(z) dz,$$

$$\frac{1}{h_i + h_{i+1}} \left( \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sigma(z) dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma(z) dz \right) = \frac{\bar{\sigma}_{i-1/2} h_i + \bar{\sigma}_{i+1/2} h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = \frac{S_{i-1/2} + S_{i+1/2}}{h_i + h_{i+1}},$$

где

$$\bar{\sigma}_{i-1/2} := \frac{1}{h_i} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sigma(z) dz, \quad S_{i-1/2} := \bar{\sigma}_{i-1/2} h_i.$$

Величины  $\bar{\sigma}_{i+1/2}$  и  $S_{i+1/2}$  вычисляются по аналогичным формулам с очевидной заменой индекса  $i$  на  $i+1$ .

*Частный случай.* Если на интервале  $[z_{i-1}, z_{i+1}]$   $\mu = const$ ,  $\sigma = const$ , то уравнение (1.1.28<sub>E</sub>) может быть записано в более простом виде (см. формулу (1.1.26))

$$\frac{E_{x,i+1} - (2 + k_i^2 h^2) E_{x,i} + E_{x,i-1}}{h^2} = \mu f_{E,i}^h. \quad (1.1.28_u)$$

*Б. Аппроксимация краевых условий во второй краевой задаче.*

Рассмотрим задачу с дифференциальным уравнением из (1.1.27) и краевым условием второго рода

$$u'|_{z=0} = u'_0, \quad u'|_{z=H} = u'_1,$$

где  $u'_0, u'_1$  – заданные числа. Как известно, при односторонней аппроксимации первой производной

$$\frac{v_1 - v_0}{h} = u'_0, \frac{v_N - v_{N-1}}{h} = u'_1 \Leftrightarrow v_0 = v_1 - u'_0 h, v_N = u'_1 + v_{N-1} h$$

получим первый порядок аппроксимации краевого условия и, следовательно, разностную схему первого порядка точности. Предположим, что нам известно решение дифференциальной задачи  $u(z)$ . Разложим его в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$ :

$$u(h) = u(0) + u'(0)h + \frac{u''(0)h^2}{2!} + O(h^3),$$

откуда найдем

$$u'(0) = \frac{u(h) - u(0)}{h} + \frac{u''(0)h}{2!} + O(h^2). \quad (1.1.29_1)$$

Выразим  $u''(z)$  из дифференциального уравнения задачи (1.1.27). Запишем его в следующем виде:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{dp}{dz} \frac{du}{dz} + f + qu.$$

При  $z = 0$  получим

$$u''(0) = -p'(0)u'_0 + f(0) + q(0)u(0).$$

Подстановка последнего соотношения в (1.1.29<sub>1</sub>) дает:

$$u'_0 = \frac{u(h) - u(0)}{h} - \frac{[-p'(0)u'_0 + f(0) + q(0)u(0)]h}{2!} + O(h^2). \quad (1.1.29_2)$$

Перейдем в последнем соотношении к сеточным функциям, полагая

$$p'_0 = p'(0), f_0 = f(0), q_0 = q(0), v_0 = u(0), v_1 = u(h).$$

После простых преобразований (1.1.29<sub>2</sub>) (с точностью до  $O(h^2)$ ) получим уравнение, связывающее неизвестные значения  $v_0, v_1$

$$v_0 = \frac{v_1 - u'_0 h (1 + p'_0 h / 2) + f_0 h^2 / 2}{(1 + q_0 h^2)}. \quad (1.1.30)$$

Очевидно, формула (1.1.30) на границе  $z = 0$  обеспечивает аппроксимацию краевого условия Неймана со вторым порядком по  $h$

Аналогично строится краевое условие на правой границе интервала.

В. *Метод баланса (интегро-интерполяционный метод, метод интегральных тождеств).*

Будем считать, что в уравнении (1.1.27) функции  $p$ ,  $q$ ,  $f$  кусочно-непрерывны с возможными точками разрыва первого рода [Марчук, 1989].

Проинтегрируем дифференциальное уравнение задачи (1.1.27) в интервале  $(z_{i-1/2}, z_{i+1/2})$ . В результате приходим к интегральным тождествам

$$W_{i+1/2} - W_{i-1/2} - \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} [qu(z) + f(z)] dz = 0, \quad (1.1.31)$$

где

$$W_{i\pm 1/2} = W(z_{i\pm 1/2}), \quad W(z) := -p(z) \frac{du}{dz}(z).$$

Для нахождения  $W_{i-1/2}$  проинтегрируем уравнение в (1.1.27) в пределах  $(z_{i-1/2}, z)$ .

Так как

$$\int_{z_{i-1/2}}^z \frac{d}{d\zeta} \left( p(\zeta) \frac{du}{d\zeta} \right) d\zeta = p(\zeta) \frac{du}{d\zeta} \Big|_{z_{i-1/2}}^z = p(z) \frac{du(z)}{dz} - W_{z_{i-1/2}},$$

то

$$p(z) \frac{du(z)}{dz} = W_{z_{i-1/2}} + \int_{z_{i-1/2}}^z (q(\zeta)u + f(\zeta)) d\zeta.$$

Последнее выражение разделим на  $p(z)$  и проинтегрируем в пределах  $(z_{i-1}, z_i)$ .

В результате получим

$$u_i - u_{i-1} = W_{z_{i-1/2}} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p} + \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p} \int_{z_{i-1/2}}^z (q(\zeta)u + f(\zeta)) d\zeta. \quad (1.1.32)$$

Из (1.1.32) находим

$$W_{z_{i-1/2}} = \frac{1}{\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p}} \left[ u_i - u_{i-1} - \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p} \int_{z_{i-1/2}}^z (qu + f) d\zeta \right]. \quad (1.1.33_1)$$

Величину  $W_{i+1/2}$  найдем аналогичными преобразованиями. Для получения результата нужно в (1.1.33<sub>1</sub>) заменить индекс  $i$  на  $i+1$

$$W_{z_{i+1/2}} = \frac{1}{\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p}} \left[ u_{i+1} - u_i - \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p} \int_{z_{i+1/2}}^z (qu + f) d\zeta \right]. \quad (1.1.33_2)$$

Итак, удалось выразить потоки через известные функции и решение задачи.

Подставляя формулы (1.1.33) в (1.1.31), получим

$$\begin{aligned} W_{z_{i+1/2}} - W_{z_{i-1/2}} &= \\ &= \frac{1}{\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p}} \left[ u_{i+1} - u_i - \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p} \int_{z_{i+1/2}}^z (qu + f) d\zeta \right] - \frac{1}{\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p}} \left[ u_i - u_{i-1} - \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p} \int_{z_{i-1/2}}^z (qu + f) d\zeta \right] = \\ &= \frac{u_{i+1} - u_i}{\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p}} - \frac{\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p} \int_{z_{i+1/2}}^z (qu + f) d\zeta}{\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p}} + \frac{\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p} \int_{z_{i-1/2}}^z (qu + f) d\zeta}{\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p}}. \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

Подставляя (1.1.34) в (1.1.31) окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1} - u_i}{\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p}} - \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} [qu(z) + f(z)] dz &= \\ &= \frac{\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p} \int_{z_{i+1/2}}^z (qu + f) d\zeta}{\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{dz}{p}} + \frac{\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p} \int_{z_{i-1/2}}^z (qu + f) d\zeta}{\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p}}. \end{aligned} \quad (1.1.35)$$

Формулу (1.1.35) называют *основным тождеством* для получения разностных схем. Используя приближения входящих в эти тождества производных и интегралов, а также краевых условий, получают класс различных разностных схем. Их построение и исследование приведено в работах [Марчук, 1989, Марчук, Агошков, 1981].

Рассмотрим одну из простейших РС этого класса [Тихонов, Самарский, 1966]. Заменим в (1.1.31) интегралы и  $W$  разностными выражениями. Примем

$$\int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} qu(z)dz \approx u(z_i) \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} q(z)dz = hu_i d_i, \quad d_i := \frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} q(z)dz; \quad (1.1.36)$$

$$\int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} f(z)dz = h\varphi_i, \quad \varphi_i := \frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} f(z)dz.$$

Выразим производную  $\frac{du}{dz} = -\frac{W(z)}{p(z)}$  и проинтегрируем равенство на отрезке

$$z_{i-1} \leq z \leq z_i:$$

$$u_{i-1} - u_i = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{W(z)}{p(z)} dz.$$

Приближенно примем, что  $W(z) = const = W(z_{i-1/2}) = W_{i-1/2}$ , тогда будем иметь

$$u_{i-1} - u_i \approx W_{i-1/2} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p(z)},$$

следовательно,

$$W_{i-1/2} \approx a_i \frac{u_{i-1} - u_i}{h}, \quad a_i := \left[ \frac{1}{h} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p(z)} \right]^{-1}.$$

Заменяя интеграл по одной из формул

$$\frac{1}{h} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p(z)} \approx \frac{1}{p_{i-1/2}}, \quad \frac{1}{h} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dz}{p(z)} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p_{i-1}} + \frac{1}{p_i} \right),$$

получим  $a_i = p_{i-1/2}$ ,  $a_i = 2p_{i-1}p_i / (p_{i-1} + p_i)$  и т. д.

На основе формул (1.1.32) (1.1.31) получим разностную схему

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \left[ a_{i+1} \frac{v_{i+1} - v_i}{h} - a_i \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right] - d_i v_i = \varphi_i, \\ v_0 = u_0, \quad v_N = u_1. \end{cases} \quad (1.1.37)$$

которая имеет второй порядок аппроксимации. Она записывается одинаково во всех узлах сетки и для любых  $p(z)$ ,  $q(z)$ ,  $f(z)$ . Такие схемы называют *однородными*.

Обозначим разностную аппроксимацию дифференциального оператора

$$Lu \equiv -\frac{d}{dz} \left( p(z) \frac{du}{dz} \right) \text{ символом } \Lambda v \text{ (посредством формул типа (1.1.28), (1.1.37):}$$

$$L_h u_h \equiv -\frac{d}{dz} \left( p(z) \frac{du}{dz} \right) \Big|_h \square \Lambda v .$$

*Замечание.* При конечно-разностном решении задач геоэлектрики в формулах этого раздела нужно сделать подстановки:

$$u = E_x, p = 1/\mu, q = k^2/\mu$$

или

$$u = H_x, p = 1/\sigma, q = k^2/\sigma .$$

### 1.1.2. Нестационарные задачи

Электрические  $\mathbf{E}$  и магнитные  $\mathbf{H}$  поля удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$L \mathbf{V} + q \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{f}, \mathbf{V} = \mathbf{E}, q = \sigma; \mathbf{V} = \mathbf{H}, q = \mu. \quad (1.1.38)$$

$$L := \text{rot} \frac{1}{\eta} \text{rot}, \quad L_E := \text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot}, \quad L_H = \text{rot} \frac{1}{\sigma} \text{rot} .$$

В двумерном случае уравнениям (1.1.38 34) соответствуют уравнения

$$\text{div} \frac{1}{\eta} \text{grad} U - \frac{\mu\sigma}{\eta} \frac{\partial U}{\partial t} = -f_U, U = U(y, z); U = E_x, \eta = \mu; U = H_x, \eta = \sigma. \quad (1.1.39)$$

Соответствующие одномерные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\eta(z)} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\mu\sigma}{\eta} \frac{\partial U}{\partial t} = -f_U, U = U(z); U = E_x, \eta = \mu; U = H_x, \eta = \sigma. \quad (1.1.40)$$

Здесь мы ограничимся построением разностной схемы для дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial z} \left( p(z) \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} (z,t) \right) = f(z,t), z \in (0,H), t \in (0,T), \\ u|_{t=0} = u^{(0)}(z) \equiv g, z \in [0,H], \\ u|_{z=0} = u_0(t), u|_{z=H} = u_1(t), t \in [0,T]. \end{cases} \quad (1.1.41)$$

Примем  $\Lambda$  – разностный аналог дифференциального оператора  $L \left( Lu = -(pu')' \right)$  и  $v(t) = u_h(t)$ ,  $\varphi(t) := f_h(t)$  – сеточные функции, определенные в узлах пространственной сетки  $\omega$  по переменной  $z$

$$\omega_h = \{z_i \mid i = 0, 1, \dots, N, z_0 = 0, z_N = H\}.$$

Будем полагать, что оператор  $\Lambda$  не зависит от времени. Множество узлов на одном фиксированном времени будем называть слоем сетки.

Рассмотрим простейшие аппроксимации задачи (1.1.41) без учета краевых условий:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda v = \varphi, v|_{t=0} = g. \quad (1.1.42)$$

Наиболее употребительными разностными схемами являются схемы первого и второго порядка аппроксимации по  $t$ . Пусть  $\omega_\tau$  – множество узлов  $t_j$  равномерной сетки по переменной  $t$  с шагом  $\tau$ .

$$\omega_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, j = 0, 1, \dots, K; K\tau = T\}.$$

Множество узлов двумерной сетки  $\omega_{\tau h} = \omega_\tau \times \omega_h$  на одном фиксированном времени  $t_j$  будем называть *слоем* сетки. Каждому  $j$ -тому слою соответствует вектор  $v^j = \{v_i^j\}_{i=1}^N$ .

Разностные схемы, нарушающие непрерывную зависимость решения от начальных условий, называются *неустойчивыми*.

Разностные схемы, устойчивые лишь при некотором ограничении на отношение шагов по пространству и времени, называются *условно устойчивыми*.

Разностные схемы, устойчивые при произвольном соотношении шагов по пространству и времени, называются *абсолютно устойчивыми*.

А. *Явная схема*. Вычисления выполняются по формуле (рис. 1.1.1 (шаблон (а)))

$$\frac{v^{j+1} - v^j}{\tau} + \Lambda v^j = \varphi^j, \quad v^0 = g, \quad v^j = v(t_j).$$

Иначе

$$v^{j+1} = v^j - \tau \Lambda v^j + \tau \varphi^j$$

или

$$v^{j+1} = (E - \tau \Lambda)v^j + \tau E \varphi^j. \quad (1.1.43)$$

Здесь  $E$  – тождественный оператор  $\varphi^j \equiv E \varphi^j$ . Видим, что значения сеточной функции на  $(j+1)$ -м временном слое *явно* вычисляются по известным значениям на  $j$ -том слое по формуле (1.1.43). Действительно, на слоях  $j = 1, 2, \dots$  последовательно имеем:

$$v^1 = (E - \tau \Lambda)v^0 + \tau E \varphi^0,$$

$$v^2 = (E - \tau \Lambda)v^1 + \tau E \varphi^1 \dots$$

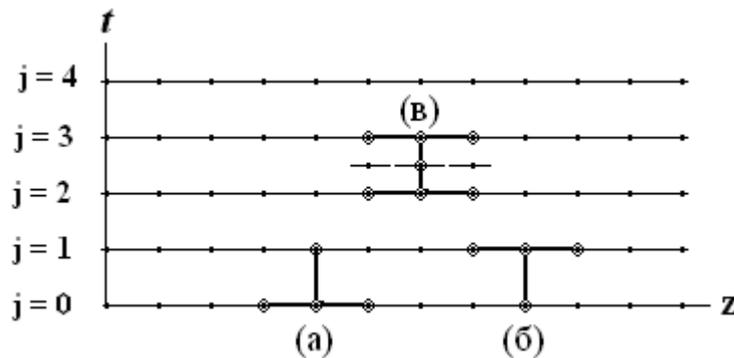


Рис. 1.1.1. Шаблоны схем:

(а) – явной, (б) – неявной, (в) – Кранка-Николсона.

Явная схема имеет первый порядок аппроксимации по переменной  $t$  и относится к числу условно устойчивых РС. Можно показать [Марчук, 1989], что она устойчива лишь при  $\tau/h^2 \leq 0.5$ .

Б. *Неявная схема*. Вычисления по неявной схеме выполняются в согласии с формулой (рис. 1.1.1 (шаблон (б)))

$$\frac{v^{j+1} - v^j}{\tau} + \Lambda v^{j+1} = \varphi^{j+1}, \quad v^0 = g.$$

В другой записи

$$v^{j+1} = (E + \tau\Lambda)^{-1} v^j + \tau(E + \tau\Lambda)^{-1} \varphi^{j+1}. \quad (1.1.44)$$

Для получения решения на  $(j+1)$ -м слое в неявной схеме нужно решать систему линейных алгебраических уравнений (1.1.44), считая известными  $v^j$  на  $j$ -м слое.

Можно показать, что неявная схемы имеет первый порядок аппроксимации по переменной  $t$  и абсолютно устойчива.

В. *Схема Кранка-Николсона* определяют соотношением (рис. 1.1.1, шаблон (в)):

$$\frac{v^{j+1} - v^j}{\tau} + \Lambda \frac{v^{j+1} + v^j}{2} = \varphi^{j+1/2}, \quad v^0 = g, \quad \varphi^{j+1/2} = f(t_j + \tau/2).$$

В иной записи получим

$$v^{j+1} = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda\right) v^j + \tau \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda\right)^{-1} \varphi^{j+1/2}. \quad (1.1.45)$$

Схема Кранка-Николсона имеет второй порядок аппроксимации по переменной  $t$  и абсолютно устойчива.

Разностные схемы типа (1.1.44)-(1.1.45) для эволюционных уравнений называют *двухслойными*.

Формулы (1.1.43)-(1.1.45) можно записать в обобщенном виде

$$v^{j+1} = T v^j + \tau S \varphi^{j+\alpha}.$$

Оператор  $T$  называют оператором шага, а  $S$  – оператором источника. Очевидно,

- в явной схеме  $T = E - \tau\Lambda$ ,  $S = E$ ,  $\alpha = 0$ ,
- в неявной схеме  $T = (E + \tau\Lambda)^{-1}$ ,  $S = T$ ,  $\alpha = 1$ ,

- в схеме Кранка-Николсона

$$T = \left( E + \frac{\tau}{2} \Lambda \right)^{-1} \left( E - \frac{\tau}{2} \Lambda \right), S = \left( E + \frac{\tau}{2} \Lambda \right)^{-1}, \alpha = \frac{1}{2}.$$

Если в некоторой норме выполняется неравенство

$$\|T\| \leq 1,$$

то это условие оказывается достаточным для устойчивости разностной схемы [Марчук, 1989].

*Задания.*

1. Показать, что схема Кранка-Николсона эквивалентна последовательному применению явной и неявной схемы с шагом  $\tau/2$  (см. рис. 1.1.1, шаблон (в)).

2. Показать, что схема Кранка-Николсона имеет второй порядок аппроксимации по  $t$ .  $\square$

### 1.1.3. Трехслойные разностные схемы.

Пусть нужно решить первую краевую задачу для волнового уравнения [Самарский, Гулин, 2003].

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, z \in (0, H), t \in (0, T), \\ u|_{t=0} = u^{(0)}(z) \equiv g(z), u_t|_{t=0} = u^{(1)}(z) \equiv s(z); \\ u|_{z=0} = u_0(t); u|_{z=H} = u_1(t). \end{cases}$$

Будем использовать ту же сетку  $\omega_{th} = \omega_\tau \times \omega_h$ , что и при решении задачи (1.1.41). Минимальный шаблон, на котором можно аппроксимировать одномерное волновое уравнение, – пятиточечный (рис. 1.1.2), содержащий три узла на соседних временных слоях. Простейшая система уравнений будет иметь вид

$$\frac{v_i^{j+1} - 2v_i^j + v_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2}, i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, K-1},$$

$$v_0^{j+1} = u_0(t_{j+1}); v_N^{j+1} = u_1(t_{j+1}), j = \overline{0, K-1}.$$

Решение  $v_i^{j+1}$  находится явно, если задано решение на двух предыдущих временных слоях:

$$v_i^{j+1} = 2v_i^j - v_i^{j-1} + \gamma(v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j), \quad \gamma = \frac{\tau^2}{h^2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}.$$

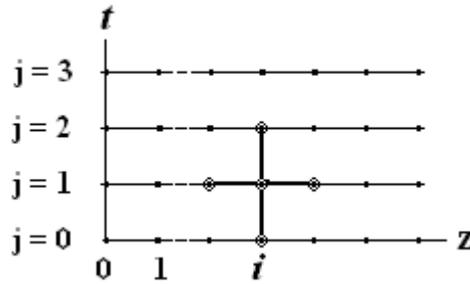


Рис. 1.1.2. Пятиточечный пространственно-временной шаблон

Однако на начальном этапе вычислений решение задано лишь при  $j = 0$

$$v_i^0 = g(z_i), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Простейшая аппроксимация второго начального условия

$$\frac{v_i^1 - v_i^0}{\tau} = u^{(1)}(z_i), \quad i = \overline{0, N}$$

имеет первый порядок по  $\tau$ , в то время как основное уравнение – второй.

Желательно, чтобы и начальное условие имело порядок не ниже второго.

Чтобы достичь желаемого результата, воспользуемся формулой Тейлора

$$\frac{u(z, \tau) - u(z, 0)}{\tau} = \frac{\partial u(z, 0)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(z, 0)}{\partial t^2} + O(\tau^2).$$

Согласно основного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(z, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2},$$

поэтому

$$\frac{\partial u(z, 0)}{\partial t} = \frac{u(z, \tau) - u(z, 0)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} + O(\tau^2).$$

Отсюда следует, что соотношение

$$\frac{v_i^1 - v_i^0}{\tau} = s(z_i) + \frac{\tau}{2} \frac{g(z_{i+1}) - 2g(z_i) + g(z_{i-1}))}{h^2}, \quad i = \overline{1, N-1}$$

аппроксимирует второе начальное условие со вторым порядком по  $\tau$ .

## **1.2. Вариационная формулировка задачи.**

Элементы теории вариационного исчисления (с точки зрения применения этого аппарата для решения задач математической физики) рассмотрены в учебнике [Канторович, Крылов, 1962; Михлин, 1968]. Применительно к задачам электродинамики полых систем эти проблемы обсуждаются в монографии В.В.Никольского [Никольский, 1967]. Вариационный подход к решению задач геоэлектрики рассмотрен в работах [Суворов, 1966, 1967; Coggon, 1971; Rodi 1976; Юдин, 1982]. Здесь они будут рассмотрены с точки зрения использования вариационных формулировок задач геоэлектрики для построения вычислительных схем применительно к классическим моделям среды.

Во введении к главе 1 уже отмечалось, что в одномерных задачах геоэлектрики электрическое и магнитное поле удовлетворяет с математической точки зрения одному и тому же уравнению вида (В). В этом разделе будут рассмотрены вариационные проблемы в контексте решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений этого типа. Тексты в большей части заимствованы из книги [Канторович, Крылов, 1962].

Сначала на простом примере будет проиллюстрирована связь между дифференциальной задачей, описывающей *стационарные* процессы, и соответствующей ей вариационной задачами. В заключительной части раздела эта проблема будет обсуждаться применительно к *эволюционным* задачам.

Этот материал будет полезен для понимания метода Ритца, лежащего в основе одного из методов приближенного решения задач.

Известно, что краевые задачи для дифференциальных уравнений эквивалентны вариационной задаче об отыскании минимума интеграла энергии, для которого это дифференциальное уравнение является уравнением Эйлера – Лагранжа. Наиболее известными методами, основанными на интегральных формулировках задач, являются методы Ритца и Б. Г. Галеркина. Здесь будут рассмотрено применение этих методов для обыкновенных дифференциальных уравнений, которые появляются при решении одномерных

задач геоэлектрики. Разобранные примеры послужат основой для понимания алгоритма решения задач и дальнейшего обобщения его на уравнения в частных производных.

### 1.2.1. Стационарные задачи.

Следуя А.В. Канторовичу и В.И.Крылову [1962], дадим основные понятия вариационного исчисления и приведем формулы, устанавливающие связь между вариационными задачами и дифференциальными уравнениями.

Пусть  $p(z)$  и  $q(z)$  являются вещественными функциями. Рассмотрим интеграл

$$I(u) = \int_{z_0}^{z_1} [p(z)u'^2 + q(z)u^2 + 2f(z)u] dz. \quad (1.2.3)$$

Он для всякой функции (кривой)  $u = u(z)$ , заданной для  $z_0 \leq z \leq z_1$ , ставит в соответствие определенное число. В этом случае говорят, что функция (отображение)  $I(u)$  представляет *функционал*.

А. Задача с закрепленными концами. Поставим следующую задачу: найти кривую  $u = u(z)$ , проходящую через заданные точки  $(z_0, u_0)$  и  $(z_1, u_1)$  и дающую минимальное значение интегралу  $I$ . Функцию, на которой достигается минимум интеграла (1.2.3), называют *экстремалью*.

Пусть  $u(z)$  – экстремаль и функция  $\eta(z) \in C^1(z_0, z_1)$ ,  $\eta(z_0) = \eta(z_1) = 0$ . Такие функции  $\eta(z)$  будем называть *допустимыми*.

*Необходимое условие экстремума функционала  $I(u)$* . Рассмотрим функцию  $u(z) + \alpha\eta(z)$ . На концах она удовлетворяет тем же граничным условиям, что и  $u(z)$ , а при малых  $\alpha$  близка к ней. Ясно, что интеграл  $I(u + \alpha\eta)$  должен получать бóльшие значения, чем  $I(u)$ :

$$I(u + \alpha\eta) \geq I(u).$$

Будем рассматривать интеграл  $I(u + \alpha\eta)$  как функцию от  $\alpha$ . Ясно, что при  $\alpha = 0$

интеграл достигает минимальное значение<sup>1</sup>. Согласно *необходимому* условию экстремума,

$$\left. \frac{dI(u + \alpha\eta)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (1.2.4)$$

*Определение.* Выражение  $dI(u + \alpha\eta)/d\alpha$  при  $\alpha = 0$  называют первой вариацией интеграла  $I(u)$  и обозначают  $\delta I$ . □

Итак, для того чтобы функция  $u$  давала минимум интегралу  $I(u)$ , *необходимо*, чтобы первая вариация его равнялась нулю:  $\delta I = 0$ , какова бы ни была допустимая функция  $\eta(z)$ .

Вычислим производную  $dI(u + \alpha\eta)/d\alpha$ :

$$\begin{aligned} \delta I &= \left\{ \frac{d}{d\alpha} \int_{z_0}^{z_1} [p(z)(u' + \alpha\eta')^2 + q(z)(u + \alpha\eta)^2 + 2f(z)(u + \alpha\eta)] dz \right\}_{\alpha=0} = \\ &= \left\{ \int_{z_0}^{z_1} [2p(z)(u' + \alpha\eta')\eta' + 2q(z)(u + \alpha\eta) + 2f(z)\eta] dz \right\}_{\alpha=0} = \\ &= \int_{z_0}^{z_1} [2p(z)u'\eta' + 2q(z)u\eta + 2f(z)\eta] dz. \end{aligned}$$

Так как  $\eta(z_0) = \eta(z_1) = 0$ , то посредством интегрирования по частям найдем:

$$\int_{z_0}^{z_1} 2pu'\eta' dz = [2pu'\eta]_{z=z_0}^{z=z_1} - 2 \int_{z_0}^{z_1} \frac{d}{dz} (pu') \eta(z) dz = -2 \int_{z_0}^{z_1} \frac{d}{dz} (pu') \eta(z) dz. \quad (1.2.5)$$

Окончательно, первая вариация  $\delta I$  функционала  $I(u)$  равна

$$\delta I = -2 \int_{z_0}^{z_1} \left[ \frac{d}{dz} (pu') - qu - f \right] \eta(z) dz. \quad (1.2.6)$$

Величина  $\delta I$  должна быть равна нулю для любой допустимой функции  $\eta(z)$ . Это возможно только в том случае, если функция  $u(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Пусть  $u(z)$  не обязательно является функцией, дающей интегралу экстремум. При малых  $\alpha$  соотношение  $dI(u + \alpha\eta)/d\alpha|_{\alpha=0} \cdot \alpha$  дает главную часть приращения интеграла  $I(u)$  при переходе от функции  $u(z)$  к  $u(z) + \alpha\eta(z)$ .

$$Lu \equiv \frac{d}{dz}(pu') - qu - f = 0. \quad (1.2.7)$$

Итак, мы установили, что функция  $u(z)$ , доставляющая минимум интегралу  $I$ , необходимо должна удовлетворять уравнению (1.2.7)<sup>3</sup>.

*Определение.* Уравнение, которому удовлетворяют экстремальные кривые, называется *уравнением Эйлера* для данной вариационной проблемы.

Для задачи о минимуме интеграла (1.2.3) – уравнением Эйлера служит уравнение (1.2.7)<sup>4</sup>. Можно показать, что оператор  $L$  является самосопряженным дифференциальным оператором второго порядка.

Достаточное условие экстремума функционала  $I(u)$ . Общее решение уравнения (1.2.7) содержит в своем составе две произвольные постоянные; поэтому через заданные две точки  $(z_0, u_0)$  и  $(z_1, u_1)$  можно, вообще говоря, провести одну кривую, удовлетворяющую уравнению. Является ли эта функция решением экстремальной задачи? Для утвердительного ответа на это вопрос потребуется наложить ограничения на коэффициенты  $p(z)$  и  $q(z)$

<sup>2</sup> В самом деле, если левая часть уравнения (1.2.5) отлична от нуля при некотором значении  $z = z^*$ , то, так как все нужные функции предполагаются непрерывными, она будет сохранять знак в некоторой окрестности этой точки  $(z^* - h, z^* + h)$ . Тогда, построив функцию  $\eta(z)$ , положительную в этом промежутке и равную нулю вне его, и притом непрерывную вместе с производной, мы получили бы, очевидно, что для нее  $\delta I = 0$ , что противоречит полученному выше необходимому условию.

<sup>3</sup> Наше рассуждение требовало, чтобы функция  $u(z)$  имела вторую производную. Некоторым видоизменением его можно установить, что то же заключение верно и если  $u(z)$  предполагать просто дифференцируемой.

<sup>4</sup> Существует общий метод получения уравнения Эйлера для вариационных задач. Для так называемой общей простейшей задачи вариационного исчисления о минимуме интеграла

$$I = \int_{z_0}^{z_1} F(z, u, u') dz$$

уравнение Эйлера вычисляется по формуле:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Так как в интеграле (1.2.3)

$$F(z, u, u') = p(z)u'^2 + q(z)u^2 + 2f(z)u,$$

то производные равны

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial u'} = 2(pu')', \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 2qu + 2f.$$

На основании (1.2.18) - (1.2.19) получим уравнение Эйлера

$$(pu')' - qu - f = 0,$$

совпадающее с (1.2.7).

дифференциального уравнения (1.2.7). Пусть в рассматриваемом промежутке функция  $p(z)$  положительна, а  $q(z)$  неотрицательна:

$$p(z) > 0, q(z) \geq 0, z_0 \leq z \leq z_1. \quad (1.2.8)$$

При ограничениях (1.2.8) можно показать, что решение уравнения (1.2.7), проходящее через данные точки  $(z_0, u_0)$  и  $(z_1, u_1)$ , дает абсолютный экстремум интегралу (1.2.3) [Канторович, Крылов, 1962, с. 263].

Итак, в задаче с закрепленными концами функция  $u(z)$ , которая сообщает экстремум функционалу, является решением первой *краевой задачи*

$$\begin{cases} (pu')' - qu = f, \\ u|_{z=z_0} = u_0, u|_{z=z_1} = u_1. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

если выполняются условия (1.2.8).

Б. Задача со свободными концами. Пусть некоторая кривая  $u(z)$  дает экстремум  $I(u)$  по сравнению со всеми близкими кривыми

$$u_\alpha(z) = u(z) + \alpha\eta(z)$$

со свободными концами, когда, в отличие от задачи с закрепленными концами,  $\eta(z)$  не обязательно обращается в нуль в точках  $z_0$  и  $z_1$ . Необходимое условие экстремума снова приводит к соотношению

$$\delta I = 2 \int_{z_0}^{z_1} [p(z)u'\eta' + q(z)u\eta + f(z)\eta] dz = 0. \quad (1.2.10)$$

В этом случае двойная подстановка в формуле (1.2.6) не равна нулю, поэтому после интегрирование по частям, получаем

$$\int_{z_0}^{z_1} pu'\eta' dz = p(z_1)u'(z_1)\eta(z_1) - p(z_0)u'(z_0)\eta(z_0) - \int_{z_0}^{z_1} \frac{d}{dz}(pu')\eta(z) dz$$

и выражение для первой вариации принимает вид

$$\delta I = -2 \int_{z_0}^{z_1} \left[ \frac{d}{dz}(pu') - qu - f \right] \eta(z) dz + 2p(z_1)u'(z_1)\eta(z_1) - 2p(z_0)u'(z_0)\eta(z_0).$$

В силу произвольности  $\eta(z)$  функция  $u(z)$  удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dz}(pu') - qu - f = 0, \quad (1.2.11)$$

а также краевым условиям второго рода

$$u'|_{z=z_0} = 0, u'|_{z=z_1} = 0. \quad (1.2.12)$$

Условия типа (1.2.12), относящиеся к числу необходимых условий экстремума, часто называют *естественными краевыми условиями* (подробнее о них будет сказано при рассмотрении метода Ритца).

Итак, в задаче со свободными концами функция  $u(z)$ , которая сообщает экстремум функционалу, является решением *второй краевой задачи* вида (1.2.11), (1.2.12).

Справедливо также и обратное утверждение:

если  $u(z)$  – решение задачи (1.2.11), (1.2.12), то кривая  $u(z)$  сообщает экстремальное значение функционалу вида (1.2.3) в задаче со свободными концами.

В. Задача с разрывными коэффициентами. Пусть  $z \in [0, H]$  и функции  $p(z)$  и  $q(z)$  непрерывны и имеют внутри интервала разрывы первого рода в точках  $\{z_i\}_{i=1}^N$ . Тогда интеграл (1.2.3) представим в виде конечной суммы

$$I(u) = \int_0^H [p(z)u'^2 + q(z)u^2 + 2f(z)u] dz = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{z_{i-1}}^{z_i} [p(z)u'^2 + q(z)u^2 + 2f(z)u] dz.$$

Его первая вариация (с учетом (1.2.6)) равна

$$\delta I(u) = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left[ \frac{d}{dz}(pu') - qu - f \right] \eta(z) dz + \sum_{i=1}^{N+1} [p(z_i + 0)u'(z_i) - p(z_i - 0)u'(z_i)] \eta(z_i) + p(H)u'(H)\eta(H) - p(0)u'(0)\eta(0).$$

В более краткой записи имеем

$$\delta I(u) = \int_0^H \left[ \frac{d}{dz}(pu') - qu - f \right] \eta(z) dz + \sum_{i=1}^N [pu']_{z_i} \eta(z_i) + (pu')\eta(z) \Big|_0^H, \quad (1.2.13)$$

где

$$[pu']_{z=z_i} := [p(z_i + 0)u'(z_i + 0) - p(z_i - 0)u'(z_i - 0)].$$

В этом случае первая вариация будет равна нулю, если экстремаль удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dz}(pu') - qu - f = 0, \quad (1.2.14)$$

*естественным* краевым условиям на границах разрыва коэффициентов

$$[pu']_{z_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2.15)$$

и условиям на внешних границах интервала

$$(pu')\eta|_0^H = 0. \quad (1.2.16)$$

Если на одной или обеих границах заданы краевые условия первого рода, то это краевое *не относится к разряду естественных*, поэтому нужно искать экстремум функционала в классе функций, удовлетворяющих этим краевым условиям. В противном случае на этой границе экстремаль будет удовлетворять *естественному условию* (условию Неймана)  $u'|_{z=\zeta} = 0$ , на границах  $\zeta = 0$  или  $\zeta = H$ .

Итак, мы приходим к возможности одни и те же задачи трактовать либо с позиций задач для дифференциальных уравнений (уравнений Эйлера), либо с позиций задач вариационного исчисления об отыскании функций, доставляющих экстремум некоторым функционалам. В последнем случае можно ограничиться требованием наличия у  $u(z)$  лишь кусочно-непрерывных производных, в то время как при решении дифференциальной задачи требуется существование  $u''(z)$ . Если экстремали будут иметь непрерывные вторые производные, то решение вариационной задачи будут одновременно удовлетворять уравнению Эйлера.

*Пример.* Одномерные задачи МТЗ обычно решаются относительно компонент электрического  $E_x(z)$  ( $u(z) = E_x(z)$ ) или магнитного  $H_x(z)$  ( $u(z) = H_x(z)$ ) поля. В таблице 1.2.1 приведены формулы расчета функций  $p(z)$ ,  $q(z)$  и естественных краевых условий (1.2.15) для  $E_x(z)$  и  $H_x(z)$  в квазистационарном приближении. Несмотря на то, что коэффициент  $q(z)$

является мнимой величиной, все математические выкладки, относящиеся к отысканию первой вариации функционала, остаются без изменения. Отличие состоит только в том, что вместо минимума интеграла находят его стационарное значение. Полагают, что решение вариационной задачи существует, единственно и функционал *стационарен* на решении соответствующей ему дифференциальной задачи [Никольский, 1967, с. 24

Таблица 1.2.1

$u(z)$	$p(z)$	$q(z)$	$pu'$	$[pu'] = 0$
$E_x(z)$	$1/\mu(z)$	$-i\omega\sigma(z)$	$\mu^{-1}E'_x = -i\omega H_y$	$[H_y] = 0$
$H_x(z)$	$1/\sigma(z)$	$-i\omega\mu(z)$	$\sigma^{-1}H'_x = -i\omega E_y$	$[E_y] = 0$

- экстремаль  $E_x$  автоматически обеспечивает непрерывность компоненты  $H_y$ ,
- экстремаль  $H_x$  автоматически обеспечивает непрерывность составляющей  $E_y$ . □

### 1.2.2. Нестационарные задачи.

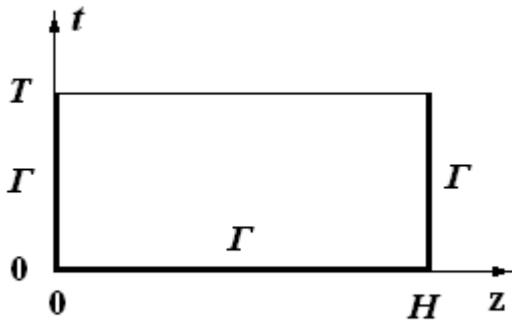
Рассмотрим интеграл

$$I(u) = \int_{z_0}^{z_1} \left[ p(z)u'^2 + 2g(z)u \frac{\partial u}{\partial t} + 2f(z)u \right] dz, \quad (1.2.17)$$

предполагая, что производная  $\frac{\partial u}{\partial t}$  рассматривается в фиксированный момент времени. Пусть  $G := p(z)u'^2 + 2g(z)u \frac{\partial u}{\partial t} + 2f(z)u$ , тогда, согласно общему правилу построения уравнения Эйлера (см. выше сноску), получим

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial G}{\partial u'} - \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial z} (2pu') - \left( 2g \frac{\partial u}{\partial t} + 2f \right) = 0.$$

Таким образом, функция, на которой первая вариация равна нулю, удовлетворяет дифференциальному уравнению



$$\frac{\partial}{\partial z} \left( p \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right) - g \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = f(z,t). \quad (1.2.18)$$

В эволюционных задачах для обеспечения единственности их решения требуется задать дополнительные условия (начальные и граничные) на так называемой параболической границе  $\Gamma$

(см. рис. в тексте). Потребуем, например, чтобы на части  $0 \leq z \leq H$  границы  $\Gamma$  искомые функции, среди которых ищется минимум интеграла (1.2.17), удовлетворяли начальному условию

$$u(z,t)|_{t=0} = w(z), \quad (1.2.19)$$

краевым условиям

$$u(z,t)|_{z=0} = s_1(t), \quad u(z,t)|_{z=H} = s_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2.20)$$

а также условиям согласования дополнительных данных в угловых точках параболической границы  $\Gamma^5$

$$s_1(0) = w(0), \quad s_2(0) = w(H). \quad (1.2.21)$$

Тогда можно надеяться, что решения дифференциальной задачи (1.2.18) – (1.2.21) будут одновременно решением экстремальной задачи (1.2.17) с дополнительными ограничениями (1.2.19) – (1.2.21).

### 1.3. Метод Рунца и метод Галеркина

#### 1.3.1. Основная идея метода Рунца и метода Галеркина

Изложим алгоритмы, лежащие в основе методов Рунца и Галеркина, основываясь на книге [Канторович, Крылов, 1962].

##### *А. Идея метода Рунца.*

Рассмотрим пока общую задачу о минимуме двойного интеграла

$$I(u) = \int_{z_0}^{z_1} F(z, u, u') dz \quad (1.3.1)$$

<sup>5</sup> Отметим, что приведенные в примере условия не относятся к числу естественных краевых условий.

На функциях, удовлетворяющих краевому условию первого рода

$$u(z_0) = u_0, u(z_1) = u_1. \quad (1.3.2)$$

Пусть  $I(u^*) = m$  – значение минимума на точном решении  $u^*(z)$  задачи (1.3.1)–(1.3.2). Функции  $\bar{u}(z)$ , удовлетворяющие условию (1.3.2), будем называть допустимыми. Пусть  $\bar{u}(z)$  – допустимая функция и значение интеграла  $I(\bar{u})$  весьма близко к  $m$ . Тогда можно надеяться, что  $\bar{u}(z)$  будет хорошим приближением к истинному решению задачи. Если  $\bar{u}_n(z)$  – последовательность допустимых функций и  $I(\bar{u}_n) \rightarrow m$ , то такая сходящаяся к решению последовательность, называется минимизирующей.

Ритцем был предложен метод, который обеспечивает построение функции  $\bar{u}(z)$  и дает значение интеграла  $I$ , близкое к минимальному. Суть алгоритма состоит в том, что рассматривается семейство допустимых функций, зависящих от нескольких параметров<sup>6</sup>

$$u = \Phi(z, a_1, a_2, \dots, a_N). \quad (1.3.3)$$

Среди них найдем ту, которая дает интегралу (1.3.1) наименьшее значение. Для этого подставим в интеграл (1.3.1) выражение (1.3.3). После дифференцирования и интегрирования  $I$  превратится в функцию  $N$  переменных  $a_1, a_2, \dots, a_N : I = I(a_1, a_2, \dots, a_N)$ . В минимуме этой функции числа  $a_m$  должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial a_m} = 0, m = 1, \dots, N. \quad (1.3.4)$$

В результате решения системы (1.3.4) получим значения параметров  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_N$ , дающие функции  $I(a_1, a_2, \dots, a_N)$  абсолютный минимум и приближенное решение

---

<sup>6</sup> Как правило, приближенное решение ищут в виде линейной комбинации

$\bar{u}_N(z) = \sum_{m=1}^N a_m \varphi_m(z)$  функций  $\varphi_m(z)$  из полной системы  $\{\varphi_m(z)\}$  ( $m = 1, \dots, N, \dots$ ) с

неопределенными коэффициентами  $a_m$ .

$$\bar{u}(z) = I(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_N). \quad (1.3.5)$$

Обычно в интеграле  $I$  подынтегральное выражение является многочленом второй степени относительно  $u$ ,  $u'$ , а семейство (1.3.3) линейным образом зависит от параметров  $a_1, a_2, \dots, a_N$ . Благодаря этому уравнения (1.3.4) оказываются системой линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим ряд семейств функций

$$u = \Phi_N(z, a_1, a_2, \dots, a_N), \quad N = 1, 2, \dots \quad (1.3.6)$$

Очевидно, с увеличением  $N$  семейства расширяются, так как появляются дополнительные параметры. Пусть  $\bar{u}_N(z)$  есть  $N$ -е приближение – функция, дающая наименьшее значение интегралу  $I$  по сравнению со всеми функциями  $N$ -го семейства. Ясно, что последовательные минимумы идут не возрастая:

$$I(\bar{u}_1) \geq I(\bar{u}_2) \geq \dots \quad (1.3.7)$$

*Определение.* Системы семейств (1.3.6) обладает свойством *относительной полноты*, если для любой функции  $u \in C^1(z_0, z_1)$ , удовлетворяющей граничному условию (1.3.2) и  $\forall \varepsilon > 0$  можно будет указать такое  $N(\varepsilon)$  и такую функцию среди  $N$ -го семейства (1.3.6)

$$u_N^*(z) = \Phi_N(z, a_1^*, \dots, a_N^*),$$

что повсюду на интервале  $(z_0, z_1)$  будут справедливы неравенства

$$|u_N^* - u| < \varepsilon; \quad \left| (u_N^*)' - u' \right| < \varepsilon. \quad (1.3.8')$$

□

Пусть система функций (1.3.6) является полной в указанном выше смысле. Покажем, что выполнение этого условия достаточно для сходимости последовательности интегралов к точному минимуму. Действительно, вследствие непрерывности  $F$ , разность

$$F\left(z, u_N^*, (u_N^*)'\right) - F\left(z, u^*, (u^*)'\right)$$

будет сколь угодно мала в области  $D$ , а тогда и разность интегралов этих функций будет сколь угодно мала, т. е.

$$I(\bar{u}_N) = I(u^*) = \int_{z_0}^{z_1} \left[ F\left(z, u_N^*, (u_N^*)'\right) - F\left(z, u^*, (u^*)'\right) \right] dz < \varepsilon',$$

где  $\varepsilon'$  – сколь угодно малое положительное число. Далее,  $u_N^*(z)$  есть одна из функций  $N$ -го семейства (1.3.6), функция же  $\bar{u}_N(x, y)$  дает наименьшее значение интегралу по сравнению со всеми функциями этого семейства, поэтому мы должны иметь  $I(\bar{u}_N) \leq I(u_N^*)$  или

$$I(u^*) \leq I(\bar{u}_N) \leq I(u_N^*) < I(u^*) + \varepsilon'$$

и так как  $\varepsilon'$  — сколь угодно мало, соотношение (1.3.8) установлено.

Отметим, что нарушение требования полноты может привести к грубой ошибке, так как приближения по методу Ритца даже при любых даже весьма больших  $N$  будут сильно отличаться от точного результата.

*Б. Идея метода Б. Г. Галеркина<sup>7</sup>..*

Пусть нужно найти решение задачи:

$$\begin{cases} L(u(z)) = 0, & z_0 < z < z_1, \\ u(z_0) = u(z_1) = 0, \end{cases}$$

где  $L$  – дифференциальный оператор. Будем искать ее приближенное решение в виде

$$\bar{u}_N(z) = \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m(z),$$

где  $\varphi_m(z)$  ( $m = 1, \dots, N$ ) – первые  $N$  линейно-независимых функций из полной системы  $\{\varphi_m(z)\}$  ( $m = 1, \dots, N, \dots$ ), удовлетворяющих однородным краевым условиям, а  $c_m$  – неопределенные коэффициенты. Функция  $\bar{u}_N(z)$  будет давать точное решение уравнения, если  $L(\bar{u}) \equiv 0$ . Это требование равносильно требованию ортогональности  $L(\bar{u})$  ко всем функциям системы  $\{\varphi_m(z)\}$  ( $m = 1, \dots, N, \dots$ ). Для построения приближенного решения используется только  $N$

---

<sup>7</sup> Метод приобрёл популярность после исследований Б.Г. Галёркина (1915), хотя до Галеркина метод применял И. Бубнов (1913) для решения задач теории упругости. Поэтому иногда этот метод называют *методом Бубнова—Галёркина*. Теоретически метод был обоснован советским математиком М.В.Келдышем (1942).

функций можем удовлетворить  $N$  условиям ортогональности, которые приводят к системе уравнений (линейной в случае линейного оператора  $L$ )

$$\int_{z_0}^{z_1} L(\bar{u}(z))\varphi_n(z)dz \approx \int_{z_0}^{z_1} L\left(\sum_{m=1}^N c_m \varphi_m(z)\right)\varphi_n(z)dz = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

относительно коэффициентов  $a_m$ . После их вычисления приходим к требуемому приближенному решению  $\bar{u}_N$ .

Метод Галеркина является универсальным и выгодно отличается от метода Ритца, так как в нем нигде не использована связь дифференциального уравнения с вариационными задачами. Он может быть с успехом применен к дифференциальным уравнениям различных типов. Метод Галеркина находится в тесной связи с методом Ритца. В некоторых задачах они эквивалентны в том смысле, что приводят к одной и той же системе уравнений и, следовательно, к тому же самому приближенному решению.

### 1.3.2. Применение методов Ритца и Галеркина.

Рассмотрим первую краевую задачу

$$L(u) = (pu')' - qu - f = 0, \quad (1.3.9)$$

$$u(0) = u_0; \quad u(l) = u_1. \quad (1.3.10)$$

с самосопряженным дифференциальным оператором  $L$ . Без потери общности будем полагать, что<sup>8</sup> краевые условия однородные, т.е.

$$u(0) = 0; \quad u(l) = 0. \quad (1.3.10')$$

и

$$p(z) > 0; \quad q(z) \geq 0 \quad (0 \leq z \leq l). \quad (1.3.11)$$

Найдем решение этой задачи по методу Ритца. Этой задаче соответствует задача о минимуме интеграла

$$I(u) = \int_0^l [p(z)u'^2 + q(z)u^2 + 2f(z)u] dz \quad (1.3.12)$$

---

<sup>8</sup> Если бы это было не так, мы могли бы добиться этого, вводя в уравнение (1.3.9) вместо  $u$  новую неизвестную функцию  $w$ , определенную равенством  $u = w + \frac{z}{l} u_1 + \frac{l-z}{l} u_0$ .

при тех же условиях (1.3. 10'). Рассмотрим систему функций  $\{\varphi_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ , удовлетворяющую следующим условиям<sup>9</sup>:

- $\varphi_m \in C^1[0, l]$ ,
- линейно независима,
- удовлетворяет однородным краевым условиям.

Приближенное решение по методу Рунге будем искать в семействе линейных комбинаций функций  $\varphi_m(z)$ , т. е. среди функций вида

$$u_N = \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m. \quad (1.3.13)$$

Подставляя выражение  $u_n$  в интеграл (1.3.12), получим:

$$\begin{aligned} I(u_N) &= \int_0^l [p(z)u_N'^2 + q(z)u_N^2 + 2f(z)u_N] dz = \\ &= \int_0^l \left[ p \left( \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m' \right)^2 + q \left( \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m \right)^2 + 2f \sum_{m=1}^N c_m \varphi_m \right] dz = \\ &= \sum_{m,s=1}^N \alpha_{m,s} c_m c_s + 2 \sum_{m=1}^N \beta_m c_m, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

где

$$\alpha_{m,s} = \alpha_{s,m} = \int_0^l [p \varphi_m' \varphi_s' + q \varphi_m \varphi_s] dz, \quad \beta_m = \int_0^l f \varphi_m dz. \quad (1.3.15)$$

В (1.3.14) при возведении суммы в квадрат воспользовались тождеством<sup>10</sup>

$$\left( \sum_{m=1}^N c_m g_m \right)^2 = \left( \sum_{m=1}^N c_m g_m \right) \left( \sum_{s=1}^N c_s g_s \right) = \sum_{k,s=1}^N g_k g_s c_k c_s = \sum_{m,s=1}^N \theta_{m,s} c_m c_s, \quad \theta_{m,s} = g_m g_s = \theta_{s,m}.$$

<sup>9</sup> Примеры таких функций  $\varphi_m = \sin \frac{\pi m z}{l}$  или  $\varphi_m = (l-z)z^m$ , ( $m=1, \dots, N$ ).

<sup>10</sup> В частности, при  $n=2$  и  $v_2 = \sum_{m=1}^2 c_m g_m = c_1 g_1 + c_2 g_2$ ,

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \left( \sum_{m=1}^2 c_m g_m \right)^2 = g_1 g_1 c_1 c_1 + g_1 g_2 c_1 c_2 + g_2 g_1 c_2 c_1 + g_2 g_2 c_2 c_2 = \sum_{k,s=1}^2 g_k g_s c_k c_s = \sum_{k,s=1}^2 \theta_{k,s} c_k c_s = \\ &= \theta_{1,1} c_1 c_1 + \theta_{1,2} c_1 c_2 + \theta_{2,1} c_2 c_1 + \theta_{2,2} c_2 c_2 = \theta_{1,1} c_1^2 + 2\theta_{2,1} c_2 c_1 + \theta_{2,2} c_2^2. \end{aligned}$$

Систему уравнений для определения постоянных  $c_k$  получаем в результате дифференцирования (1.3.14) по  $c_s$ . Запишем ее в двух видах<sup>11</sup>

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I(u_N)}{\partial c_s} = \int_0^l (pu'_N \varphi'_s + qu_N \varphi_s + f \varphi_s) dz = 0, \quad (s=1,2,\dots,N) \quad (1.3.16a)$$

или

$$\sum_{m=1}^N \alpha_{m,s} c_m + \beta_s = 0 \quad (s=1,\dots,N). \quad (1.3.16)$$

Пусть  $c_m^{(N)}$  ( $m=1,\dots,N$ ) – решение системы уравнений (1.3.16). Тогда приближенное решение  $u_N$  дает сумма

$$u_N(z) = \sum_{m=1}^N c_m^{(N)} \varphi_m(z). \quad (1.3.17)$$

Можно показать, что это решение системы уравнений (1.3.16) всегда определено и притом единственным образом.

Заметим, что системе уравнений (1.3.16) можно придать еще другой вид. Интегрируя первый член из равенства (1.3.16a) по частям и пользуясь тем, что  $\varphi_m$  и  $u_N$  равны нулю на концах, найдем

$$\int_0^l pu'_N \varphi'_s dz = [pu'_N \varphi_s]_0^l - \int_0^l (pu'_N)' \varphi_s dz = - \int_0^l (pu'_N)' \varphi_s dz.$$

Заменим полученным выражением соответствующий член в (1.3.16a), изменим знак и воспользуемся кратким обозначением (1.3.9). В результате этих операций придадим системе (1.3.16a) более простой вид

$$\int_0^l \left( \left[ (pu'_N)' - qu_N - f \right] \varphi_s \right) dz = \int_0^l L(u_N) \varphi_s dz = 0, \quad (s=1,2,\dots,N).$$

В такой форме уравнения представляют не что иное, как уравнения метода Галеркина, записанное для рассматриваемой задачи по общему правилу, указанному в предыдущем примере. Таким образом, для задачи с

<sup>11</sup> При  $n=2$  и  $s=1$   $\partial v_2 / \partial c_1 = \partial v_2 / \partial c_1 (c_1 g_1 + c_2 g_2) = g_1$ ,

$\frac{\partial v_2^2}{\partial c_1} = \frac{\partial}{\partial c_1} (\theta_{1,1} c_1^2 + 2\theta_{2,1} c_1 c_2 + \theta_{2,2} c_2^2) = 2\theta_{1,1} c_1 + 2\theta_{2,1} c_2 = 2(\theta_{1,1} c_1 + \theta_{2,1} c_2) = 2 \sum_{m=1}^2 \theta_{m,1} c_m$ .

самосопряженным дифференциальным оператором оба метода приводят к одному и тому же приближенному решению.

Еще раз отметим, что метод Галеркина не использует связь граничной задачи с вариационной, поэтому может быть применен к решению задач с несамосопряженными операторами.

### 1.3.3. Метод конечных элементов. Примеры базисных функций и алгоритмов численного решения задач<sup>12</sup>.

Метод конечных элементов (МКЭ) основан на идее аппроксимации непрерывной функции дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей, называемых конечными *элементами*. Приближенное решение в МКЭ ищется в виде разложения по базису из функций (кусочно-линейных, кусочно-полиномиальных и т.д.) каждая из которых отлична от нуля лишь в некоторой достаточно малой области (имеет конечный носитель). Исследуемая геометрическая область разбивается на элементы, на которых неизвестная функция аппроксимируется базисными (пробными) функциями. Причем эти пробные функции должны удовлетворять граничным условиям, налагаемым самой задачей.

Сущность МКЭ состоит в следующем [Самарский, Гулин, 2003].

1. Дифференциальная задача рассматривается как операторное уравнение

$$Lu = f \quad (*)$$

в некотором бесконечномерном пространстве  $F$  таком, что  $u \in F$ .

2. Приближенное решение  $u^h$  задачи ищется в виде разложения по базису  $\varphi_1^h, \varphi_2^h, \dots, \varphi_{N_h}^h$  конечномерного пространства  $F_h \subset F$  размерности  $N_h$

$$u^h(z) = \sum_{m=1}^{N_h} a_m \varphi_m^h(z), \quad (**)$$

где  $a_m$  – искомые коэффициенты разложения. Сходимость метода означает, что

$$\|u^h - u\|_F \rightarrow 0 \text{ при } N_h \rightarrow \infty.$$

---

<sup>12</sup> В этом разделе иногда на графиках будем использовать переменную  $x$  вместо переменной  $z$ .

Такой выбор базиса приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f}^h, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{N^h}), \quad \mathbf{f}^h = (f_1^h, f_2^h, \dots, f_{N^h}^h)$$

относительно коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_{N^h}$  разложения (\*\*). Матрица  $A$  системы имеет ленточную структуру, правая часть  $\mathbf{f}^h$  конструируется из правой части уравнения (\*) и краевых условий дифференциальной задачи.

Численное решение  $u^h$ , полученное посредством МКЭ, как правило, не обладает требуемой гладкостью, поэтому посредством МКЭ, находят не классическое, а *обобщенное решение* задачи (\*).

Дадим понятие *обобщенного решения* на примере задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv -\frac{d^2u}{dz^2} + k^2(z)u(z) = f(z), & a < z < b, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (\#)$$

Пусть функции  $v, w \in W_2^1(a, b)$ . Их скалярное произведение равно

$$\langle v, w \rangle = \int_a^b v(z)w(z)dz$$

Будем считать, что функции  $u, g \in C_0^2(a, b)$ , т.е. – дважды непрерывно дифференцируемые и равны нулю на концах интервала. Умножим обе части уравнения в (#) на  $g(z)$  и проинтегрируем по интервалу  $(a, b)$

$$-\int_a^b \frac{d^2u}{dz^2} g(z)dz + \int_a^b k^2(z)u(z)g(z)dz = \int_a^b f(z)g(z)dz.$$

Преобразуем первый интеграл:

$$\int_a^b \frac{d^2u}{dz^2} g(z)dz = \frac{du}{dz} g(z) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{du}{dz} \frac{dg}{dz} dz = - \int_a^b \frac{du}{dz} \frac{dg}{dz} dz.$$

Двойная подстановка вне интеграла равна нулю, так как  $g(a) = g(b) = 0$ ,

поэтому имеем равенство

$$\int_a^b \frac{du}{dz} \frac{dg}{dz} dz + \int_a^b k^2(z)u(z)g(z)dz = \int_a^b f(z)g(z)dz$$

или в компактной записи

$$\langle u', g' \rangle + \langle k^2 u, g \rangle = \langle f, g \rangle.$$

*Определение.* Обобщенным решением задачи (#) называют функцию  $u(z) \in W_2^1(a, b)$ , удовлетворяющую равенству

$$\langle u', v' \rangle + \langle k^2 u, v \rangle = \langle f, v \rangle$$

для любых  $v(z) \in W_2^1(a, b)$ .  $\square$

Ниже будут рассмотрены конкретные примеры базисных функций, зависящих от шага дискретизации  $h$ , и обсуждены их аппроксимирующие свойства [Марчук, 1989]. Будут также приведены примеры численного решения задач посредством МКЭ на основе использования метода Ритца.

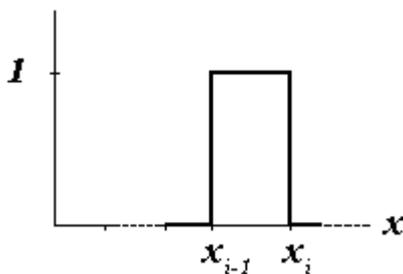
### А. Кусочно-постоянные финитные базисные функции.

Рассмотрим наиболее простые функции с конечным носителем – кусочно-постоянные (ступенчатые) функции. Пусть  $D = (z_0, z_N) \subset \square$ . Введем на  $D$  сетку

$$z_0 < z_1 < \dots < z_{N-1} < z_N, h_m = z_m - z_{m-1}, h = \max h_m (m = 1, \dots, N),$$

Разбив тем самым отрезок  $[z_0, z_N]$  на  $N = N_h$  подобластей  $D_i = (z_{i-1}, z_i) (i = 1, \dots, N)$  (конечных элементов). Зададим на каждом  $(z_{i-1}, z_i)$  характеристическую функцию (рис. 1.3.1). Набор таких функций примем в качестве базисных при решении соответствующей задачи. Линейную оболочку функций обозначим  $F_h$ . Линейная комбинация этих функций вида (1.3.13) есть ступенчатая функция (рис. 1.3.2).

Отметим некоторые свойства этих базисных функций.  $\varphi_1^h, \varphi_2^h, \dots, \varphi_{N_h}^h$ .



$$\varphi_m^h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_{m-1}, x_m], \\ 0, & x \notin (x_{m-1}, x_m]. \end{cases}$$

Рис. 1.3.1. Кусочно-постоянные базисные функции

1. Эти функции линейно независимы, причем

$$\langle \varphi_i^h, \varphi_m^h \rangle = \int_{z_0}^{z_N} \varphi_i^h(z) \varphi_m^h(z) dz = \begin{cases} h_i, & i = m, \\ 0, & i \neq m. \end{cases}$$

$$L := 1 \quad a := 0.5 \quad f(y, a) := \frac{1}{y^2 + a^2}$$

$$N := 10 \quad i := 0..10 \quad h := \frac{L}{N} \quad x_i := i \cdot h \quad u_i := f(x_i, a)$$

$$\phi(x, x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{if } x_1 \leq x < x_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad u_h(y) := \sum_{k=1}^N \left[ \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \cdot \phi(y, x_{k-1}, x_k) \right]$$

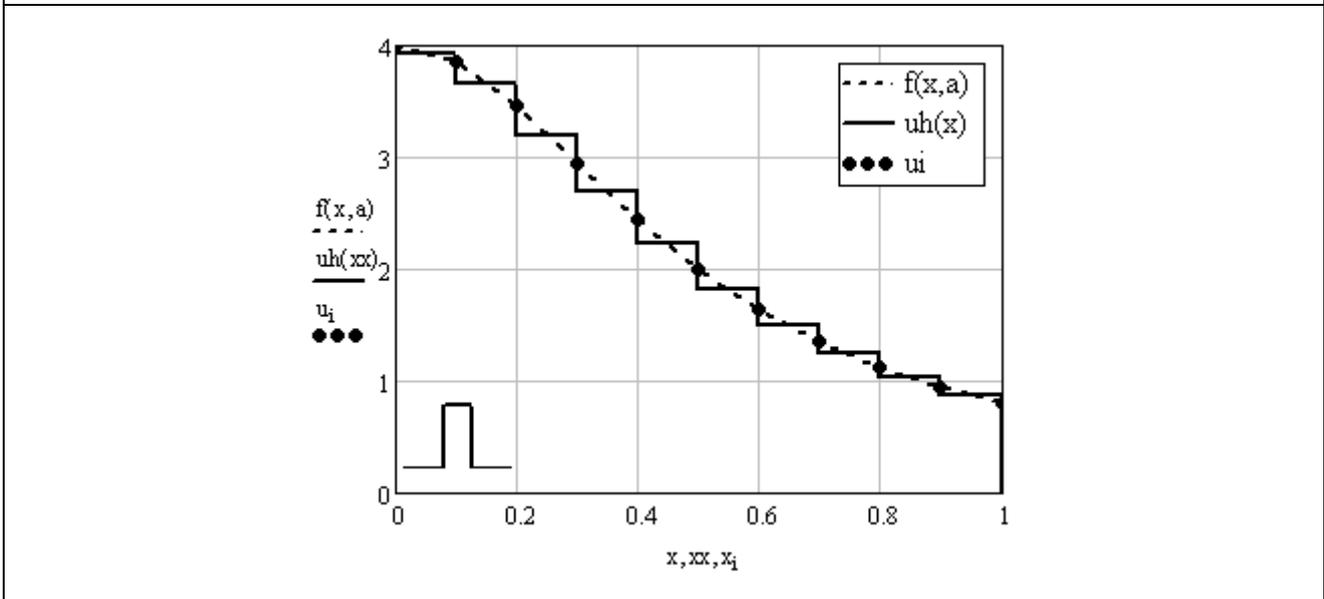


Рис. 1.3.2. Аппроксимация кусочно-постоянными базисными функциями. В верхней части приведены операторы на языке MATCAD, в нижней – графики функции  $f(y, a) = 1/(x^2 + a^2)$ ,  $a = 0.5$  (пунктир) и одна из возможных аппроксимаций ее линейной комбинацией ступенчатых функций (непрерывная линия), точки соответствуют сеточной функции  $u_i = u(x_i)$ .

2. Для любой функции  $u(z) \in W_p^1(D)$  существует такая линейная комбинация  $u_I(z) \in F_h$ , что

$$\inf_{v \in F_h} \|u - v\|_{L_p(D)} \leq \|u - u_I\|_{L_p(D)} \leq h \|u\|_{W_p^1(D)},$$

где нормы  $L_p(D), W_p^1(D)$  задаются выражениями

$$\|u\|_{W_p^1(D)} = \|u\|_{L_p(D)} + \left\| \frac{du}{dz} \right\|_{L_p(D)}, \quad \|u\|_{L_p(D)} = \left( \int_D |u(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L_\infty(D)} = \sup_{x \in D} |u(x)|.$$

## Б. Кусочно-линейные финитные базисные функции.

Кусочно-линейные финитные базисные функции получили наиболее широкое применение. Пусть функции  $u(z)$  определены на конечной области  $D = (a, b)$ . Построим для них подходящие аппроксимации. Для этого на  $[a, b] = \bar{D}$  сетке

$$\varpi = \{a = z_0 < z_1 < \dots < z_{N-1} < z_N = b; h_m = z_m - z_{m-1}; h = \max h_m (m = 1, 2, \dots, N)\} \quad (1.3.18)$$

поставим в соответствие каждому узлу сетки функцию (см. рис.1.3.3)

$$\varphi_i^h(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{i-1}}{h_i}, & z \in (z_{i-1}, z_i), \\ \frac{z_{i+1} - z}{h_{i+1}}, & z \in (z_i, z_{i+1}), \\ 0, & z \notin (z_{i-1}, z_{i+1}), i = 1, 2, \dots, N-1, \end{cases} \quad (1.3.19)$$

$$\varphi_0^h(z) = \begin{cases} \frac{z_1 - z}{h_1}, & z \in (z_0, z_1), \\ 0, & z \notin (z_0, z_1), \end{cases} \quad \varphi_N^h(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{N-1}}{h_N}, & z \in (z_{N-1}, z_N), \\ 0, & z \notin (z_{N-1}, z_N). \end{cases} \quad \dots \dots \dots (1.3.20)$$

Эти функции линейно независимы и отличны от нуля на интервале порядка  $2h$ . Множество всех линейных комбинаций функций  $\varphi_m^h(z)$  (линейную оболочку) обозначим  $F_h$ . Функции из  $F_h$  являются непрерывными кусочно-линейными функциями ( $F_h \subset C(D)$ ), обладающими суммируемой с любой конечной степенью первой производной. ( $F_h \subset W_2^1(D)$ ).

Если взять  $v^h(z) = \sum_{m=0}^N c_m \varphi_m^h(z) \in F_h$ , то  $v^h(z_m) = c_m$ . Пусть  $u(z) \in W_2^1(D)$ . Тогда

можно показать [Марчук, 1980], что существует такая функция

$$u_I(z) \in F_h \equiv W_2^{1,h}(D), \text{ что } \|u - u_I\|_{L^2(D)} \leq h^2 \left\| \frac{d^2 u}{dx^2} \right\|_{L^2(D)} \leq h^2 \|u\|_{W_2^2(D)},$$

$$\|u - u_I\|_{W_2^2(D)} \leq M \cdot h \left\| \frac{d^2 u}{dz^2} \right\|_{L^2(D)} \leq M \cdot h \|u\|_{W_2^2(D)},$$

где постоянная  $M$  не зависит от  $h$  и от  $u(z)$ . Если возможно отождествить  $u(z)$  с непрерывной функцией, то полезно принять

$$u^h(z) = \sum_{m=0}^N u(z_m) \varphi_m^h(z).$$

Программа расчета функций  $\varphi_i^h(x)$  на языке MathCAD:

$$\phi h(x, xim, xi, xip) := \begin{cases} \frac{x - xim}{xi - xim} & \text{if } x \geq xim \wedge x < xi \\ \frac{xip - x}{xip - xi} & \text{if } x \geq xi \wedge x < xip \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

В программе использованы идентификаторы:

$$xim \equiv x_{i-1}, xip \equiv x_{i+1}, xi \equiv x_i, \phi h(\cdot) \equiv \varphi_i^h(\cdot)$$

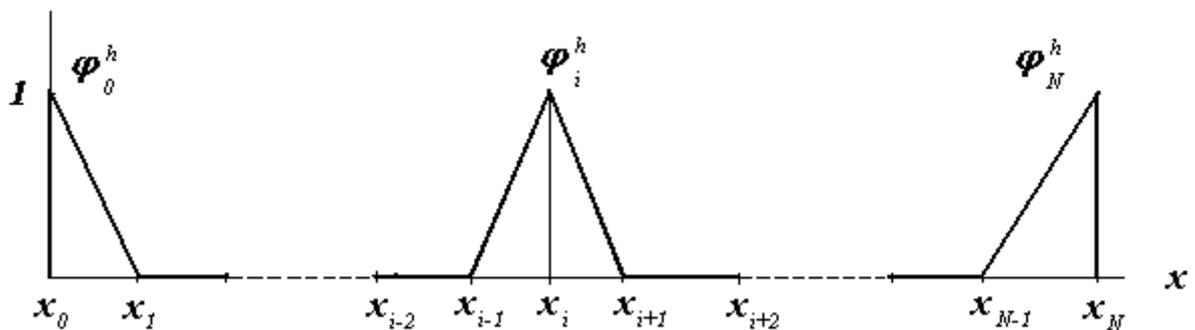


Рис. 1.3.3. Кусочно-линейные базисные функции

Графики функций  $u^h(z)$ ,  $u(z_m)$  и  $u(z)$  изображены на рис. 1.3.4. В верхней части приведены операторы на языке MathCAD, в нижней – графики функции  $f(z, a) = 1/(z^2 + a^2)$ ,  $a = 0.5$  (пунктир) и одна из возможных аппроксимаций ее линейной комбинацией кусочно-линейных функций (непрерывная линия), точки соответствуют сеточной функции  $u_i = u(z_i)$ . Можно показать, что последовательность подпространств  $F_h$  полна в каждом из пространств  $L^2(D)$ ,  $W_2^1(D)$ ,  $C(D)$  [Марчук, 1980].

Программа на языке MathCAD

$$f(y, a) := \frac{1}{y^2 + a^2} \quad N := 4 \quad i := 0..N \quad h := \frac{L}{N} \quad x_i := i \cdot h \quad h = 0.25 \quad u_i := f(x_i, a)$$

$$\phi_{\Delta k}(x, x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \text{if } x_1 \leq x < x_2 \\ \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} & \text{if } x_2 \leq x < x_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi_{0\Delta}(x, x_0, x_1) := \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{if } x \leq x_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \phi_{N\Delta}(x, x_{N-1}, x_N) := \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} & \text{if } x > x_{N-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$uh_{\Delta}(x) := \left[ \sum_{k=1}^{N-1} \left( u_k \cdot \phi_{\Delta k}(x, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) \right) \right] + u_0 \cdot \phi_{0\Delta}(x, x_0, x_1) + u_N \cdot \phi_{N\Delta}(x, x_{N-1}, x_N)$$

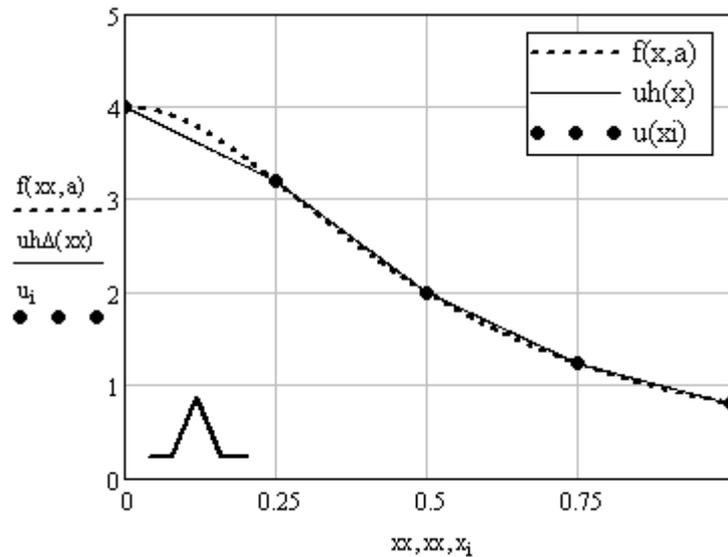


Рис. 1.3.4. Аппроксимация кусочно-линейными базисными функциями.

Пример 1. Пусть нужно решить задачу

$$\begin{cases} Lu \equiv -\frac{d}{dz} \left( p(z) \frac{du}{dz} \right) + g(z)u(z) = f(z), & a < z < b, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (1.3.21)$$

где  $p(z) \geq p_0 > 0$ ,  $g(z) \geq 0$ ,  $p(z)$ ,  $g(z)$ ,  $f(z)$  – кусочно-непрерывные функции на  $[a, b]$  с возможными точками разрыва первого рода. Рассматриваемая краевая задача является задачей с главными граничными условиями, поэтому необходимо выбрать  $F_h$  таким, чтобы

любая функция  $v^h(z) = \sum_{i=0}^N c_i \phi_i^h(z)$  удовлетворяла однородным краевым условиям. Условия

$v^h(0) = v^h(b) = 0$  приводят к тому, что  $c_0 = c_N = 0$ , то в качестве подпространства  $F_h$  необходимо брать всевозможные линейные комбинации вида  $v^h(z) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \varphi_i^h(z)$ . При решении задачи методом Галеркина можно воспользоваться функциями (1.3.19)–(1.3.20).

*Пример 2.* Рассмотрим более подробно численное решение следующей одномерной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv \frac{d^2 u}{dz^2} - k^2(z)u(z) = 0, & 0 < z < l, \\ u(0) = u^{(0)}, u(H) = u^{(1)}. \end{cases}$$

по методу Ритца.

*Решение.* Будем использовать сетку, узлы которой совпадают с границами  $z_0 = 0, z_1 = h_1, z_2 = h_1 + h_2, z_3 = h_1 + h_2 + h_3 = l$ . Рассматриваемая задача совпадает с задачей (1.3.9)–(1.3.10), в которой следует положить  $f = 0, p = 1, g = k^2$ . Введем обозначения

$$q_{1,m}(z) := 1 - \frac{\bar{z}}{h_m}, \quad q_{2,m}(z) := \frac{\bar{z}}{h_m}, \quad \bar{z} = z - z_{m-1}, \quad m = 1, 2, 3$$

и запишем базисные функции (1.3.19), (1.3.20) в более удобном для дальнейших преобразований виде

$$\begin{aligned} \varphi_0^{kh}(z) &= \begin{cases} q_{1,1}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_1), \\ 0, & \bar{z} \geq h_1, \end{cases} & \varphi_1^{kh}(z) &= \begin{cases} q_{2,1}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_1), \\ q_{1,2}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_2), \\ 0, & z \notin [z_0, z_2), \end{cases} \\ \varphi_2^{kh}(z) &= \begin{cases} q_{2,2}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_2), \\ q_{1,3}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_3), \end{cases} & \varphi_3^{kh}(z) &= \begin{cases} q_{2,3}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_3), \\ 0, & z > z_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Формула (1.3.13) определяет линейную интерполяцию решения на интервале  $[0, l]$  (см. рис. 1.2.4). Согласно формул (1.3.21), полагая  $c_k = u_k$ , (1.3.13) может быть записана следующим образом:

$$u^h(z) = \sum_{m=0}^3 u_m \varphi_m^{kh}(z) = \begin{cases} u_0 q_{1,1}(z) + u_1 q_{2,1}(z), & 0 \leq z < h_1, \\ u_1 q_{1,2}(z) + u_2 q_{2,2}(z), & h_1 \leq z < h_1 + h_2, \\ u_2 q_{1,3}(z) + u_3 q_{2,3}(z), & h_1 + h_2 \leq z < h_1 + h_2 + h_3. \end{cases}$$

Представим функционал (1.3.11) в виде суммы интегралов по всем интервалам

$$I(u^h) = \int_0^l \left\{ \left[ (u^h)' \right]^2 + k^2(z) (u^h)^2 \right\} dz = \sum_{m=1}^3 \int_{z_{m-1}}^{z_m} \left\{ \left[ (u^h)' \right]^2 + k_m^2 (u^h)^2 \right\} dz, \quad k_m^2 = h_m^{-1} \int_{x_{m-1}}^{x_m} k^2(z) dz.$$

Запишем интеграл  $I(u^h)$  в локальных координатах

$$I(u^h) = \int_0^{h_1} \left[ (u_0 q'_{1,1} + u_1 q'_{2,1})^2 + k_1^2 (u_0 q_{1,1} + u_1 q_{2,1})^2 \right] d\bar{z} + \int_0^{h_2} \left[ (u_1 q'_{1,2} + u_2 q'_{2,2})^2 + k_2^2 (u_1 q_{1,2} + u_2 q_{2,2})^2 \right] d\bar{z} + \int_0^{h_3} \left[ (u_2 q'_{1,3} + u_3 q'_{2,3})^2 + k_3^2 (u_2 q_{1,3} + u_3 q_{2,3})^2 \right] d\bar{z}$$

и примем

$$Q_m := \int_0^{h_m} q_{1,m}^2(\bar{z}) d\bar{z} = \int_0^{h_m} q_{2,m}^2(\bar{z}) d\bar{z}, \quad Q_{12m} := \int_0^{h_m} q_{1,m} q_{2,m}(\bar{z}) d\bar{z},$$

$$Q'_m := \int_0^{h_m} q_{1,m}'^2(\bar{z}) d\bar{z}, \quad Q'_{12,m} := \int_0^{h_m} q'_{1,m} q'_{2,m}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad m = 1, 2.$$

Простые вычисления дают

$$Q_m := \int_0^{h_m} q_{2,m}^2(\bar{z}) d\bar{z} = \int_0^{h_m} \left( \frac{\bar{z}}{h_m} \right)^2 d\bar{z} = \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \bar{z}^2 d\bar{z} = \frac{1}{h_m^2} \frac{\bar{z}^3}{3} \Big|_0^{h_m} = \frac{h_m}{3},$$

$$Q_{12m} := \int_0^{h_m} q_{1,m} q_{2,m}(\bar{z}) d\bar{z} = \int_0^{h_m} \left( 1 - \frac{\bar{z}}{h_m} \right) \frac{\bar{z}}{h_m} d\bar{z} = \frac{h_m}{6},$$

$$Q'_m := \int_0^{h_m} q_{2,m}'^2(\bar{z}) d\bar{z} = \int_0^{h_m} \left[ \left( \frac{\bar{z}}{h_m} \right)' \right]^2 d\bar{z} = \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} d\bar{z} = \frac{1}{h_m},$$

$$Q'_{12,m} := \int_0^{h_m} q'_{1,m} q'_{2,m}(\bar{z}) d\bar{z} = \int_0^{h_m} \left( 1 - \frac{\bar{z}}{h_m} \right)' \left( \frac{\bar{z}}{h_m} \right)' d\bar{z} = -\frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} d\bar{z} = -\frac{1}{h_m}.$$

Заметим, что величины  $u_0$  и  $u_3$  заданы, а неизвестными величинами являются  $u_1, u_2$ . С

учетом сделанных обозначений, относительно  $u_1, u_2$  получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial I(u_n)}{\partial u_1} = u_0 (Q'_{12,1} + k_1^2 Q_{12,1}) + u_1 \left[ (Q'_1 + k_1^2 Q_1) + (Q'_2 + k_2^2 Q_2) \right] + u_2 \left[ (Q'_{12,2} + k_2^2 Q_{12,2}) \right] = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial I(u_n)}{\partial u_2} = u_1 (Q'_{12,2} + k_2^2 Q_{12,2}) + u_2 \left[ (Q'_2 + k_2^2 Q_2) + (Q'_3 + k_3^2 Q_3) \right] + u_3 \left[ (Q'_{12,3} + k_3^2 Q_{12,3}) \right] = 0. \end{cases}$$

Подстановка  $Q_m = h_m/3$ ,  $Q'_m = 1/h_m$ ,  $Q_{12m} = h_m/6$ ,  $Q'_{12,m} = -1/h_m$  в эту систему приводит ее к виду:



$$\frac{u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1}}{h^2} = 0,$$

совпадающий с конечно-разностной аппроксимацией уравнения  $u'' = 0$  на этой сетке.  $\square$

### В. Кусочно-экспоненциальные финитные базисные функции.

Поставим в соответствие каждому частичному интервалу  $(x_m, x_{m+1})$  постоянное значение  $k_m$ , связанное с коэффициентами  $p(x)$  и  $g(x)$  (например, положить  $k_m = \sqrt{\bar{g}}$ ,  $\bar{g} := h_m^{-1} \int_{x_{m-1}}^{x_m} g(x)/p(x)dx$ ,  $h_m = x_m - x_{m-1}$ ) и каждому узлу сетки (1.3.18) одну из следующих функций

$$\varphi_0^{kh}(z) = \begin{cases} \frac{sh[k_1(z - z_0)]}{sh(k_1 h_1)}, & z \in (z_0, z_1), \\ 0, & z \notin (z_0, z_1), \end{cases} \quad \varphi_N^{kh}(z) = \begin{cases} \frac{sh[k_N(z - z_{N-1})]}{sh(k_N h_N)}, & z \in (z_{N-1}, z_N), \\ 0, & z \notin (z_{N-1}, z_N). \end{cases} \quad (1.3.22)$$

$$\varphi_m^{kh}(z) = \begin{cases} \frac{sh[k_m(z - z_{m-1})]}{sh(k_m h_m)}, & z \in (z_{m-1}, z_m), \\ \frac{sh[k_{m+1}(z_{m+1} - z)]}{sh(k_{m+1} h_{m+1})}, & z \in (z_m, z_{m+1}), \\ 0, & z \notin (z_{m-1}, z_{m+1}), m = 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (1.3.23)$$

Графики этих функций изображены на рис. 1.3.5б. В верхней части рисунка приведены операторы на языке MATHCAD, в нижней – графики функции  $u(x) = 10 \exp(-kx)$  (непрерывная линия) и одна из возможных аппроксимаций ее линейной комбинацией кусочно-линейных (точки серого цвета) и кусочно-экспоненциальных функций (точки); жирные точки соответствуют сеточной функции  $u_i = u(x_i)$ .

Графики функций  $u^h(z) = \sum_{m=0}^N u(z_m) \varphi_m^h(z)$ ,  $u(z_m)$ ,  $u(z)$  изображены на рис.

1.3.6.

*Замечание 1.* Пусть на полубесконечном интервале нужно решить задачу

$$\begin{cases} Lu \equiv -\frac{d^2u}{dz^2} + k^2(z)u(z) = 0, 0 < z < \infty, \\ u(0) = u^0; u(z) \rightarrow 0 \text{ } z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.3.24)$$

где  $k(z)$  – кусочно-постоянная функция:

a)

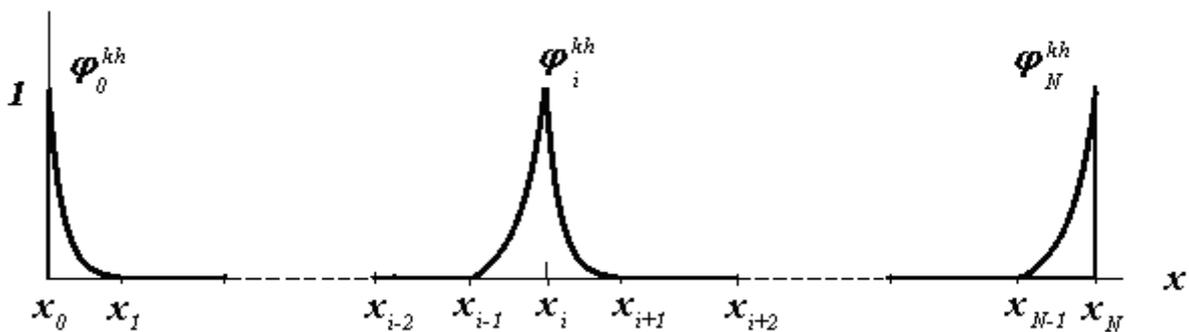
Программа расчета функций  $\varphi_i^{kh}(x)$  на языке MathCAD:

$$\text{phi}(x, x_{im}, x_i, x_{ip}, k_i, k_{ip}) := \begin{cases} \frac{\sinh[k_i \cdot (x - x_{im})]}{\sinh[k_i \cdot (x_i - x_{im})]} & \text{if } x \geq x_{im} \wedge x < x_i \\ \frac{\sinh[k_{ip} \cdot (x_{ip} - x)]}{\sinh[k_{ip} \cdot (x_{ip} - x_i)]} & \text{if } x \geq x_i \wedge x < x_{ip} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

В программе использованы идентификаторы:

$$x_{im} \equiv x_{i-1}, x_{ip} \equiv x_{i+1}, x_i \equiv x_i, \text{phi}(\cdot) \equiv \varphi_i^{kh}(\cdot)$$

б)



в)

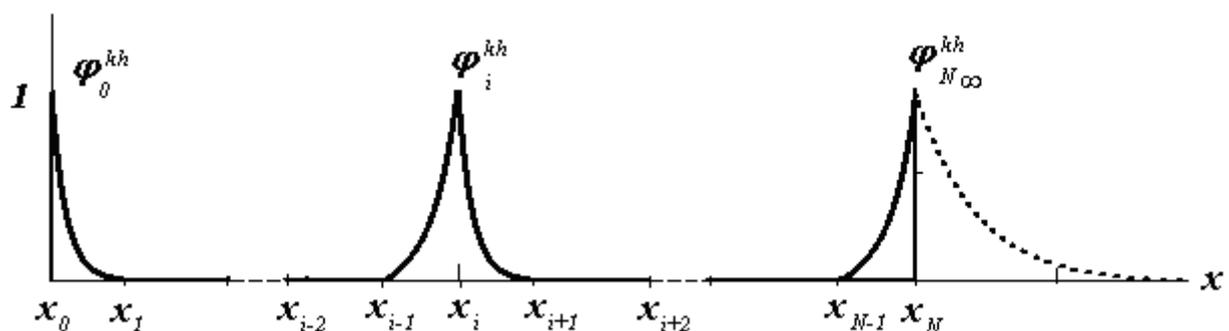


Рис. 1.3.5. Кусочно-экспоненциальные базисные функции:  
а) программа на языке MathCAD, б) базисные функции на конечном интервале,  
в) базисные функции на полубесконечном интервале.

a)

$$N := 4 \quad i := 0..N \quad h := \frac{L}{N} \quad z_i := i \cdot h \quad k := 5 \quad fexp(x, k) := 10 \cdot \exp(-x \cdot k) \quad uu_i := fexp(z_i, k)$$

$$\phi\Delta k_m(x, x_1, x_2, x_3, k) := \begin{cases} \frac{\sinh[k \cdot (x - x_1)]}{\sinh[k \cdot (x_2 - x_1)]} & \text{if } x_1 \leq x < x_2 \\ \frac{\sinh[k \cdot ((x_3 - x_2) - (x - x_2))]}{\sinh[k \cdot (x_3 - x_2)]} & \text{if } x_2 \leq x < x_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi 0 \Delta k(x, x_0, x_1, k) := \begin{cases} \frac{\sinh[k \cdot ((x_1 - x_0) - x)]}{\sinh[k \cdot (x_1 - x_0)]} & \text{if } x \leq x_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi N \Delta k(x, x_{Nm1}, x_N, k) := \begin{cases} \frac{\sinh(x - x_{Nm1})}{\sinh(x_N - x_{Nm1})} & \text{if } x > x_{Nm1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u\phi k(x, k) := \left[ \sum_{m=1}^{N-1} (uu_m \cdot \phi\Delta k_m(x, z_{m-1}, z_m, z_{m+1}, k)) \right] + uu_0 \cdot \phi 0 \Delta k(x, z_0, z_1, k) + uu_N \cdot \phi N \Delta k(x, z_{N-1}, z_N, k)$$

$$u\phi k 0(x) := \left[ \sum_{k=1}^{N-1} (uu_k \cdot \phi\Delta k(x, z_{k-1}, z_k, z_{k+1})) \right] + uu_0 \cdot \phi 0 \Delta k(x, z_0, z_1) + uu_N \cdot \phi N \Delta k(x, z_{N-1}, z_N)$$

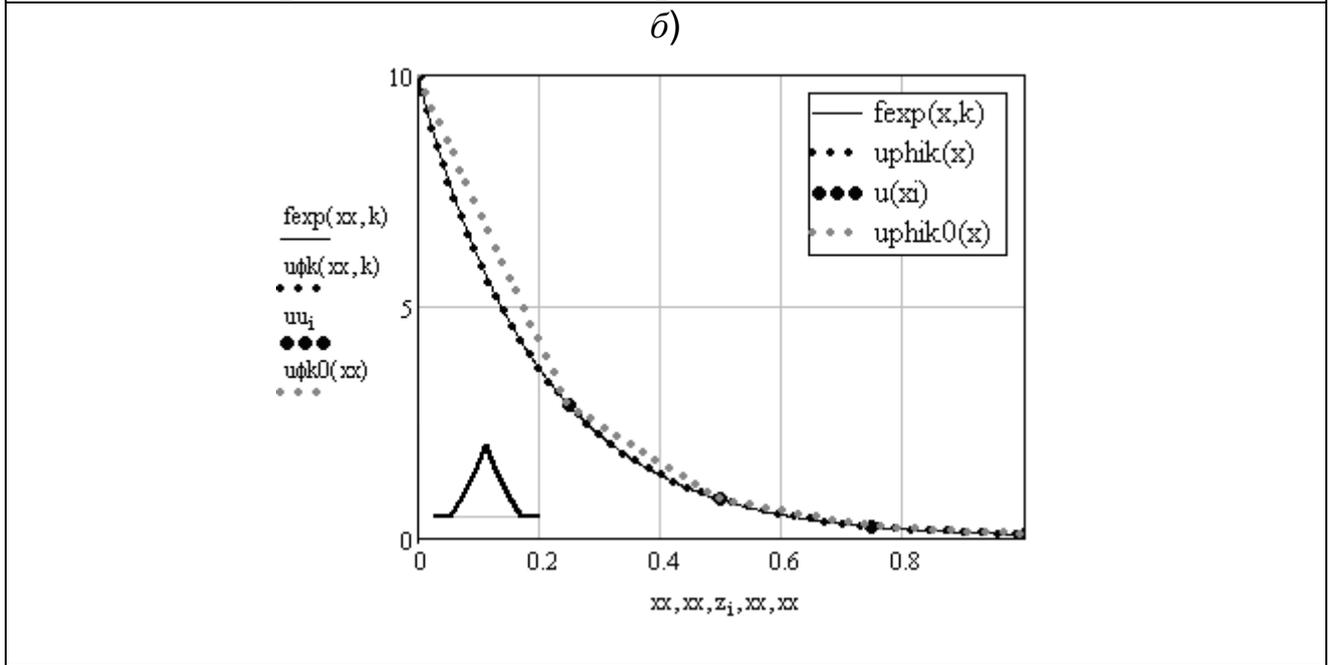


Рис. 1.3.6. Сравнение аппроксимаций кусочно-линейными и кусочно-экспоненциальными базисными функциями: а) операторы языка MathCAD, реализующие вычисления, б) графики функции  $u(x) = 10 \exp(-k x)$  (сплошная линия черного цвета), аппроксимация ее кусочно-экспоненциальными (точки черного цвета) и кусочно-линейными (точки серого цвета) базисными функциями (при  $N = 5$ ), черными жирными точками изображены значения функции в узлах сетки.

$$k(z) = \begin{cases} k_m, & z \in (z_{m-1}, z_m), m = 1, 2, \dots, N, \\ k_{N+1}, & z \in (z_N, \infty). \end{cases} \quad (1.3.24_1)$$

Вместо базисной функции  $\varphi_N^{kh}(x)$  будем использовать функцию  $\varphi_{N\infty}^{kh}(z)$ , определяемую формулой

$$\varphi_{N\infty}^{kh}(z) = \begin{cases} \frac{sh[k_N(z - z_{N-1})]}{sh(k_N h_N)}, & z \in (z_{N-1}, z_N), \\ e^{-k_{N+1}(z - z_N)}, & z \in (z_N, \infty). \end{cases} \quad (1.3.25)$$

Функция  $\exp[-k_{N+1}(z - z_N)]$  получена посредством тождественных преобразований выражения  $sh[k_{m+1}(z_{m+1} - z)]/sh(k_{m+1}h_{m+1})$  из (1.3.23) и последующего предельного перехода. Выполним преобразования

$$\frac{sh[k_{m+1}(z_{m+1} - z)]}{sh(k_{m+1}h_{m+1})} = \frac{sh[k_{m+1}(z_{m+1} - z_m - z + z_m)]}{sh(k_{m+1}h_{m+1})} = \frac{sh[k_{m+1}(h_{m+1} - (z - z_m))]}{sh(k_{m+1}h_{m+1})}$$

и примем  $\alpha_{m+1} := k_{m+1}h_{m+1}$ ,  $\beta_{m+1} := k_{m+1}\bar{z}$ ,  $\bar{z} := z - z_m$ . Тогда

$$\frac{sh(\alpha_{m+1} - \beta_{m+1})}{sh\alpha_{m+1}} = \frac{sh\alpha_{m+1} \cdot ch\beta_{m+1} - ch\alpha_{m+1} \cdot sh\beta_{m+1}}{sh\alpha_{m+1}} = ch\beta_{m+1} - cth\alpha_{m+1} \cdot sh\beta_{m+1}.$$

При  $m = N$ ,  $h_{N+1} \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_{N+1} \rightarrow \infty$  и  $cth\alpha_{N+1} \rightarrow 1$ , поэтому

$$\begin{aligned} ch\beta_{N+1} - cth\alpha_{N+1} \cdot sh\beta_{N+1} &\rightarrow ch\beta_{N+1} - sh\beta_{N+1} = \\ &= (e^{\beta_{N+1}} + e^{-\beta_{N+1}})/2 - (e^{\beta_{N+1}} - e^{-\beta_{N+1}})/2 = e^{-\beta_{N+1}} \equiv \exp(-k_{N+1}\bar{x}). \end{aligned}$$

График функции  $\exp[-k_{N+1}(z - z_N)]$  изображен пунктиром в правой части рис. 1.3.5в.

*Замечание 2.* При  $k_m \rightarrow 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$  и конечных значениях  $h_m$  функции (1.3.22)–(1.3.23) стремятся к соответствующим кусочно-линейным функциям (1.3.19)–(1.3.20), так как  $sh(k_m \bar{z})/sh(k_m h_m) \approx k_m \bar{z}/(k_m h_m) = \bar{z}/h_m$ .

*Задание.* Показать, что на интервале  $x \in [0, h]$  функции

$$q_1(x) = \frac{sh[k(h - z)]}{sh(kh)}, \quad \text{и} \quad q_2(x) = \frac{sh(kz)}{sh(kh)}$$

являются решением задач

$$\begin{cases} u'' - k^2 u = 0, & z \in (0, h), \\ u|_{x=0} = 1, & u|_{x=h} = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u'' - k^2 u = 0, & z \in (0, h), \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{x=h} = 1 \end{cases}$$

соответственно.  $\square$

Легко убедиться, что на каждом частичном интервале кусочно-линейные функции  $\varphi_m$  удовлетворяют одномерному уравнению Лапласа  $\Delta_1 \varphi_m = d^2 \varphi_m / dz^2 = 0$ , а функции  $\varphi_m^{kh}(z)$  – одномерному уравнению Гельмгольца  $\Delta_1 \varphi_m - k_m^2 \varphi_m = 0$ .

### Г. Пример численного решения задачи по методу конечных элементов с базисом из кусочно-экспоненциальных функций.

Если коэффициенты  $p(z)$  и  $g(z)$  однородного дифференциального уравнения задачи (1.3.21) кусочно-постоянны, то по методу Ритца посредством базиса (1.3.22), (1.3.23) можно получить численное решение, совпадающее с точным решением задачи (1.3.24). А так как дифференциальный оператор в задаче (1.3.24) самосопряженный, то решения по методу Ритца и методу Галеркина совпадают.

Докажем утверждение (об условиях совпадения аналитического решения задачи (1.3.24) с численным решением по методу Ритца).

1. Пусть в задаче (1.3.24) функция  $k^2(z)$  (волновое число) является кусочно-постоянной и задается формулой (1.3.24<sub>1</sub>) с множеством точек разрыва  $\{z_i\}_{i=0}^N$ .

2. На полубесконечном интервале  $[0, \infty)$  построим сетку

$$\bar{\omega} = \{ \xi_m \mid m = 0, N_z, \xi_0 = 0, \xi_{N_z} = z_N, N_z \geq N \}$$

так, чтобы  $\forall i = \overline{0, N} \exists j : \xi_j = z_i$ .

3. При численном решении задачи (1.3.24) по методу Ритца будем использовать базисные функции  $\varphi_m^{kh}(z)$ ,  $\varphi_{N_z, \infty}^{kh}(z)$  в согласии с формулами (1.3.22), (1.3.23), (1.3.25).

Тогда всюду в интервале  $[0, \infty)$  численное решение будет совпадать с точным (аналитическим) решением задачи (1.3.24).  $\square$

*Доказательство.*

Справедливость утверждения докажем на примере трехслойной среды.

Пусть волновое число  $k(x)$  кусочно-постоянно

$$k(z) = \begin{cases} k_1, & z \in (0, h_1), \\ k_2, & z \in (h_1, h_1 + h_2), \\ k_3, & z \in (h_1 + h_2, \infty). \end{cases}$$

1. *Аналитическое решение.* Отыскивая точное решение задачи относительно значений  $u_1 = u(h_1)$ ,  $u_2 = u(h_1 + h_2)$  на границах разрыва волнового числа, получим систему уравнений (см. Пособие, ч. I [Юдин, Юдин, 2007, с. 32, формулы (2.1.1.6)- (2.1.1.7)])

$$\begin{cases} u_1(d_1 + d_2) + u_2 b_2 = -u_0 b_1, \\ u_1 b_2 + u_2(d_2 + d_3) = 0. \end{cases} \quad (1.3.26)$$

Здесь  $b_m = -k_m / \text{sh}(k_m h_m)$ ,  $d_m = k_m \text{cth}(k_m h_m)$ ,  $m = 1, 2$ ;  $d_3 = k_3$ .

2. *Решение по методу Рунца.* Будем использовать сетку, узлы которой совпадают с границами  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = h_1$ ,  $z_2 = h_1 + h_2$  и базисные функции (1.3.22), (1.3.23), (1.3.25). Рассматриваемая задача совпадает с задачей (1.3.9)-(1.3.10), в которой следует положить  $f = 0$ ,  $p = 1$ ,  $q = k^2$ ,  $l = \infty$ . Введем обозначения

$$q_{1,m}(z) := \frac{\text{sh}[k_m(h_m - \bar{z})]}{\text{sh}(k_m h_m)}, \quad q_{2,m}(x) := \frac{\text{sh}(k_m \bar{z})}{\text{sh}(k_m h_m)}, \quad \bar{z} = z - z_{m-1}, \quad m = 1, 2, \quad (1.3.27)$$

$$q_{1,3}(x) := e^{k_3 \bar{z}}, \quad \bar{z} = z - (h_1 + h_2)$$

и запишем базисные функции в более удобном для дальнейших преобразований виде

$$\varphi_0^{kh}(z) = \begin{cases} q_{1,1}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_1), \\ 0, & \bar{z} \geq h_1, \end{cases} \quad \varphi_1^{kh}(z) = \begin{cases} q_{2,1}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_1), \\ q_{1,2}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_2), \\ 0, & z \notin [z_0, z_2), \end{cases}$$

$$\varphi_{2\infty}^{kh}(z) = \begin{cases} q_{2,2}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, h_2), \\ q_{1,3}(\bar{z}), & \bar{z} \in [0, \infty). \end{cases}$$

Формула (1.3.13) определяет интерполяцию решения на полубесконечном интервале. Согласно формул (1.3.22), (1.3.23) и (1.3.25), полагая  $c_k = u_k$ , (1.3.13) может быть записана следующим образом:



$$Q_3' + k_3^2 Q_3 = k_3 = d_3.$$

Подставляя приведенные тождества в (1.3.30), получим

$$\begin{cases} u_0 b_1 + u_1 (d_1 + d_2) + u_2 b_2 = 0, \\ u_1 b_2 + u_2 (d_2 + d_3) = 0. \end{cases} \quad (1.3.31)$$

Видим, что система уравнений (1.3.31), построенная методом Ритца, полностью совпадает с системой (1.3.26), полученной при аналитическом решении задачи (1.3.24). Это означает, что  $u(z) \equiv u^h(z)$ ,  $z \in [0, \infty)$ . А так как дифференциальный оператор самосопряженный, то метод Галеркина будет тоже давать точное решение. Утверждение доказано.  $\square$

Нужно отметить, что алгоритмы Ритца и Галеркина позволили получать хорошие результаты на очень грубой сетке.

Рассмотренный пример свидетельствует в пользу методов Ритца и Галеркина по сравнению с классическим методом конечных разностей. Эти алгоритмы позволяют включить в базисные функции априорную информацию, обеспечивающую высокую точность аппроксимации искомого решения на достаточно грубых сетках. Кроме того, в процессе конструирования решения оказалось возможным построить полубесконечный элемент  $\varphi_{N\infty}^{kh}(x)$ , обеспечивший получение точного численного решения в неограниченной области.

*Замечание 1.* Сопоставим общий вид уравнения системы (1.3.31) с аналогичным уравнением, полученным по методу конечных разностей. Для простоты будем считать  $k = const$  и шаги сетки также постоянными и равными  $h$ . Тогда конечно-разностная аппроксимация дифференциального уравнения (1.3.24) может быть представлена в следующем виде (см. формулу (1.1.26)):

$$u_{m-1} - (2 + k^2 h^2) u_m + u_{m+1} = 0.$$

С учётом  $k = const$ ,  $d/b = k \operatorname{cth}(kh) / (-k / \operatorname{sh}(kh)) = ch(kh)$  уравнение (1.3.31) упрощается

$$u_{m-1} - 2ch(kh) u_m + u_{m+1} = 0.$$

Если  $|kh| \ll 1$ , то  $ch(kh) \approx 1 + (kh)^2 / 2$  и системы становятся эквивалентными, т.е. в одномерном случае разностные схемы являются асимптотиками (при  $kh \rightarrow 0$ ) по отношению к конечно-элементным, получаемым на основе базисных функций (1.3.22), (1.3.23).

*Замечание 2.* Наряду с кусочно-постоянными и кусочно-линейными функциями для построения подпространств  $F_h$  используются также кусочно-полиномиальные функции высокого порядка, тригонометрические функции [Марчук, 1980], вейвлеты [Gagnon L. and Lina, 1994] и другие базисные функции, обладающие «хорошими» аппроксимационными свойствами. <

#### **Д. Нестационарные аналоги кусочно-экспоненциальных финитных базисных функций.**

В первой части Пособия [Юдин, Юдин, 2007, раздел 2.2, с. 86-95] рассмотрена связь между решениями задач в частотной и временной области при ступенчатом изменении поля в источнике.

Рассмотрим решение нестационарной задачи на полубесконечной прямой

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \mu(z)\sigma(z) \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}, & 0 < z < \infty, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u^0, & z = 0, \\ 0, & z > 0; \end{cases} & u|_{z=0} = u^0; u \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.3.32)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость (примем  $\mu = 4\pi 10^{-7}$ ),  $\sigma$  – удельная электропроводность среды. Применим к задаче (1.3.32) преобразование Лапласа-Карсона [Диткин, Прудников, 1965]

$$\hat{u}(z, p) = p \int_0^{\infty} u(z, t) e^{-pt} dt.$$

Далее символом  $\mapsto$  будем обозначать соответствие между оригиналом и изображением:

$$\hat{u}(z, p) \mapsto u(z, t).$$

Очевидно,

$$p \int_0^{\infty} u_t(z,t) e^{-pt} dt = p u e^{-pt} \Big|_{+0}^{+\infty} + p^2 \int_0^{\infty} u(z,t) e^{-pt} dt = p \widehat{u}(z, p),$$

т.е.  $u_t(z,t) \square p \widehat{u}(z, p)$ . Здесь учтено, что при  $\operatorname{Re} p > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(z,t) e^{-pt} = 0$ , а,

согласно начального условия,  $\lim_{t \rightarrow +0} u(z,t) e^{-pt} = u(z, +0) = 0$ . Кроме того,

$$p \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 \widehat{u}(z, p)}{\partial z^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \widehat{u}(z, p)}{\partial z^2} \mapsto \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2},$$

$$p \int_0^{\infty} u^0 e^{-pt} dt = u^0 p \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = u^0,$$

$$p \int_0^{\infty} u(z,t) e^{-pt} dt \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0, \Rightarrow \widehat{u}(z, p) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0.$$

Окончательно, в области изображений получим задачу

$$\begin{cases} \widehat{u}''(z, p) = p \mu(z) \sigma(z) \widehat{u}(z, p), \\ \widehat{u}|_{z=0} = u^0; \widehat{u} \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.3.33)$$

Примем  $k^2(z) := p \mu(z) \sigma(z)$ , тогда задача (1.3.33) совпадает с задачей (1.3.24), в которой волновое число равно  $k^2(z) = -i \omega \mu(z) \sigma(z)$ .

*Вывод.* При ступенчатом изменении поля в источнике для получения решения в области изображений по Лапласу-Карсону нужно в формулах для частотной области заменить  $-i \omega$  на  $p$ .

*Частный случай.* Пусть  $\mu = \text{const}$  и  $\sigma = \text{const}$ , тогда непосредственной проверкой можно убедиться в том, что решением задачи (1.3.32) является функция

$$u(z,t) = u^0 \operatorname{erfc} \left( \frac{z \sqrt{\mu \sigma}}{2 \sqrt{t}} \right), \quad (1.3.34)$$

а решением задачи (1.3.33) в области изображений –

$$\widehat{u}(z, p) = u^0 \exp(-kz) = u^0 \exp(-z \sqrt{\mu \sigma} \sqrt{p}). \quad (1.3.35)$$

Таким образом, имеем соответствие между решениями задач (1.3.32) и (1.3.33)

$$u^0 \exp(-z\sqrt{\mu\sigma}\sqrt{p}) \mapsto u^0 \operatorname{erfc}\left(\frac{z\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}}\right)$$

или

$$\exp(-\alpha\sqrt{p}) \mapsto \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right), \alpha \geq 0. \quad (1.3.36)$$

Пользуясь этим соответствием, которое можно взять также из справочников по операционному исчислению (например, [Диткин, Прудников, 1965]), найдем оригиналы кусочно-экспоненциальных базисных функций из предыдущего раздела.

Прежде всего, получим оригиналы для  $\hat{q}_1(z,p)$ ,  $\hat{q}_2(z,p)$  (см. формулы (1.3.27.)), в которых следует принять  $k = \sqrt{-i\omega}\sqrt{\mu\sigma} = \sqrt{p}\sqrt{\mu\sigma}$ . Примем  $\operatorname{Re}k > 0$  и представим функцию  $\hat{q}_2$  в виде ряда по экспонентам

$$\hat{q}_2(z,k,H) := \frac{\operatorname{sh}(kz)}{\operatorname{sh}kH} = \frac{e^{kz} - e^{-kz}}{e^{kH} - e^{-kH}} = \frac{e^{-k(H-z)} - e^{-k(H+z)}}{1 - e^{-2kH}}.$$

Так как  $|e^{-2kH}| < 1$ , то  $1/(1 - e^{-2kH})$  можно представить как сумму геометрической прогрессии  $(1 - e^{-2kH})^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2mkH}$ , поэтому

$$\hat{q}_2(z,k,H) = (e^{-k(H-z)} - e^{-k(H+z)}) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2mkH}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{q}_2(z,k,H) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\sqrt{p}\left\{\sqrt{\mu\sigma}\left[(2m+1)H - z\right]\right\}\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[-\sqrt{p}\left\{\sqrt{\mu\sigma}\left[(2m+1)H + z\right]\right\}\right] \right\}. \end{aligned}$$

На основании (1.3.36) получим соответствие  $\hat{q}_2(z,k,H) \square q_2(z,t,H)$ , в котором

$$q_2(z,t,H) := \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{\mu\sigma}\left[(2m+1)H - z\right]}{2\sqrt{t}}\right] - \operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{\mu\sigma}\left[(2m+1)H + z\right]}{2\sqrt{t}}\right] \right\}. \quad (1.3.37)$$

Так как  $\hat{q}_1(z,k,H) = \hat{q}_2(H - z,k,H)$ , то

$$q_1(z, t, H) := \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu\sigma} (2mH + z)}{2\sqrt{t}} \right] - \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu\sigma} [2(m+1)H - z]}{2\sqrt{t}} \right] \right\} \quad (1.3.38)$$

Графики функций  $q_1(z, t, H)$  и  $q_2(z, t, H)$  изображены на рис. 1.3.7.

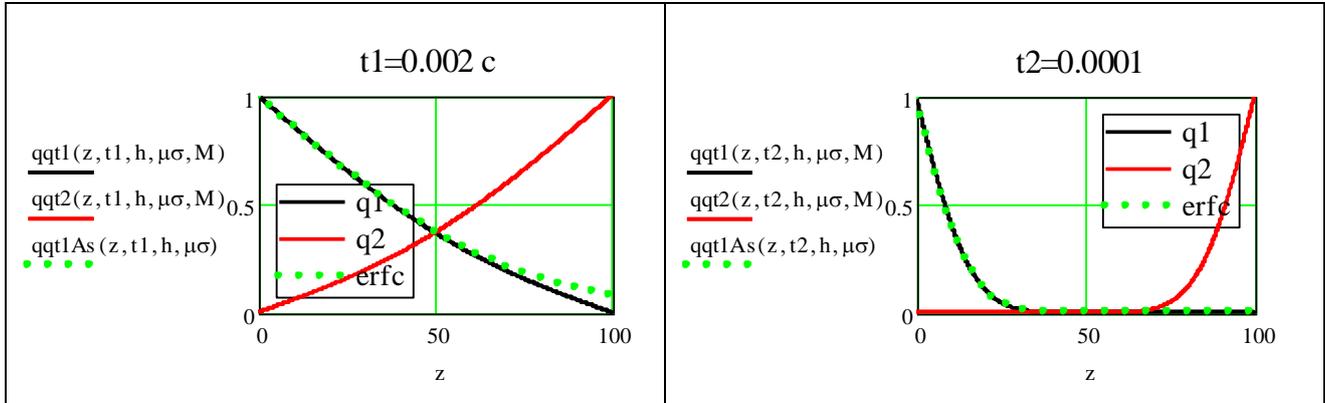


Рис. 1.3.7. Графики функций  $q_1(z, t, H)$ ,  $q_2(z, t, H)$ , на разных временах ( $t = 0.002$  с (слева) и  $t = 0.0001$  с (справа)) в сравнении с решением задачи (1.3.36) для однородного полупространства (точки).

Согласно (1.9.37), при  $H \rightarrow \infty$   $\operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu\sigma} [(2m+1)H - z]}{2\sqrt{t}} \right] \rightarrow 0$ , а в (1.3.38)

$$q_1(z, t, H) \rightarrow \operatorname{erfc} \left( \frac{z\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} \right) = q_{1\infty}(z - z_{N-1}, t).$$

*Задание.* Убедиться в том, что функции  $q_1(z, t, H)$  и  $q_2(z, t, H)$  являются решениями задач

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ 0, & z > 0; \end{cases} & u|_{z=0} = 1; \quad u|_{z=H} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 0, & 0 < z < H, \\ 1, & z = H; \end{cases} & u|_{z=0} = 0; \quad u|_{z=H} = 1, \end{cases}$$

соответственно.  $\square$

По аналогии с построением кусочно-экспоненциальных базисных функций в частотной области можно сконструировать базисные функции

$\{\psi_m^h(x, t)\}_{m=0}^N$  для численного решения нестационарных задач по методу

конечных элементов на конечном или полубесконечном интервале. На конечном интервале эти функции определим посредством формул:

$$\psi_m^h(z, t) = \begin{cases} q_{2,m}(\bar{z}, t), \bar{z} \in [0, h_m), & \bar{z} = z - z_{m-1}, \\ q_{1,m+1}(\bar{z}, t), \bar{z} \in [0, h_{m+1}), & m = 1, \dots, N-1, \\ 0, & z \notin [z_{m-1}, z_{m+1}), \end{cases} \quad (1.3.39)$$

$$\psi_0^h(z, t) = \begin{cases} q_{1,1}(\bar{z}, t), \bar{z} \in [0, h_1), \\ 0, \bar{z} \geq h_1, \end{cases}, \quad \psi_N^h(z, t) = \begin{cases} q_{2,N-1}(\bar{z}, t), \bar{z} \in [0, h_{N-1}), \\ 0, \bar{z} \notin [0, h_{N-1}). \end{cases} \quad (1.3.40_1)$$

На полубесконечном интервале  $h_N \rightarrow \infty$ , поэтому функции  $\psi_N^h(x, t)$  соответствует ее асимптотический аналог  $\psi_{N\infty}^h(x, t)$  (см. формулу (1.3.25)):

$$\psi_{N\infty}^h(z, t) = \begin{cases} q_{2,N-1}(\bar{z}, t), \bar{z} \in [0, h_{N-1}), \\ q_{1,N\infty}(\bar{z}, t), \bar{z} \in [0, \infty). \end{cases} \quad (1.3.40_2)$$

Графики функций  $\{\psi_m^h(z, t)\}_{m=0}^N$  конструируются из кривых, приведенных на рис. 1.3.7. Они аналогичны графикам, изображенным на рис. 1.3.5.

### Е. Пример численного решения нестационарной задачи по методу Рунца (метод конечных элементов).

Примем

$$v_N^h(z, t) = \sum_{m=0}^N v_m(t) \psi_m^h(z, t), \quad (1.3.41)$$

где  $v_m(t)$  – элементы сеточной функции  $v^h(t)$  в узлах  $z_m$ :

$$v^h(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t), \dots, v_N(t))^T.$$

Формула (1.3.41) обеспечивает интерполяцию искомого решения на конечном или полубесконечном интервале, причем на каждом частичном интервале интерполяция выполняется посредством формул

$$v_N^h(z, t) = \sum_{m=0}^N v_m(t) \psi_m^h(z, t) = \begin{cases} v_0(t)q_{1,1}(z, t) + v_1(t)q_{2,1}(z, t), & 0 \leq z < z_1, \\ \dots \\ v_{m-1}(t)q_{1,m}(z, t) + v_m(t)q_{2,m}(z, t), & z_{m-1} \leq z < z_m, \\ \dots \\ v_{N-2}(t)q_{1,N-1}(z, t) + v_{N-1}(t)q_{2,N-1}(z, t), & z_{N-1} \leq z < z_N \\ v_{N-1}(t)q_{1,N}(z, t), & z > z_N. \end{cases} \quad (1.3.42)$$

В (1.3.42) учтены соотношения (1.3.39)-(1.2.40). Отметим, что при  $z_N = \infty$  следует принять  $q_{2,N} = q_{1,\infty}(z, t)$ . Согласно (1.3.42),

$$\begin{aligned} I(v_N^h)(t) &= \int_0^\infty \left[ \left( \frac{\partial}{\partial z} v_N^h \right)^2 + \mu(z) \sigma(z) v_N^h \frac{\partial v_N^h}{\partial t} \right] dz = \\ &= \sum_{m=1}^N \int_{z_{m-1}}^{z_m} \left[ \left( v_{m-1} \frac{\partial q_{1,m}}{\partial z} + v_m \frac{\partial q_{2,m}}{\partial z} \right)^2 + \mu_m \sigma_m (v_{m-1} q_{1,m} + v_m q_{2,m}) \frac{\partial (v_{m-1} q_{1,m} + v_m q_{2,m})}{\partial t} \right] dz. \end{aligned}$$

Если в интегралах под знаком суммы сделать замену переменной  $\bar{z} = z - z_{m-1}$ , то

$$\begin{aligned} &\int_{z_{m-1}}^{z_m} \left\{ \left[ \left( v_m^h(z, t) \right)' \right]^2 + \mu(z) \sigma(z) v_m^h(z, t) \frac{\partial v_m^h(z, t)}{\partial t} \right\} dz = \\ &= \int_0^{h_m} \left\{ \left[ \left( v_m^h(\bar{z}, t) \right)' \right]^2 + \mu(\bar{z}) \sigma(\bar{z}) v_m^h(\bar{z}, t) \frac{\partial v_m^h(\bar{z}, t)}{\partial t} \right\} d\bar{z}, \quad h_m = z_m - z_{m-1}. \end{aligned}$$

Примем

$$\begin{aligned} dQ_m(t) &:= \int_0^{h_m} \left[ \frac{\partial q_{1,m}(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \right]^2 d\bar{z} = \int_0^{h_m} \left[ \frac{\partial q_{2,m}(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \right]^2 d\bar{z}, \\ dQ_{12,m}(t) &:= \int_0^{h_m} \frac{\partial q_{1,m}(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \frac{\partial q_{2,m}(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \quad Q_m(t) := \int_0^{h_m} q_{1,m}^2(\bar{z}, t) d\bar{z} = \int_0^{h_m} q_{2,m}^2(\bar{z}, t) d\bar{z}, \\ Q_{12,m}(t) &= Q_{21,m}(t) := \int_0^{h_m} q_{1,m} q_{2,m}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad m = 1, 2, \\ Q_{11t,m}(t) &:= \int_0^{h_m} q_{1,m}(\bar{z}, t) \partial_t q_{1,m} d\bar{z}, \quad Q_{22t,m}(t) := \int_0^{h_m} q_{2,m}(\bar{z}, t) \partial_t q_{2,m} d\bar{z}, \quad (1.3.43) \\ Q_{12t,m}(t) &:= \int_0^{h_m} q_{1,m}(\bar{z}, t) \partial_t q_{2,m} d\bar{z}, \quad Q_{21t,m}(t) := \int_0^{h_m} q_{2,m}(\bar{z}, t) \partial_t q_{1,m} d\bar{z}. \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений интеграл по  $m$ -му интервалу будет равен:

$$\begin{aligned} &\int_0^{h_m} \left[ \left( v_{m-1}(t) \frac{\partial}{\partial z} q_{1,m} + v_m(t) \frac{\partial}{\partial z} q_{2,m} \right)^2 + \mu_m \sigma_m (v_{m-1} q_{1,m} + v_m q_{2,m}) \frac{\partial (v_{m-1} q_{1,m} + v_m q_{2,m})}{\partial t} \right] dz = \\ &= v_{m-1}^2 dQ_m(t) + 2v_{m-1} v_m dQ_{12,m}(t) + v_m^2 dQ_m(t) + \\ &+ \mu_m \sigma_m \left[ v_{m-1} (\partial_t v_{m-1}) Q_m(t) + v_{m-1} (\partial_t v_m) Q_{12,m}(t) + v_{m-1}^2 Q_{11t,m}(t) + v_{m-1} v_m Q_{12t,m}(t) + \right. \end{aligned}$$

$$v_m (\partial_t v_{m-1}) Q_{12,m}(t) + v_m^2 (\partial_t v_m) Q_m(t) + v_m v_{m-1} Q_{21t,m}(t) + v_m^2 Q_{22t,m}(t) \Big]. \quad (1.3.44)$$

Очевидно, переменная  $v_m(t)$  входит только в выражения по двум соседним интервалам. Интегралы по следующему  $(m+1)$ -му интервалу получаются из формулы (1.3.30) путем увеличения всех индексов на 1:

$$\begin{aligned} & \int_0^{h_{m+1}} \left[ \left( v_m q'_{1,m+1} + v_{m+1} q'_{2,m+1} \right)^2 + \mu_{m+1} \sigma_{m+1} \left( v_m q_{1,m+1} + v_{m+1} q_{2,m+1} \right) \frac{\partial (v_m q_{1,m+1} + v_{m+1} q_{2,m+1})}{\partial t} \right] dz = \\ & = v_m^2 dQ_{m+1} + 2v_m v_{m+1} dQ_{12,m+1} + v_{m+1}^2 dQ_{m+1} + \\ & + \mu_{m+1} \sigma_{m+1} \left[ v_m (\partial_t v_m) Q_{m+1} + v_m (\partial_t v_{m+1}) Q_{12,m+1} + v_m^2 Q_{11t,m+1} + v_m v_{m+1} Q_{12t,m+1} + \right. \\ & \left. v_{m+1} (\partial_t v_m) Q_{12,m+1} + v_{m+1}^2 (\partial_t v_{m+1}) Q_{m+1} + v_{m+1} v_m Q_{21t,m+1} + v_{m+1}^2 Q_{22t,m+1} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.45)$$

Вычисляя производную от суммы правых частей выражений (1.3.44)-(1.3.45) по переменной  $v_m$  и приравнявая ее нулю, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций  $v_m(t)$ :

$$\frac{dv^h(t)}{dt} = B(t)v^h(t) + g^h(t).$$

с трехдиагональной матрицей системы  $B(t)$  размера  $N \times N$  и заданным вектором  $g^h(t)$ . При ее построении следует учесть краевое условие исходной задачи (1.3.32). Оно войдет в вектор правых частей системы  $g^h(t)$ . Нужно еще задать начальные условия. Очевидно, в рассматриваемой задаче в начальный момент времени во внутренних точках интервала, согласно (1.3.32), следует положить  $v_m(0) = 0$ ,  $m = 1, \dots, N$ . Окончательно, решая задачу (1.3.32) по методу Рунге, приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} \frac{dv^h(t)}{dt} = B(t)v^h(t) + g^h(t), \\ v^h(0) = 0. \end{cases} \quad (1.3.46)$$

для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, где  $v^h(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t), \dots, v_N(t))^T$ .

*Задания.* Принять  $N = 1$  (двухслойная модель среды). В этом частном случае  $v^h(t) \equiv v_1(t)$ ,  $B(t)$  и  $g^h(t)$  становятся скалярными функциями.

1. Найти явный вид функций  $B(t)$  и  $g^h$  в задаче (1.3.46).
2. Показать, что решение задачи (1.3.46) дает функция

$$v_1(t) = e^{\int_0^t B(\tau) d\tau} \cdot \int_0^t g^h(\xi) e^{-\int_0^\xi B(\tau) d\tau} d\xi.$$

3. Посредством аналитических вычислений на MathCAD проверить, что функция  $v_1(t)$  из задания 2 удовлетворяет скалярному аналогу уравнения (1.3.46):

$$v(t) := e^{\int_0^t B(\tau) d\tau} \cdot \int_0^t g(\xi) \cdot e^{-\int_0^\xi B(\tau) d\tau} d\xi$$

$$\frac{d}{dt} v(t) - B(t) \cdot v(t) \text{ simplify } \rightarrow g(t)$$

4. Принять  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  и графически сравнить численное решение нестационарной задачи при  $N = 1$  с ее аналитическим решением (1.3.34). □

#### 1.4. Метод вейвлет-Галеркина.

Появление вейвлет-анализа является одним из важных событий, которые произошли в математике за последние полтора десятилетия. После возникновения сплайнов не было другой математической концепции, которая бы так стремительно проникла в естественные науки, многие области техники, экономику и финансы. Эта теория находит применение при численном решении задач математической физики [Glowinsky et al, 1990; Kaiser, 1994; Kölzow, 1994; Resnikoff, 1991; Xu, Shann, 1992]. Из-за близких подобий между *вейвлетами* (иногда их также называют *всплесками*) и конечными элементами кажется естественным использовать элементы ортонормированных вейвлет-базисов в качестве базисных функций проекционных методов приближенного решения задач (Ритца, Галеркина) [Марчук, Агошков, 1981]. Метод Галеркина, основанный на использовании всплесков в качестве функций полного в  $L^2$

базиса, получил название *метода вейвлет-Галеркина* [Gagnon, Lina, 1994; Xu J., Shann, 1992]. Для этого метода будем далее использовать аббревиатуру *МВГ*.

Большинство задач геоэлектрики строго формулируются для неограниченных областей. При их численном решении возникает потребность рассмотрения краевых задач в ограниченной области. Аппроксимация поведения решения на бесконечности подходящим краевым условием является важной проблемой математического моделирования. В задачах с уравнениями эллиптического и параболического типа основой для построения краевых условий вместо условий на бесконечности может служить альтернирующий метод Шварца [Канторович Л.В., Крылов, 1962, Завадский, 1972].

Здесь будет обсуждаться применение МВГ для решения простых одномерных задач геоэлектрики применительно к уравнениям эллиптического и параболического типов на полупрямой. Аппроксимация искомого решения в конечной области будет строиться с помощью масштабирующих функций, а для построения граничного условия в процессе численного решения будет использоваться альтернирующий метод Шварца. Описанию алгоритма Шварца посвящен раздел 1.9.

Тестовые задачи выбраны так, чтобы для них существовали аналитические решения. Это позволило оценивать погрешности численных решений. Результаты вычислений посредством МВГ сравнивались также с решениями по методу конечных разностей и конечных элементов.

#### **1.4.1. Элементы теории дискретного вейвлет-преобразования.**

Прежде чем перейти к решению задач, приведем некоторые сведения из теории вейвлет-анализа и определим основные понятия (см., например, Малла [2005]).

*Кратноразрешающий анализ (КРА)*. В основе дискретного вейвлет-преобразования лежит так называемый *кратноразрешающий* или *кратномасштабный анализ (multiresolution analysis* или сокращенно *MRA)*. Приведем связанные с этим понятием основные сведения.

*Масштабирующие функции  $\varphi(z)$  и подпространства  $V_j$*

Последовательность  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  замкнутых подпространств в  $L^2(\mathbf{R})$  называется

*кратноразрешающим анализом*, если:

$$1^0. V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbf{Z},$$

$$2^0. \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}),$$

$$3^0. \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\},$$

$$4^0. f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1},$$

$$5^0. f(\cdot) \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0 \quad \forall k \in \mathbf{Z},$$

$$6^0. \exists g \in V_0 : \{g(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}} - \text{базис Рисса в пространстве } V_0.$$

Свойство  $6^0$  можно заменить на

$$6^{0'}: \exists \varphi \in V_0 : \{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}} - \text{ортонормированный базис (ОНБ) в}$$

пространстве  $V_0$ .

Функция  $\varphi(\cdot)$  называется *масштабирующей функцией (scaling function)* КРА. Свойство  $4^0$  позволяет по одному подпространству  $V_0$  построить все семейство  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ . Из  $4^0$  и  $6^{0'}$  следует, что  $\forall j \in \mathbf{Z}$  система функций  $\{\varphi_{jk}(\cdot)\}$ , где

$$\varphi_{jk}(\cdot) := 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k), k \in \mathbf{Z}$$

ОНБ в пространстве  $V_j$ . Поскольку  $\varphi(\cdot) \in V_0$  и  $V_0 \subset V_1$ , то для  $\varphi(\cdot)$  справедливо разложение в ряд Фурье по системе  $\{\varphi_{jk}(\cdot)\}$ :

$$\varphi(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2z - k), \quad (1.4.1)$$

где

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{1k} \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx, k \in \mathbf{Z}. \quad (1.4.2)$$

Обозначив  $c_k := \sqrt{2} h_k$ , формулу (1.4.1) можно переписать так:

$$\varphi(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi(2z - k). \text{ При выполнении условия нормировки}$$

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t) dt = 1$$

будет

$$\sum_k c_k = 2.$$

Вейвлеты  $\psi(x)$  и подпространства  $W_j$

Поскольку  $V_0 \subset V_1$ , то разложим подпространство  $V_1$  на прямую сумму:  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ . Для любого  $j \in \mathbf{Z}$  определяем  $W_j$  как ортогональное дополнение  $V_j$  до  $V_{j+1}$ :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (1.4.3)$$

Подпространства  $W_j$  содержат *детализирующую информацию (detail information)* при переходе от разрешения уровня  $j+1$  к  $j$ . В силу определения кратноразрешающего анализа и формулы (1.4.3) можно записать:

$$\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = \mathbf{L}^2(\mathbf{R}).$$

**Теорема.** Для всякого КРА  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  существует такой вейвлет  $\psi(t)$ , что система  $\psi(\cdot - k)_{k \in \mathbf{Z}}$  – ортонормированный базис (ОНБ) в  $W_0$ . Более того, система функций  $\psi_{jk}(\cdot) := 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - k)_{j \in \mathbf{Z}}$  является ОНБ в  $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ .

Поскольку  $\psi$  является элементом подпространства  $V_1$ , то существует числовая последовательность  $\{g_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  такая, что

$$\psi(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2z - k). \quad (1.4.4)$$

Малла [2005] показал, что один из возможных выборов последовательности  $\{g_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  в (1.4.4) является  $g_k = (-1)^k h_{1-k}$ .

### 1.4.2. Вейвлет-Галеркинская аппроксимация функций

Кратноразрешающий анализ позволяет представить пространство  $L^2(\mathbf{R})$  в виде:

$$\mathbf{L}^2(\mathbf{R}) = V_{j_0} \oplus \sum_{j \geq j_0} W_j, \quad j_0 \in \mathbf{Z}.$$

Следовательно, любая функция  $f(z)$  из  $L^2(R)$  может быть представлена в виде линейной комбинации сдвигов масштабирующей функции  $\varphi(z)$  при некотором фиксированном масштабе  $j_0$  и сдвигов всплесков  $\psi(z)$ :

$$f(z) = \sum_k v_{j_0 k} \varphi_{j_0 k}(z) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k w_{jk} \psi_{jk}(z). \quad (1.4.5)$$

Второе слагаемое в формуле (1.4.5) соответствует высокочастотным компонентам функции  $f(z)$ , которыми можно пренебречь в силу их незначительности (близости к нулю). Поэтому  $f(z)$  может быть записана в виде так называемого “вейвлет-галеркинского разложения” (обозначим  $j_0$  через  $N$ ):

$$f(z) \approx \sum_k v_{Nk} \varphi_{Nk}(z). \quad (1.4.6)$$

Предположим, что вейвлет  $\psi(x)$  удовлетворяет условиям компактности, ортогональности, регулярности и симметричности [Gagnon, Lina, 1994].

Первые три условия определяют всплески Добеши (Daubechies) [Daubechies, 1988, 1992]. Условие регулярности говорит о полиномиальном содержании пространств  $V_j$  (т.е. масштабирующая функция регулярности  $r$  допускает точное представление полиномов степени  $r$  в пространствах  $V_j$ ). Выполнение условия симметричности ведет к построению комплексных базисов.

Если все четыре условия выполняются, то в этом случае масштабирующая функция  $\varphi(z)$  и ассоциированный с ней вейвлет  $\psi(z)$  должны быть четными и нечетными соответственно относительно точек:

$$z_{jk} = 2^{-j-1} + k2^{-j}. \quad (1.4.7)$$

Из свойства симметричности масштабирующей функции следует также формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (z - \frac{1}{2})^k \overline{\varphi(z)} dz = 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (1.4.8)$$

Все это позволяет вычислить коэффициенты  $v_{Nk}$  в представлении (1.4.6). Выполняя разложение сигнала  $f(z)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_{jk}$  и пользуясь формулой (1.4.7), а также учитывая вышеприведенные свойства, можно показать, что проекция  $f(z)$  на подпространство  $V_N$  приводит к следующему выражению для коэффициентов:

$$v_{Nk} = \langle \varphi_{Nk}, f \rangle = 2^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(2^N z - k)} f(z) dz \approx \\ \approx 2^{-N/2} \left[ f(z_{Nk}) - i\gamma 2^{-(2N+1)} \frac{d^2 f(z_{Nk})}{dz^2} + \dots \right],$$

где  $\gamma \in \mathbb{R}$  – коэффициент, зависящий от порядка вейвлета. Следуя определению КРА, можем записать [Mallat, 1989]:

$$v_{j-1,k} = \sum_m \overline{h_m} v_{j,2k+m}, \quad w_{j-1,k} = \sum_m \overline{g_m} v_{j,2k+m}. \quad (1.4.9)$$

Справедлива также формула обращения:

$$v_{j+1,k} = \sum_m h_{k-2m} v_{jm} + g_{k-2m} w_{jm}. \quad (1.4.10)$$

Рассмотрим аппроксимацию дифференциального оператора  $d^n / dz^n$  в терминологии кратноразрешающего анализа. В пространстве  $V_0$  элементы матрицы дифференциального оператора имеют вид [Beylkin, 1996; Gagnon, Lina, 1994]:

$$c_k^{(n)} = \left\langle \varphi_{0k}, \frac{d^n \varphi}{dz^n} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(z-k)} \frac{d^n \varphi(z)}{dz^n} dz. \quad (1.4.11)$$

Посредством замены переменной получим (здесь  $a_k := \frac{h_k}{\sqrt{2}}$ ):

$$c_k^{(n)} = 2^{n+1} \sum_{m=-2J}^{2J} \sum_{m'=-J}^{J+1} \overline{a_{m+m'-2k}} a_m c_m^{(n)}. \quad (1.4.12)$$

Здесь имеются в виду всплески Добеши, для которых  $a_k \neq 0$  при  $k = -J, -J+1, \dots, J, J+1$ . Уравнение (1.4.12) может быть записано в матричной форме:

$$\mathbf{A}\mathbf{c}^{(n)} = \frac{1}{2^{n+1}}\mathbf{c}^{(n)},$$

где матрица  $\mathbf{A}$  размера  $(4J+1)\times(4J+1)$  – “матрица Лоутона” (Lawton) с элементами  $A_{kk'}$ , равными:

$$A_{kk'} = \sum_{m=-J}^{J+1} \bar{a}_{m+k'-2k} a_m. \quad (1.4.13)$$

Следовательно, элементы матрицы для  $n$ -ной производной в пространстве  $V_0$  являются компонентами собственного вектора матрицы  $\mathbf{A}$ , соответствующие собственному значению  $\lambda_n = 1/2^{n+1}$ . Такой собственный вектор должен быть единственным. Для произвольного собственного вектора  $\mathbf{r}^{(n)}$  коэффициенты  $\mathbf{c}^{(n)}$  удовлетворяют равенству:

$$c_k^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{\sum_{l=-2J}^{2J} l^n r_l^{(n)}} r_k^{(n)}. \quad (1.4.14)$$

Отметим, что этот результат однозначно определяет  $n$ -ную производную только для  $n \leq J$ .

### 1.4.3. Постановка и решение одномерных задач.

Материал этого раздела более подробно описан в работе [Юдин и др., 2002].

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения Гельмгольца :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} - k^2 u = 0, \\ u|_{z=0} = u_0, u|_{z \rightarrow \infty} = 0. \end{cases} \quad (1.4.15)$$

Когда  $k(z)$  – кусочно-постоянная функция задача (1.4.15) имеет аналитическое решение. В более общем случае, когда  $k(z)$  – кусочно-непрерывна, решение находится численно. Для отыскания численного решения необходимо перейти к ограниченной области. В этом случае условие на бесконечности в (1.4.15) нужно заменить на подходящее краевое условие при некотором конечном  $z = H$ . В результате приходим к задаче:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} - k^2 u = 0, \\ u|_{z=0} = u^0, \quad u|_{z=H} = u^1. \end{cases} \quad (1.4.16)$$

Какой принять величину  $u_1$  заранее неизвестно. Для построения граничного условия  $u_1$  в точке  $z = H$  можно воспользоваться альтернирующим методом Шварца.

Рассмотрим более подробно вычисления по методу вейвлет-Галеркина. Напомним, что в согласии с этим методом искомую функцию приближенно представляют в виде линейной комбинации полной системы базисных функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ :

$$u_n(z) \approx b_1 \varphi_1(z) + \dots + b_n \varphi_n(z),$$

где коэффициенты  $b_1, b_2, \dots, b_n$  для некоторого линейного оператора  $L$  находятся из системы

$$\langle Lu_n, \varphi_j \rangle = \sum_{k=1}^n b_k \langle L\varphi_k, \varphi_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.4.21)$$

В нашем случае  $L$  – дифференциальный оператор.

В простейшем варианте метода вейвлет-Галеркина в качестве базисных функций берут систему масштабирующих функций  $\varphi(x)$  КРА в пространстве  $V_0$ . Мы ограничимся рассмотрением только этого случая. График одной из функций этого набора представлен на рис. 1.4.1.

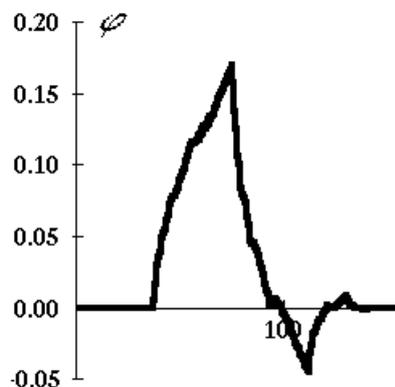


Рис. 1.4.1. Масштабирующая функция Daub4

Рассмотрим аппроксимацию второй производной дифференциального оператора (1.4.15).

Разобьем отрезок  $[0, H]$  с постоянным шагом  $h$  и функции  $u(x)$  поставим в соответствие сеточную функцию  $u_m = u(z_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ . Согласно [Beylkin, 1993; Gagnon, Lina, 1994], дифференциальный оператор  $d^2u/dz^2$  в каждой фиксированной точке  $z_m$  в базисе пространства  $V_0$  может быть аппроксимирован посредством некоторого «шаблона». При этом количество ненулевых коэффициентов «шаблона» зависит от порядка  $p$  вейвлета и равно  $4p+1$ . Например, для  $p = 2$  (вейвлет типа Daub4) система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений искомой функции будет представлена девятидиагональной симметричной матрицей, коэффициенты которой определяются по формулам (1.4.11), (1.4.12) при  $n$  равным 2. Система сеточных уравнений для задачи (1.4.17) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} c_0 - k_1^2 h^2 & c_1 & \dots & c_4 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 - k_2^2 h^2 & c_1 & \dots & c_4 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & c_4 & \dots & c_1 & c_0 - k_m^2 h^2 & \dots & c_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_4 & \dots & c_1 & c_0 - k_{N-2}^2 h^2 & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_4 & \dots & c_1 & c_0 - k_{N-1}^2 h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_m \\ \dots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \\ \dots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (1.4.22)$$

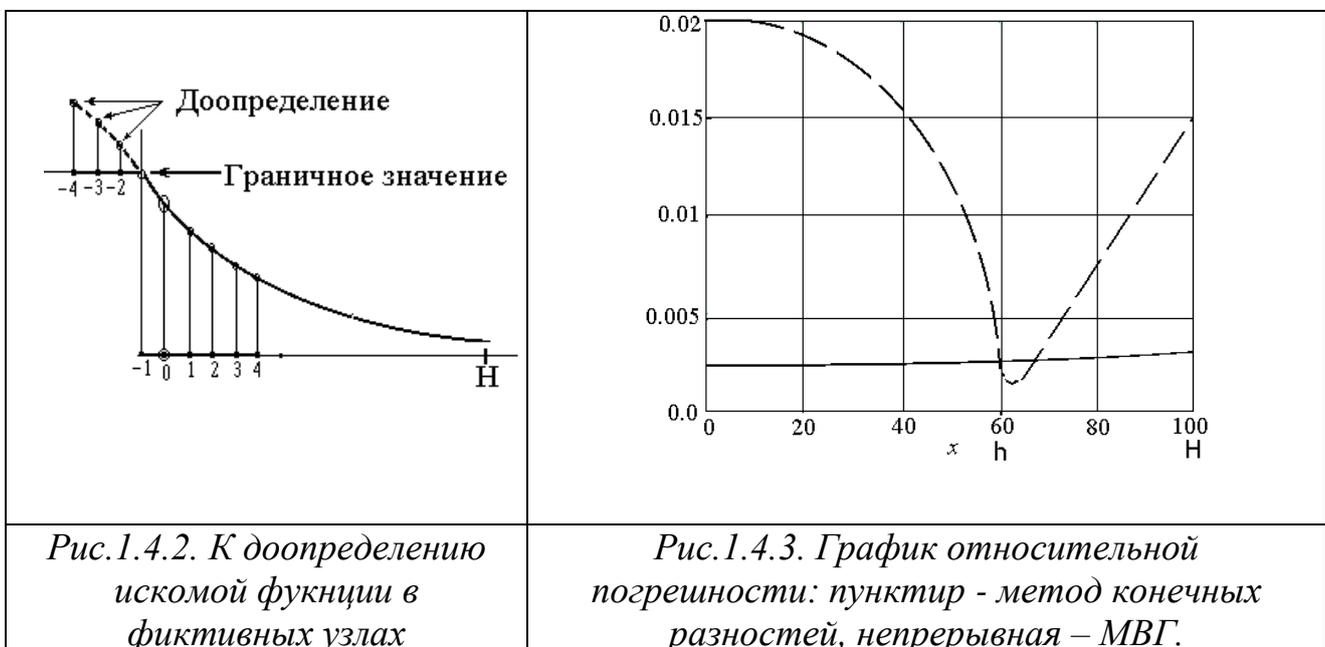
В этой системе принято обозначение  $c_k^{(2)} \equiv c_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  $\tilde{u}_m$  – фиктивные узлы ( $m = -3, -2, -1, N+1, N+2, N+3$ ),  $u^1 = u_N$  – граничное значение при  $x = H$ .

Числовые значения коэффициентов  $c_k^{(2)}$  можно найти в работах [Beylkin, 1993; Gagnon, Lina, 1994]. Коэффициенты  $b_m$  равны:

$$\begin{aligned} b_1 &:= -c_4 \tilde{u}_{-3} - c_3 \tilde{u}_{-2} - c_2 \tilde{u}_{-1} - c_1 u^0, & b_{N-1} &:= -c_4 \tilde{u}_{N+3} - c_3 \tilde{u}_{N+2} - c_2 \tilde{u}_{N+1} - c_1 u_N, \\ b_2 &:= -c_4 \tilde{u}_{-2} - c_3 \tilde{u}_{-1} - c_2 u^0, & b_{N-2} &:= -c_4 \tilde{u}_{N+2} - c_3 \tilde{u}_{N+1} - c_2 u_N, \\ b_3 &:= -c_4 \tilde{u}_{-1} - c_3 u^0, & b_{N-3} &:= -c_4 \tilde{u}_{N+1} - c_3 u_N, \\ b_4 &:= -c_4 u^0, & b_{N-4} &:= -c_4 u_N, \\ b_5 &= \dots = b_{N-5} = 0. \end{aligned}$$

Аппроксимация второй производной по пространственной координате посредством вейвлетов приводит к неоднозначности аппроксимации краевых

условий Дирихле в нескольких узлах сетки, примыкающих к границам. Количество этих узлов зависит от типа вейвлета, используемого для построения приближенного решения. Например, при  $p = 2$  появляется потребность доопределения искомой функции в 3-х фиктивных узлах на каждой границе. На рис. 3 показаны эти узлы только вблизи границы  $z = 0$ . Существуют различные способы экстраполяции решения вне области  $(0, H)$  (периодическое продолжение, зеркальное отражение). Однако для решения задач геоэлектрики они неприемлемы. Для решения этой проблемы был выбран алгоритм, основанный на анализе результатов численных экспериментов. В согласии с ним значения в фиктивных узлах итерационно доопределяются посредством нечётного продолжения некоторого приближенного решения задачи относительно граничной точки (рис. 1.4.2). Вычисления показали, что достаточно задачу решать дважды. Сначала значения во всех фиктивных узлах строили по аналитическому решению, полученному для постоянных усредненных значений коэффициента  $k(z)$ . С этими данными находили численные решения задачи и экстраполировали его в фиктивные узлы по указанному выше правилу.



Для границ  $z = 0$  и  $z = H$  соответственно доопределение можно описать формулами

$$u(-z) = 2u(0) - u(z), \quad u(H + z) = 2u(H) - u(H - z), \quad z > 0.$$

Окончательный результат получали после повторного решения задачи.

## Выводы.

1. Использование вейвлетов позволяет построить эффективные устойчивые вычислительные схемы и получать высокую точность численного решения на относительно редкой сетке.

2. Вейвлеты служат естественной основой для построения вычислений на последовательности сеток, выбор которых диктуется алгоритмом кратноразрешающего анализа [Gagnon, Lina, 1994].

3. МВГ в сочетании с альтернирующим методом Шварца являются мощным инструментом для решения задач математической физики в неограниченных областях.

4. Рассмотренные в работе алгоритмы решения задач с очевидными изменениями обобщаются на аналогичные задачи для уравнений эллиптического и параболического типов с бóльшим числом независимых переменных.

### 1.5. Метод интегральных уравнений.

Пусть  $G_n(z, z_0)$  – функция Грина, которая является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{d^2 G_n(z, z_0)}{dz^2} - k_n^2 G_n(z, z_0) = \delta(z - z_0), z \in (0, \infty), \\ G_n(z, z_0)|_{x=0} = 0, G_n(z, z_0) \rightarrow 0, |z - z_0| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

где  $k_n(x)$  – кусочно-постоянное волновое число

$$k_n(z) = \begin{cases} k_1, 0 \leq z < z_1 = h_1, \\ \dots \\ k_m, z_{m-1} \leq z < z_m, m = 2, N-1, \\ \dots \\ k_N, z \geq z_{N-1}. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Рассмотрим решение одномерной краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_1 u(z) - k^2(z)u(z) = f(z), z \in \square, \\ u|_{x=0} = u^0; u \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.5.3)$$

Предположим, известно решение этой же задачи для горизонтально-однород-

ной слоистой модели среды с волновыми числами (1.5.2) с такой же правой частью  $f(z)$

$$\begin{cases} \Delta_1 u_n(z) - k_n^2(z) u_n(z) = f(z), z \in \square, \\ u_n|_{z=0} = u^0; u_n \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Примем  $u^a := u - u_n$ . Вычитая из задачи (1.5.5) соответствующие элементы задачи (1.5.6), для функции получим  $u^a$  задачу

$$\begin{cases} \Delta_1 u^a(z) - k_n^2(z) u^a(z) = [k^2(z) - k_n^2(z)] u(z), z \in \square, \\ u^a|_{z=0} = 0; u_n \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Если функция Грина  $G_n(z, z_0)$  построена, то решение задачи (1.5.5), как известно, равно<sup>13</sup>

$$u^a(z_0) = \int_0^\infty [k^2(z) - k_n^2(z)] u(z) G_n(z, z_0) dz. \quad (1.5.6)$$

Итак, получили интегральное уравнение относительно функции  $u(z)$

$$u(z_0) = u_n(z_0) + \int_0^\infty [k^2(z) - k_n^2(z)] u(z) G_n(z, z_0) dz. \quad (1.5.7)$$

<sup>13</sup> При выводе формулы (1.5.6) пользуются второй формулой Грина для области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

В одномерном случае эта формула, полагая  $v(x) = G(x, x_0)$  и  $u(x) = u^a(x)$ , принимает вид

$$\int_0^\infty (G_n(x, x_0) \Delta u^a - u^a \Delta G_n(x, x_0)) dx = \left[ G_n(x, x_0) \frac{\partial u^a}{\partial n} - u^a \frac{\partial G_n(x, x_0)}{\partial n} \right]_0^\infty.$$

К левой части последнего равенства прибавим и вычтем к подынтегральной функции терм  $k_n^2 u^a(x) G_n(x, x_0)$ , тогда после простых преобразований получим

$$\int_0^\infty (G_n(x, x_0) (\Delta u^a - k_n^2 u^a) - u^a [\Delta G_n(x, x_0) - k_n^2 G_n(x, x_0)]) dx = \left[ G_n(x, x_0) \frac{\partial u^a}{\partial n} - u^a \frac{\partial G_n(x, x_0)}{\partial n} \right]_0^\infty.$$

С учетом краевых условий и условий на бесконечности для функции Грина и  $u^a(x)$  правая часть равенства равна нулю. В согласии с дифференциальным уравнением в задаче (1.5.1) и формулой (1.5.5) получим

$$\int_0^\infty (G_n(x, x_0) (k^2 - k_n^2) u(x) - u^a [\delta(x - x_0)]) dx = 0.$$

Отсюда следует формулы (1.5.6) и (1.5.7), так как, по основному свойству дельта-функции,

$$\int_0^\infty \delta(x - x_0) u^a(x) dx = u^a(x_0).$$

Решение задачи находят в два этапа.

*Первый этап. Решение интегрального уравнения.* Для получения решения задачи на интервале интегрирования строят сетку и, после приближенного вычисления интеграла по одной из квадратурных формул, получают систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных значений искомой сеточной функции  $\{v_m^h\}_{m=0}^M \approx \{u^h(z_m)\}_{m=0}^M$  в узлах дискретизации  $z_m, m = \overline{0, M}$ :

$$Av^h = b$$

с матрицей системы  $A$  и правой частью  $b$ . Решая систему, находят решение  $\bar{v}_m^h$  в узлах сетки

Как правило, в методе интегральных уравнений матрица системы линейных алгебраических уравнений (в отличие от МКР и МКЭ) получается заполненной.

*Важный частный случай.* Обычно модель среды строят таким образом, чтобы при  $z \notin [a, b], a \geq 0, b < \infty$  коэффициент  $k^2(z) = k_n^2(z)$ . Тогда несобственный интеграл в (1.5.7) становится определенным интегралом по интервалу  $[a, b]$  и (после замен  $z_0 \rightarrow z, z \rightarrow \xi$ ) уравнение (1.5.7) принимает вид:

$$u(z) = u_n(z) + \int_a^b [k^2(\xi) - k_n^2(\xi)] u(\xi) G_n(\xi, z) d\xi. \quad (*)$$

Например, применяя к правой части уравнения (\*) формулу прямоугольников, получим

$$v_m^h = u_n(z_m) + \sum_{i=1}^M v_i^h g_{m,i}$$

где

$$g_{m,i} = (k_i^2 - k_{n,i}^2) G_n(z_i, z_m) h_i \approx \int_{z_{i-1}}^{z_i} [k^2(\xi) - k_n^2(\xi)] G_n(\xi, z_m) d\xi.$$

Система уравнений относительно элементов  $v_i^h$  сеточной функции  $v^h$  принимает вид

$$Av^h = b, A = (a_{m,i})_{m,i=1}^M, a_{m,i} = (g_{m,i} - \delta_{m,i}), b = (-u_n(z_m))_{m=1}^M.$$

Здесь  $\delta_{m,i}$  – символ Кронекера.  $\square$

*Второй этап. Вычисление решения в произвольной точке полубесконечного интервала.* Если на первом этапе было найдено решение

задачи в интервале  $z \in [a, b]$ , то в любой точке  $x$  вне этого интервала решение находят по формуле (1.5.7) посредством вычисления интеграла в правой части по какой-либо квадратуре.

*Пример.* Построим решение задачи для однородного уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \frac{d^2 u(z)}{dz^2} - k^2(z)u(z) = 0, z \in \square, \\ u|_{z=0} = u^0; u \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.5.8)$$

для трехслойной модели среды ( $N = 3$ )

$$k(z) = \begin{cases} k_1, 0 \leq z < z_1 = h_1, \\ k_2, z_1 \leq z < z_2 = h_1 + h_2, \\ k_1, z \geq z_2. \end{cases} \quad (1.5.9)$$

Запишем функцию Грина для однородного слоя мощности  $H$  [Корн, Корн, 1968, с. 262].

$$G_{1,H}(z, z_0) = \begin{cases} -\frac{1}{k} \operatorname{sh}(kz) \frac{\operatorname{sh}[z(H - x_0)]}{\operatorname{sh}(kH)}, & 0 < z \leq z_0, \\ -\frac{1}{k} \frac{\operatorname{sh}[k(H - z)]}{\operatorname{sh}(kH)} \operatorname{sh}(kz_0), & z_0 \leq z \leq H. \end{cases} \quad (1.5.10)$$

При  $H \rightarrow \infty$  получим функцию Грина  $G_{1,\infty}(z, z_0)$  для однородного полупространства

$$G_{1,\infty}(z, z_0) = \begin{cases} -\frac{1}{k} \operatorname{sh}(kz) e^{-kz_0}, & 0 \leq z \leq z_0, \\ -\frac{1}{k} e^{-kz} \operatorname{sh}(kz_0), & z_0 \leq z < \infty. \end{cases} \quad (1.5.11)$$

Здесь учтено, что

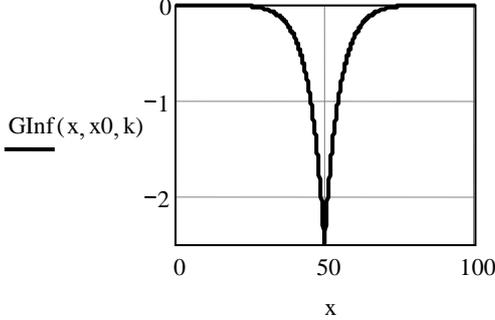
$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}[k(H - z_0)]}{\operatorname{sh}(kH)} = e^{-kz_0}.$$

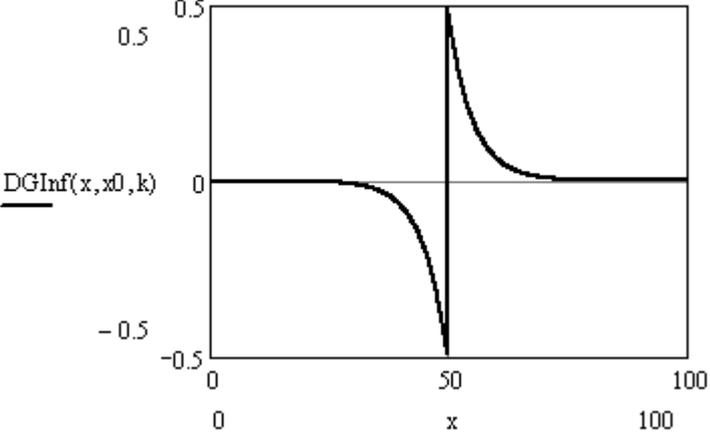
Графики функции Грина  $G_{1,\infty}(z, z_0)$  и ее производной изображены на рис. 1.5.1 и 1.5.2

Будем использовать функцию Грина  $G_{1,\infty}(\xi, z) \equiv G(\xi, z)$ , определяемую формулой (1.5.11), при  $k = k_1$ . Согласно (1.5.7) здесь интегральное уравнение принимает вид

$$u(z) = u_n(z) + (k_2^2 - k_1^2) \int_{z_1}^{z_2} u(\xi) G(\xi, z) d\xi, \quad z_1 \leq z \leq z_2, \quad (1.5.12)$$

где  $u_n(z) = u^0 e^{-k_1 z}$ .

Оператор MathCAD	График функции Грина $G_{1,\infty}(x, x_0)$
$G_{\text{Inf}}(x, x_0, k) := \begin{cases} \frac{-1}{k} \cdot \sinh(k \cdot x) \cdot e^{-k \cdot x_0} & \text{if } x \leq x_0 \\ \frac{-1}{k} \cdot \sinh(k \cdot x_0) \cdot e^{-k \cdot x} & \text{if } x \geq x_0 \end{cases}$	<p style="text-align: center;"><math>k := 0.2 \quad x_0 := 50</math></p> 
<p>Рис. 1.5.1. Функция Грина на полубесконечном интервале</p>	

Оператор MathCAD	График производной функции Грина $G_{1,\infty}(x, x_0)$
$DG_{\text{Inf}}(x, x_0, k) := \frac{d}{dx} G_{\text{Inf}}(x, x_0, k)$	
<p>Рис. 1.5.2. Производная функции Грина на полубесконечном интервале</p>	

Решение задачи состоит из двух этапов.

*Первый этап.* На интервале  $z \in [z_1, z_2]$  строят сетку и получают систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений искомой функции в узлах дискретизации. В задаче этого примера можно взять сетку, состоящую из двух узлов  $z = z_1 = h_1$  и  $z = z_2 = h_1 + h_2$ . Этим точкам соответствуют неизвестные значения функции  $u(z)$ :  $u_1 := u(z_1)$ ,  $u_2 := u(z_2)$ . Если величины  $u_1, u_2$  были бы известны, то решение на рассматриваемом интервале давала бы функция

$$u(z) = u_1 \frac{sh[k_2(h_2 - \bar{z})]}{sh(k_2 h_2)} + u_2 \frac{sh(k_2 \bar{z})}{sh(k_2 h_2)} = u_1 q_{2,1} + u_2 q_{2,2}, \quad \bar{z} = z - z_1. \quad (1.5.13)$$

Примем соотношение (1.5.13) в качестве интерполирующей функции при вычислении интегралов. Относительно величин  $u_1, u_2$  получим систему из двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} u(z_1 + 0) = u_n(z_1) + (k_2^2 - k_1^2) \int_{z_1}^{z_2} u(x) G(x, z_1) dx, \\ u(z_2 - 0) = u_n(z_2) + (k_2^2 - k_1^2) \int_{z_1}^{z_2} u(x) G(x, z_2) dx. \end{cases} \quad (1.5.14)$$

Из системы (1.5.14) находят решение  $u_1, u_2$  в узлах сетки.

Запишем систему уравнений (1.5.14) более подробно. На интервале интегрирования в верхней точке второго слоя (в его кровле)  $z \geq z_1 = h_1$ , а в нижней точке второго слоя  $z \leq z_2 = h_1 + h_2$ , поэтому

$$G(z, z_1) = -\frac{1}{k_1} sh(k_1 z) e^{-k_1 z_1}, \quad G(z, z_2) = -\frac{1}{k_1} e^{-k_1 z} sh(k_1 z_2).$$

Система уравнений (1.5.14) может быть записана более компактно

$$\begin{cases} a_{11} u_1 + a_{12} u_2 = b_1, \\ a_{21} u_1 + a_{22} u_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.5.15)$$

если принять обозначения:

$$a_{11} := \left[ 1 + (k_2^2 - k_1^2) \frac{1}{k_1} sh(k_1 z_1) \int_{z_1}^{z_2} q_{2,1} e^{-k_1 x} dx \right],$$

$$a_{12} := (k_2^2 - k_1^2) \frac{1}{k_1} sh(k_1 z_1) \int_{z_1}^{z_2} q_{2,2} e^{-k_1 x} dx,$$

$$a_{21} := (k_2^2 - k_1^2) \frac{1}{k_1} e^{-k_2 z_2} \int_{z_1}^{z_2} q_{2,1} sh(k_1 x) dx, \quad (1.5.16)$$

$$a_{22} := 1 + (k_2^2 - k_1^2) \frac{1}{k_1} e^{-k_2 z_2} \int_{z_1}^{z_2} q_{2,2} sh(k_1 x) dx,$$

$$b_1 := u^0 e^{-k_1 z_1}, \quad b_2 := u^0 e^{-k_1 z_2}. \quad (1.5.17)$$

Все подынтегральные функции в (1.5.16) содержат только экспоненты, поэтому вычисляются в явном виде (*проделать!*). Интегралы полезно также найти посредством языков высокого уровня, допускающих аналитические преобразования (*Maple, MathCad, MatLab, Mathematica*) (*реализовать!*). Например, символические вычисления на языке *MathCad* дают:

$$\int \sinh(k_2 \cdot x) \cdot \sinh(k_1 \cdot x) dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sinh[(k_2 + k_1) \cdot x]}{k_2 + k_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sinh[(-k_2) + k_1] \cdot x}{(-k_2) + k_1}$$

*Второй этап.* В любой точке  $z \notin [h_1, h_2]$  решение находят по формуле (1.5.12), а при  $z \in [h_1, h_2]$  – посредством (1.5.13).

*Приведем результаты решения задачи по программе на языке MathCAD.*

Здесь будут использованы следующие исходные данные:

$$u^0 = 1, k_1 = 0.01, k_2 = 0.05, x_1 = h_1 = 10.0, x_2 = 100, h_2 = 90.0.$$

Получим точные значения функции  $u_1 := u(z_1)$ ,  $u_2 := u(z_2)$  путем решения системы (1.3.26). Операторы и результаты расчетов приведены в Таблице 1.5.1. Решение содержится в векторе  $U3$ . Его компоненты равны:  $u_1 = 0.664$ ,  $u_2 = 0.012$ . Программа, реализующая *первый этап* вычислений по методу интегральных уравнений, записана в таблицах 1.5.2, 1.5.3, а *второй этап* – в таблице 1.5.4. Численное решение дает вектор  $U$  в правом столбце таблицы 1.5.3. Сопоставляя векторы  $U3$  и  $U$  видим, что  $U3 = U$ . Этот факт говорит о совпадении аналитического решения и решения по методу

интегральных уравнений на интервале  $z \in [z_1, z_2]$  и, следовательно, при любом  $z \in [0, \infty)$ . Графики функции  $u_n(z)$  и  $u(z)$  изображены на рис. 1.5.3.

Таблица 1.5.1

<i>Операторы, реализующие аналитическое решение задачи по формулам (1.3.26)</i>
$dm(k, h) := k \cdot \coth(k \cdot h) \quad bm(k, h) := \frac{-k}{\sinh(k \cdot h)}$ $h1 := x1 \quad h2 := x2 - x1$ $d1 := dm(k1, h1) \quad d2 := dm(k2, h2) \quad d3 := k1 \quad b1 := bm(k1, h1) \quad b2 := bm(k2, h2)$ $A3 := \begin{pmatrix} d1 + d2 & b2 \\ b2 & d2 + d3 \end{pmatrix} \quad B3 := \begin{pmatrix} -b1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U3 := A3^{-1} \cdot B3 \quad U3 = \begin{pmatrix} 0.664 \\ 0.012 \end{pmatrix}$

Таблица 1.5.2

<i>Программа расчета коэффициентов и правой части системы (1.5.15) по формулам (1.5.16)-(1.5.17)</i>
$q21(x, k, x1, x2) := \frac{\sinh[k \cdot ((x2 - x1) - (x - x1))]}{\sinh[k \cdot (x2 - x1)]} \quad q22(x, k, x1, x2) := \frac{\sinh[k \cdot (x - x1)]}{\sinh[k \cdot (x2 - x1)]}$ $a11(k1, k2, x1, x2) := 1 + \frac{1}{k1} \cdot \sinh(k1 \cdot x1) \cdot (k2^2 - k1^2) \cdot \int_{x1}^{x2} q21(x, k2, x1, x2) \cdot e^{-k1 \cdot x} dx$ $a12(k1, k2, x1, x2) := \frac{1}{k1} \cdot \sinh(k1 \cdot x1) \cdot (k2^2 - k1^2) \cdot \int_{x1}^{x2} q22(x, k2, x1, x2) \cdot e^{-k1 \cdot x} dx$ $a21(k1, k2, x1, x2) := \frac{1}{k1} \cdot e^{-k1 \cdot x2} \cdot (k2^2 - k1^2) \cdot \int_{x1}^{x2} q21(x, k2, x1, x2) \cdot \sinh(k1 \cdot x) dx$ $a22(k1, k2, x1, x2) := 1 + \frac{1}{k1} \cdot e^{-k1 \cdot x2} \cdot (k2^2 - k1^2) \cdot \int_{x1}^{x2} q22(x, k2, x1, x2) \cdot \sinh(k1 \cdot x) dx$ $un(x, u0, k1) := u0 \cdot e^{-k1 \cdot x} \quad B1 := un(x1, u0, k1) \quad B2 := un(x2, u0, k1)$

Таблица 1.5.3

<i>Матрица коэффициентов СЛАУ (1.5.15)</i>	<i>Правая часть (1.5.15)</i>	<i>Решение СЛАУ (1.5.15)</i>
$A = \begin{pmatrix} 1.359 & 0.211 \\ 0.506 & 2.59 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0.905 \\ 0.368 \end{pmatrix}$	$U := A^{-1} \cdot B \quad U = \begin{pmatrix} 0.664 \\ 0.012 \end{pmatrix}$

## Операторы, реализующие расчеты по формулам (1.5.13) и (1.5.7)

$$u2f(u1, u2, k, x, x1, x2) := u1 \cdot q21(x, k, x1, x2) + u2 \cdot q22(x, k, x1, x2)$$

$$uInf(x, x1, x2, u1, u2, k1, k2) := \begin{cases} u2f(u1, u2, k2, x, x1, x2) & \text{if } x \geq x1 \wedge x \leq x2 \\ \left[ u1(x, u0, k1) + (k2^2 - k1^2) \cdot \int_{x1}^{x2} u2f(u1, u2, k2, \xi, x1, x2) \cdot GInf(\xi, x, k1) d\xi \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

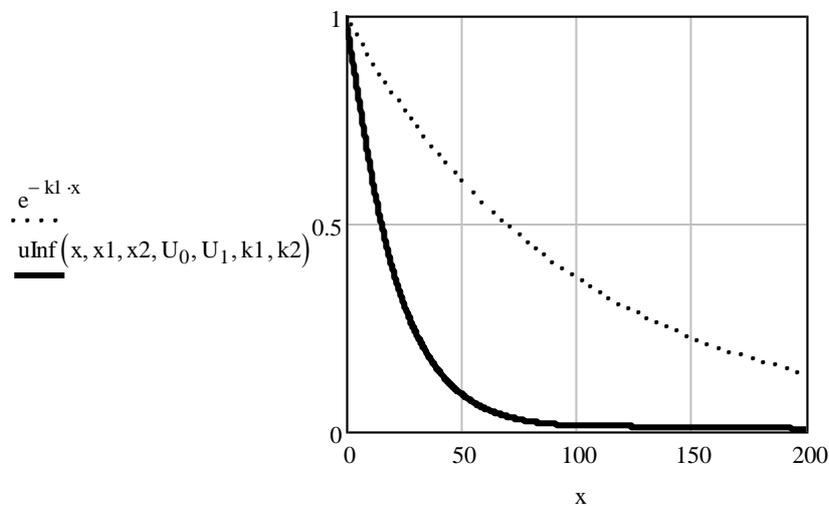


Рис. 1.5.3. Сопоставление графиков функции  $u_n(x) = u^0 e^{-k_1 x}$  (точки) и решения  $u(x)$  для трехслойной среды, полученного по методу интегральных уравнений (сплошная линия).

### 1.6. Вычислительные схемы для уравнения Гельмгольца на основе локальных интегральных уравнений.

Рассмотрим решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta u(z) - k^2(z)u(z) = 0, z \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u|_{\partial\Omega} = g(z), z \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.6.1)$$

Уравнение задачи (1.6.1) можно рассматривать как уравнение Пуассона со свободным членом  $k^2(z)u(z)$ . Его решение представимо в виде суммы двух функций  $u = v + w$ . Первая функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$\Delta v = 0$  и тому же краевому условию, что и функция  $u(z)$ , т.е. является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta v(z) = 0, z \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ v|_{\partial\Omega} = g(z), z \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Вторая функция  $w$  является решением задачи для уравнения Пуассона с однородными краевыми условиями

$$\begin{cases} \Delta w(z) = k^2(z)u(z), z \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, z \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.6.3)$$

Пусть для области  $\Omega$  известна функция Грина для уравнения Лапласа. Тогда решения задач (1.6.2) и (1.6.3) имеют вид:

$$v(z) = - \int_{\partial\Omega} g(\xi) \frac{\partial G(z, \xi)}{\partial n} ds_\xi, \quad w(z) = - \int_{\Omega} k^2(\xi) u(\xi) G(z, \xi) d\Omega.$$

Следовательно, решение задачи (1.6.1) является решением интегрального уравнения

$$u(z) = - \int_{\partial\Omega} g(\xi) \frac{\partial G(z, \xi)}{\partial n} ds_\xi - \int_{\Omega} k^2(\xi) u(\xi) G(z, \xi) d\Omega. \quad (1.6.4)$$

Если в области  $\Omega$  ввести в рассмотрение некоторую сетку  $\bar{\omega}$ , то тем самым будет выполнено разбиение области  $\Omega$  на частичные подобласти  $\Omega_i$  такие, чтобы для них можно было бы легко построить функции Грина. Тогда для каждого  $i$ -го узла сетки можно построить уравнение вида

$$u(z_i) = - \int_{\partial\Omega_i} g(\xi) \frac{\partial G_i(z_i, \xi)}{\partial n} ds_\xi - \int_{\Delta\Omega_i} k_i^2(\xi) u(\xi) G_i(z_i, \xi) d\Omega_i, \quad (1.6.5)$$

где  $G_i(z_i, \xi)$  – функция Грина частичной области  $\Delta\Omega_i$ . После вычисления интегралов получим столько уравнений, сколько имеется внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}$ . Решая эту систему уравнений, получим приближенное решение исходной задачи.

*Пример.* Проиллюстрируем этот алгоритм построения системы уравнений на простой задаче

$$\begin{cases} Lu \equiv -\frac{d^2u}{dz^2} + k^2(z)u(z) = 0, & 0 < z < H, \\ u(0) = u^0; u(H) = u^1. \end{cases} \quad (1.6.6)$$

с кусочно-постоянной функцией  $k^2(z)$ . На интервале  $[0, H]$  построим сетку

$$\varpi = \{0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{N-1} < z_N = H, h_m = z_m - z_{m-1}, m = 1, 2, \dots, N\} \quad (1.6.7)$$

Выберем частичный интервал  $[z_{m-1}, z_{m+1}]$ . На нем функцию Грина определяет формула

$$G_m(\bar{z}, \bar{\xi}) = \begin{cases} -\left(1 - \frac{\bar{\xi}}{2\bar{h}_m}\right)\bar{z}, & \bar{z} \leq \bar{\xi}, \\ -\left(1 - \frac{\bar{z}}{2\bar{h}_m}\right)\bar{\xi}, & \bar{z} \geq \bar{\xi}, \end{cases} \quad (1.6.8)$$

где  $\bar{h}_m = (h_m + h_{m+1})/2$ ,  $\bar{z} = z - z_{m-1}$ ,  $\bar{\xi} = \xi - z_{m-1}$ . Для упрощения записи положим  $m = 1$ , тогда  $z_{i-1} = z_0 = 0$  и  $\bar{z} = z$ ,  $\bar{\xi} = \xi$ . Примем также обозначение  $\bar{h}_1 = (h_1 + h_2)/2 = (h_- + h_+)/2 \equiv \bar{h}$ ,  $G_1(z, \xi) \equiv G(z, \xi)$ ,  $h_1 \equiv h_-$ ,  $h_2 \equiv h_+$ . В этих обозначениях локальная функция Грина примет вид

$$G(z, \xi) = \begin{cases} -\left(1 - \frac{\xi}{2h}\right)z, & z \leq \xi, \\ -\left(1 - \frac{z}{2h}\right)\xi, & z \geq \xi. \end{cases} \quad (1.6.9)$$

Уравнение (1.6.5) примет вид

$$\begin{aligned} u(z_1) \equiv u_1 = u_0 \frac{\partial G}{\partial n_\xi} \Big|_{\xi \rightarrow +0} + u_2 \frac{\partial G}{\partial n_\xi} \Big|_{\xi \rightarrow 2h-0} - \int_0^{2h} k^2(\xi)u(\xi)G(z_1, \xi)d\xi = \\ -u_0 \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow +0} + u_2 \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow 2h-0} + k_1^2 z \int_0^{h_1} u(\xi) \left(1 - \frac{\xi}{2h}\right) d\xi + k_2^2 \left(1 - \frac{z}{2h}\right) \int_{h_1}^{h_1+h_2} \xi u(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Вычисления дают

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow +0} = \frac{h_+}{2\bar{h}}, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow 2h-0} = \frac{h_-}{2\bar{h}}.$$

Рассмотрим несколько вариантов задания функции  $u(\xi)$  под знаком интеграла.

А. На интервале  $[z_0, z_1]$  примем  $u(\xi) = u_1 = const$  и  $h_1 = h_2 = h$ . Тогда находим

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + u_2) - \frac{u_1}{4}(k_1^2 h^2 + k_2^2 h^2).$$

После преобразований получаем уравнение

$$\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} u_1 = 0, \quad (1.6.11)$$

совпадающее с конечно-разностной аппроксимацией дифференциального оператора задачи (1.6.6) в точке  $z = z_1$  на сетке (1.6.7) с равномерным шагом.

Б. Если  $h_1 \neq h_2$ , тогда (1.6.11) будет соответствовать уравнение

$$\frac{1}{h_- \hbar} u_0 - \frac{2u_1}{h_- h_+} + u_2 \frac{1}{h_+ \hbar} - \frac{k_1^2 h_- + k_2^2 h_+}{2\hbar} u_1 = 0. \quad (1.6.12)$$

В. На интервале  $[x_0, x_1]$  примем (см. (1.3.27))

$$u(\xi) = \begin{cases} u_0 q_{1,1} + u_1 q_{2,1}, & 0 \leq \xi < h_1, \\ u_1 q_{1,2} + u_2 q_{2,2}, & h_1 \leq \xi < h_1 + h_2. \end{cases} \quad (1.6.13)$$

и подставим  $u(\xi)$  в правую часть формулы (1.6.10). Тогда после вычислений интегралов и тождественных преобразований получим уравнение

$$u_0 \frac{k_1}{shk_1 h_1} - u_1 (k_1 cthk_1 h_1 + k_2 cthk_2 h_2) + u_2 \frac{k_2}{shk_2 h_2} = 0, \quad (1.6.14)$$

которое совпадает с уравнением системы, сконструированной по методу Рунге и Галеркина при использовании экспоненциальных базисных функций  $\{\varphi_i^{kh}(z)\}$  (см. формулы (1.3.22)- (1.3.23)).

*Задание.* Выполнить вычисления и преобразования, необходимые для записи уравнений в виде формул (1.6.12) и (1.6.14).  $\square$

## 1.7. Метод граничных элементов.

Точность метода конечных разностей (МКР) полностью зависит от измельчения сетки, что обычно приводит к системе алгебраических уравнений высокого порядка. Кроме того, в МКР учет граничных условий нередко является непростой задачей. Метод конечных элементов (МКЭ) в сравнении с

МКР является более эффективным и в нем легче могут быть удовлетворены реальные граничные условия. Слабой стороной МКЭ является тот факт, что метод предполагает дискретизацию всего тела, что, особенно в трехмерных задачах с удаленными границами, приводит к нереальным разрывам значений физических величин между соседними элементами. Проблему частично решает метод граничных интегральных уравнений. Но их вывод и решение оказываются сложнее математически, чем МКР или МКЭ. Ситуацию улучшает появление метода граничных элементов (МГЭ), развитый на основе идей интегральных уравнений [Бенерджи, Баттерфилд, 1984]. Одним из важных достоинств МГЭ состоит в том, что он позволяет просто и точно учесть бесконечно удаленные границы.

Все модификации МГЭ имеют общее происхождение. Принято их разделять на три основные категории: *прямой*, *полупрямые* и *непрямые варианты*. Дадим их краткую характеристику.

1. *Непрямые варианты МГЭ*. В этом варианте интегральные уравнения полностью выражаются через сингулярные решения исходных дифференциальных уравнений, распределенное с неизвестной плотностью по границам рассматриваемой области. Фундаментальное сингулярное решение может быть, например, функцией Грина для неограниченной области. Функции плотности, не имеющие определенного физического смысла, находятся в результате численного решения интегрального уравнения. После этого – решение везде внутри тела могут быть получены простым интегрированием.

2. *Прямой МГЭ*. Неизвестные функции, входящие в интегральные уравнения, имеют вполне понятный физический смысл.

3. *Полупрямые варианты МГЭ*. Можно составлять интегральные уравнения относительно вспомогательных функций (например, функций тока в потенциальном течении). Когда получено решение для этих функций, решение задачи получается посредством простого дифференцирования.

Далее на простых примерах, имеющих аналитическое (точное) решение, проиллюстрируем алгоритмы непрямого и прямого варианта МГЭ. Основное

внимание уделим построению решений для одномерного уравнения Гельмгольца на полупрямой. При этом мы не будем стремиться соблюсти формальную строгость изложения, сосредоточив основное внимание на практической стороне алгоритмов.

За основу возьмем решение уже рассмотренной выше одномерной краевой задачи для уравнения Гельмгольца с кусочно-постоянным изменением волнового числа  $k(x)$  на конечном и полубесконечном интервале:

$$\begin{cases} Lu \equiv \frac{d^2 u}{dz^2} - k^2(z)u(z) = \psi(z), 0 < z < H, \\ u(0) = u^0; u(H) = u^1. \end{cases} \quad (1.7.1)$$

На полубесконечном интервале при  $H \rightarrow \infty$  краевое условие  $u(H) = u^1$  заменим (условием на бесконечности)  $u(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$ .

### 1. Непрямой МГЭ (НМГЭ).

Пусть  $G(z, z_0)$  функция Грина для прямой и в точке  $z_0$  расположен источник интенсивности  $\varphi(z_0)$ . Тогда решение  $u(z)$  может быть записано в виде

$$u(z) = \varphi(z_0)G(z, z_0). \quad (1.7.2)$$

Для построения решения воспользуемся функцией Грина для прямой с волновым числом  $k = const$

$$G(z, z_0) = e^{-k|z-z_0|}, \quad (1.7.3)$$

которая является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{d^2 G(z, z_0)}{dz^2} - k^2 G(z, z_0) = -\delta(z - z_0), z \in \square, \\ G(z, z_0) \rightarrow 0, |z - z_0| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

*Пример 1.* Найдем решение задачи (1.7.1), полагая  $k(z) = k = const$ . Построим фиктивные источники  $u_0$  и  $u_1$ , расположенные в «граничных элементах» (точках)  $z_0 = 0$  и  $z_1 = H$ . С учетом (1.7.2) влияние каждого источника может быть записано в виде :

$$u(z) = u_0 G(z, 0) + u_1 G(z, H) + \int_0^H \psi(\xi) G(z, \xi) d\xi, \quad (1.7.5)$$

где  $\psi(\xi)$  – плотность сторонних распределенных источников. Для упрощения положим  $\psi(z) \equiv 0$ , тогда

$$u(z) = u_0 G(z, 0) + u_1 G(z, H). \quad (1.7.5_0)$$

Предельные значения решения (1.7.5<sub>0</sub>) в точках  $z=0$  и  $z=H$  должны быть равными заданным граничным значениям  $u^0$  и  $u^1$ :

$$\lim_{z \rightarrow +0} u(z) = u_0 G(+0, 0) + u_1 G(+0, H) = u^0,$$

$$\lim_{z \rightarrow H-0} u(z) = u_0 G(H-0, 0) + u_1 G(H-0, H) = u^1.$$

Очевидно

$$G(+0, 0) = 1, G(+0, H) = e^{-kH}, G(H-0, H) = e^{-k|H-H|} = 1, G(H-0, 0) = e^{-kH}.$$

Запишем более подробно (1.7.5<sub>0</sub>):

$$u(z) = u_0 e^{-kz} + u_1 e^{-k(H-z)}.$$

Таким образом, получим систему уравнений относительно фиктивных источников  $u^0$  и  $u^1$ :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 e^{-kH} = u^0, \\ u_0 e^{-kH} + u_1 = u^1, \end{cases} \quad (1.7.6)$$

из которой найдем их интенсивности

$$u_0 = \frac{u^0 - u^1 e^{-kH}}{1 - e^{-2kH}}, u_1 = \frac{u^1 - u^0 e^{-kH}}{1 - e^{-2kH}}. \quad (1.7.7)$$

Подставляя (1.7.7) в (1.7.5<sub>0</sub>) получим решение задачи

$$u(z) = \frac{u^0 - u^1 e^{-kH}}{1 - e^{-2kH}} e^{-kz} + \frac{u^1 - u^0 e^{-kH}}{1 - e^{-2kH}} e^{-k(H-z)}.$$

После тождественных преобразований получим

$$u(z) = u^0 \frac{\text{sh}[k(H-z)]}{\text{sh}(kH)} + u^1 \frac{\text{sh}(kz)}{\text{sh}(kH)}. \quad (1.7.8)$$

Формула (1.7.8) дает точное решение задачи (1.7.1) при  $k = const, \psi(z) \equiv 0$ . Теперь можно устремить  $H \rightarrow \infty$ . В итоге получим решение однородной задачи на полупрямой

$$u(z) = u^0 e^{-kz}. \quad (1.7.9)$$

Ясно, что решение на полупрямой посредством МГЭ можно было бы найти гораздо проще. В этом случае вместо (1.7.5<sub>0</sub>) решение нужно было бы искать в виде

$$u(z) = u_0 G(z, 0) + u_1 G(z, \infty) = u_0 G(z, 0) + u_1 \cdot 0 = u_0 e^{-kz}$$

и сразу найти, что интенсивность единственного фиктивного источника  $u_0$  равна граничному значению  $u^0$ . Действительно

$$\lim_{z \rightarrow +0} u(z) = u_0 G(+0, 0) = u_0 \cdot 1 = u^0.$$

*Пример 2.* Найдем решение задачи (1.7.1) на полупрямой  $(0, \infty)$ , полагая  $\psi(z) \equiv 0$  и волновое число

$$k(z) = \begin{cases} k_1, & z \in [0, h_1), \\ k_2, & z \geq h_1. \end{cases} \quad (1.7.10)$$

*Вариант А.* При решении этой задачи по НМГЭ будем использовать функцию Грина

$$G(z, z_0) = e^{-k_1 |z - z_0|}.$$

В первом слое уравнение однородное (т.е. функция  $\psi \equiv 0$ ), поэтому будем искать решение с использованием фиктивных источников  $u_0$  и  $u_1$

$$u(z) = u_0 G(z, 0) + u_1 G(z, h_1) + \int_0^{h_1} \psi(\xi) G(z, \xi) d\xi = u_0 G(z, 0) + u_1 G(z, h_1). \quad (1.7.11)$$

В кровле первого слоя

$$u(0) = u^0 = u_0 G(0, 0) + u_1 G(0, h_1) = u_0 + u_1 e^{-k_1 h_1}. \quad (*)$$

Если бы была известна величина  $u(h_1) = u^1$ , то, согласно формулы (1.7.7), получим

$$u_0 = \frac{u^0 - u^1 e^{-k_1 h_1}}{1 - e^{-2k_1 h_1}}, \quad u_1 = \frac{u^1 - u^0 e^{-k_1 h_1}}{1 - e^{-2k_1 h_1}}, \quad (**)$$

а решение задачи давала бы формула (1.7.8)

$$u(z) = u^0 \frac{\text{sh}[k_1(h_1 - z)]}{\text{sh}(k_1 h_1)} + u^1 \frac{\text{sh}(k_1 z)}{\text{sh}(k_1 h_1)}.$$

Уравнение во втором слое

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - k_2^2 u(z) = 0$$

приведем к виду

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - k_1^2 u(z) = \psi(z), \quad (1.7.12)$$

где

$$\psi(z) = (k_2^2 - k_1^2)u(z).$$

Получаем интегральное уравнение ( $h_2 = \infty$ ) относительно функции  $u(z)$

$$u(z) = u_2 e^{-k_1(z-h_1)} + (k_2^2 - k_1^2) \int_{h_1}^{\infty} u(\xi) e^{-k_1|z-\xi|} d\xi, \quad z > h_1. \quad (1.7.13)$$

Здесь  $u_2$  – фиктивный источник в кровле второго слоя.

Если бы была известна величина  $u(h_1) = u^1$ , то под знаком интеграла в (1.7.13) функция  $u(z)$  была бы равна

$$u(z) = u^1 e^{-k_2(z-h_1)}. \quad (1.7.14)$$

Таким образом, при  $x > h_1$

$$u(z) = u_2 e^{-k_1(z-h_1)} + (k_2^2 - k_1^2) u^1 \int_{h_1}^{\infty} e^{-k_2(\xi-h_1)} e^{-k_1|z-\xi|} d\xi.$$

Обозначим

$$\zeta := \xi - h_1, \quad \bar{z} := z - h_1,$$

тогда

$$\int_{h_1}^{\infty} e^{-k_2(\xi-h_1)} e^{-k_1|z-\xi|} d\xi = \int_0^{\infty} e^{-k_2\zeta} e^{-k_1|\bar{z}-\zeta|} d\zeta = \frac{1}{k_2 - k_1} e^{-k_1(z-h_1)}, \quad z \geq h_1.$$

При  $z = h_1$  получим

$$u(h_1) = u^1 = \left[ u_2 e^{-k_1(z-h_1)} + \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_2 - k_1} u^1 e^{-k_1(z-h_1)} \right]_{x=h_1} = u_2 + u^1(k_2 + k_1).$$

Отсюда

$$u_2 = u^1 \left[ 1 - (k_2 + k_1) \right]. \quad (***)$$

Согласно формул (\*), (\*\*), (\*\*\*) система уравнений относительно  $u_0, u_1, u_2, u^1$  имеет вид

$$\begin{cases} u_0 + u_1 e^{-k_1 h_1} = u^0, \\ u_0 (1 - e^{-2k_1 h_1}) + u^1 e^{-k_1 h_1} = u^0, \\ u_1 (1 - e^{-2k_1 h_1}) - u^1 = -u^0 e^{-k_1 h_1}, \\ u_2 - u^1 \left[ 1 - (k_2 + k_1) \right] = 0. \end{cases}$$

*Вариант Б.* При решении этой задачи по НМГЭ будем использовать функцию Грина

$$G(z, z_0) = e^{-k_2 |z - z_0|}.$$

Уравнение в первом слое

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - k_1^2 u(z) = 0$$

приведем к виду

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - k_2^2 u(z) = (k_1^2 - k_2^2) u(z). \quad (1.7.11)$$

В первом слое будем искать решение с использованием фиктивных источников  $u_0$  и  $u_1$

$$u(z) = u_0 G(z, 0) + u_1 G(z, H) + \int_0^{h_1} \psi(\xi) G(z, \xi) d\xi, \quad (1.7.12)$$

где

$$\psi(\xi) = (k_1^2 - k_2^2) u(z).$$

Получаем интегральное уравнение

$$u(z) = u_0 e^{-k_2 z} + u_1 e^{-k_2(h_1 - z)} + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^{h_1} u(\xi) e^{-k_2 |z - \xi|} d\xi. \quad (1.7.13)$$

Если бы была известна величина  $u(h_1) = u^1$ , то функция  $u(z)$  под знаком интеграла имела бы вид

$$u(\xi) = u^0 q_{1,1} + u^1 q_{2,1} = u^0 \frac{\text{sh}[k_1(h_1 - \xi)]}{\text{sh}(k_1 h_1)} + u^1 \frac{\text{sh}(k_1 \xi)}{\text{sh}(k_1 h_1)}. \quad (1.7.14)$$

Система уравнений относительно  $u^0, u^1$  имеет вид

$$\lim_{z \rightarrow +0} u(z) = u_0 + u_1 e^{-k_2 h_1} + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^{h_1} \left\{ u^0 \frac{\text{sh}[k_1(h_1 - \xi)]}{\text{sh}(k_1 h_1)} + u^1 \frac{\text{sh}(k_1 \xi)}{\text{sh}(k_1 h_1)} \right\} e^{-k_2 \xi} d\xi = u^0,$$

$$\lim_{z \rightarrow h_1 - 0} u(z) = u_0 e^{-k_2 h_1} + u_1 + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^{h_1} \left\{ \frac{\text{sh}[k_1(h_1 - \xi)]}{\text{sh}(k_1 h_1)} + u^1 \frac{\text{sh}(k_1 \xi)}{\text{sh}(k_1 h_1)} \right\} e^{-k_2(h_1 - \xi)} d\xi = u^1.$$

Очевидны равенства интегралов

$$I_0(k_1, k_2, h_1) := \int_0^{h_1} \text{sh}[k_1(h_1 - \xi)] e^{-k_2 \xi} d\xi = \int_0^{h_1} \text{sh}(k_1 \xi) e^{-k_2(h_1 - \xi)} d\xi,$$

$$I_1(k_1, k_2, h_1) := \int_0^{h_1} \text{sh}(k_1 \xi) e^{-k_2 \xi} d\xi = \int_0^{h_1} \text{sh}[k_1(h_1 - \xi)] e^{-k_2(h_1 - \xi)} d\xi.$$

Примем

$$C_0(k_1, k_2, h_1) := \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{\text{sh}(k_1 h_1)} I_0, \quad C_1(k_1, k_2, h_1) := \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{\text{sh}(k_1 h_1)} I_1.$$

С учетом этих обозначений уравнения относительно фиктивных источников примут вид

$$\begin{cases} u_0 + u_1 e^{-k_2 h_1} + u^0 C_0 + u^1 C_1 = u^0, \\ u_0 e^{-k_2 h_1} + u_1 + C_1 u^0 + C_0 u^1 = u^1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 + u_1 e^{-k_2 h_1} = u^0(1 - C_0) - u^1 C_1, \\ u_0 e^{-k_2 h_1} + u_1 = u^1(1 - C_0) - u^0 C_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем

$$u_0 = \frac{u^0(1 - C_0) - u^1 C_1 - (u^1(1 - C_0) - u^0 C_1) e^{-k_2 h_1}}{1 - e^{-2k_2 h_1}},$$

$$u_1 = \frac{u^1(1 - C_0) - u^0 C_1 - (u^0(1 - C_0) - u^1 C_1) e^{-k_2 h_1}}{1 - e^{-2k_2 h_1}}.$$

Во втором слое решение имеет вид

$$u(x) = u^1 e^{-k_2(z - h_1)}.$$

На границе  $z = h_1$  должны выполняться условия сопряжения

$$\begin{aligned}u(h_1 + 0) &= u(h_1 - 0), \\u'(h_1 + 0) &= u'(h_1 - 0).\end{aligned}$$

Первое условие уже выполнено. Второе условие дает уравнение:

$$\frac{d}{dz} \left[ u_0 e^{-k_2 z} + u_1 e^{-k_2(h_1-z)} + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^{h_1} u(\xi) e^{-k_2|z-\xi|} d\xi \right]_{z=h_1-0} = \frac{d}{dz} \left[ u^1 e^{-k_2(z-h_1)} \right]_{z=h_1+0}.$$

Получаем систему для определения интенсивности фиктивных источников  $u^0$ ,  $u^1$  и величины  $u^1$  на границе

$$\begin{cases} u_0 + u_1 e^{-k_2 h_1} + C_1 u^1 = (1 - C_0) u^0, \\ u_0 e^{-k_2 h_1} + u_1 - (1 - C_0) u^1 = -C_1 u^0, \\ u_0 e^{-k_2 h_1} - u_1 - (1 - C_0) u^1 = -C_1 u^0. \end{cases}$$

## 2. Прямой МГЭ (ПМГЭ).

Сущность прямого метода проиллюстрируем на примере задачи (1.7.1).

Пусть  $G(z, z_0)$  – функция Грина. Умножим дифференциальное уравнение в (1.7.1) на  $G(z, z_0)$  и проинтегрируем обе части уравнение на интервале  $(0, h)$

$$\int_0^H \left[ \frac{d^2 u}{dz^2} - k^2(z) u(z) \right] G(z, z_0) dz = - \int_0^H \psi(z) G(z, z_0) dz. \quad (1.7.20)$$

Дважды проинтегрируем первое слагаемое в левой части равенства по частям

$$\int_0^H \frac{d^2 u}{dz^2} G(z, z_0) dz = \left[ \frac{du}{dz} G(z, z_0) - u \frac{dG(z, z_0)}{dz} \right] \Big|_0^H + \int_0^H \frac{d^2 G(z, z_0)}{dz^2} u dz.$$

и учтем, что  $G(z, z_0)$  является решением уравнения

$$\frac{d^2 G(z, z_0)}{dz^2} - k^2 G(z, z_0) = -\delta(z - z_0).$$

Тогда

$$\int_0^H \left[ \frac{d^2 G(z, z_0)}{dz^2} - k^2 G(z, z_0) \right] u(z) dz = - \int_0^H \delta(z - z_0) u(z) dz = -u(z_0). \quad (1.7.21)$$

В результате получим

$$u(z_0) = \left[ \frac{du}{dz} G(z, z_0) - u \frac{dG(z, z_0)}{dz} \right] \Big|_0^H + \int_0^H \psi(z) G(z, z_0) dz. \quad (1.7.22)$$

Уравнение (1.7.22) связывает значение функции  $u(z_0)$ ,  $z_0 \in (0, H)$  с заданным распределением внутренних источников и граничными значениями этой функции

$$u(z_0) = \left[ \frac{du(H)}{dz} G(H, z_0) - u^1 \frac{dG(H, z_0)}{dz} \right] - \left[ \frac{du(0)}{dz} G(0, z_0) - u^0 \frac{dG(0, z_0)}{dz} \right] + \int_0^H \psi(z) G(z, z_0) dz. \quad (1.7.23)$$

Совмещая внутреннюю точку с граничными точками (вычисляя односторонние пределы при  $z_0 \rightarrow H - 0$  и  $z_0 \rightarrow +0$ ), получим систему уравнений

$$\begin{cases} u(0+) = \left[ u'(H) G(H, 0) - u^1 \frac{dG(H, 0)}{dz} \right] - \\ \left[ u'(0) G(0, 0) - u^0 \frac{dG(0, 0)}{dz} \right] + \int_0^H \psi(z) G(z, 0) dz, \\ u(H) = \left[ u'(H) G(H, H) - u^1 \frac{dG(H, H)}{dz} \right] - \\ \left[ u'(0) G(0, H) - u^0 \frac{dG(0, H)}{dz} \right] + \int_0^H \psi(z) G(z, H) dz, \end{cases} \quad (1.7.24)$$

в которой  $G(*, 0) \equiv G(*, +0)$ ,  $G(*, H) \equiv G(*, H - 0)$ .

Обозначим

$$u'_0 := \frac{du(0)}{dz}, u'_1 := \frac{du(H)}{dz}, \psi_0 := \int_0^H \psi(x) G(x, 0) dx, \psi_1 := \int_0^H \psi(x) G(x, H) dx.$$

Пусть  $G(z, z_0) = e^{k|z-z_0|}$ , тогда

$$\frac{dG(z, z_0)}{dx} = \begin{cases} -ke^{-k(z-z_0)}, & z > z_0, \\ +ke^{-k(z_0-z)}, & z_0 > z. \end{cases}$$

Найдем все производные функции Грина на концах интервала:

$$\begin{aligned} \frac{dG(0, 0)}{dz} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dG(0, \varepsilon)}{dz} = k \cdot e^{-0} = k, \\ \frac{dG(H, 0)}{dz} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dG(H, \varepsilon)}{dz} = -k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-k(H-\varepsilon)} = -ke^{-kH}, \end{aligned}$$

$$\frac{dG(0, H)}{dz} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dG(0, H - \varepsilon)}{dz} = ke^{-kH}, \quad \frac{dG(H, H)}{dz} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dG(H, H - \varepsilon)}{dz} = -k.$$

Подставим их в систему (1.7.24)

$$\begin{cases} u^0 = [u'_1 e^{-kH} + u^1 k e^{-kH}] - [u'_0 - u^0 k] + \psi_0, \\ u^1 = [u'_1 + u^1 k] - [u'_0 e^{-kH} - u^0 k e^{-kH}] - \psi_1. \end{cases} \quad (1.7.25)$$

Из системы (1.7.25) нужно найти величины  $u'_0, u'_1$ . Для их вычисления получим систему

$$\begin{cases} u'_0 - u'_1 e^{-kH} = u^0(k-1) + u^1 k e^{-kH} + \psi_0, \\ u'_0 e^{-kH} - u'_1 = u^0 k e^{-kH} + u^1(k-1) - \psi_1. \end{cases} \quad (1.7.26)$$

Окончательное решение задачи дает формула (1.7.23)

$$u(z_0) = u'_1 \exp(-k(H - z_0)) - u'_0 \exp(-kz_0) + u^0 k \exp(-kz_0) + \int_0^H \psi(z) G(z, z_0) dz. \quad (1.7.23_1)$$

*Частный случай 1.* Однородное полупространство без сторонних источников ( $\psi(z) \equiv 0$ ). Для получения решения сделаем в формулах (1.7.25) предельный переход  $H \rightarrow \infty$ . Тогда, очевидно, из (1.7.26) следует  $u'_0 = u^0(k-1)$ , а из (1.7.23<sub>1</sub>) находим

$$u(z_0) = [-u'_0 + u^0 k] e^{-kz_0} = (-u^0(k-1) + u^0 k) e^{-kz_0} = u^0 e^{-kz_0}.$$

*Частный случай 2.* Решение на конечном интервале без сторонних источников.

Примем  $b_1 = u^0(k-1) + u^1 k e^{-kH}$ ,  $b_2 = u^0 k e^{-kH} + u^1(k-1)$ . Программа решения системы (1.7.25) средствами MathCAD приведена в таблице 1.7.1

Итак, решение системы (1.7.26) дают формулы:

$$u'_0 = -\frac{u^0(1 - k(1 - e^{-2kH})) + u^1 e^{-2kH}}{1 - e^{-2kH}}, \quad u'_1 = \frac{u^1(1 - k(1 - e^{-2kH})) - u^0 e^{-2kH}}{1 - e^{-2kH}}. \quad (1.7.27)$$

Приведем сравнение графиков точного решения, построенного по формуле (1.7.8), и решения по ПМГЭ (таблица 1.7.2) посредством MathCAD.

При построении графиков приняты следующие значения параметров:

$$u^0 = 1, u^1 = 0.1, k = 0.1, H = 50.$$

$$\begin{aligned}
 b1 &:= u0 \cdot (k - 1) + u1 \cdot k \cdot e^{-k \cdot H} & b2 &:= u1 \cdot (k - 1) + u0 \cdot k \cdot e^{-k \cdot H} \\
 A &:= \begin{pmatrix} 1 & -e^{-k \cdot H} \\ e^{-k \cdot H} & -1 \end{pmatrix} & B &:= \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix} & X &:= \begin{pmatrix} du0 \\ du1 \end{pmatrix} \\
 A^{-1} \cdot B \text{ simplify} &\rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{(-u0) \cdot k + u0 - e^{(-k) \cdot H} \cdot u1 + e^{(-2) \cdot k \cdot H} \cdot u0 \cdot k}{(-1) + e^{(-2) \cdot k \cdot H}} \\ -\frac{[-e^{(-k) \cdot H}] \cdot u0 + u1 \cdot k \cdot e^{(-2) \cdot k \cdot H} - u1 \cdot k + u1}{(-1) + e^{(-2) \cdot k \cdot H}} \end{array} \right] \\
 du0 &:= \frac{(-u0) \cdot k + u0 - e^{(-k) \cdot H} \cdot u1 + e^{(-2) \cdot k \cdot H} \cdot u0 \cdot k}{(-1) + e^{(-2) \cdot k \cdot H}} \\
 du1 &:= \frac{-\frac{[-e^{(-k) \cdot H}] \cdot u0 + u1 \cdot k \cdot e^{(-2) \cdot k \cdot H} - u1 \cdot k + u1}{(-1) + e^{(-2) \cdot k \cdot H}}}{(-1) + e^{(-2) \cdot k \cdot H}}
 \end{aligned}$$

Обозначения переменных в программе согласованы с формулами в тексте и практически не требует комментариев. Отметим лишь, что  $du0$  и  $du1$  соответствуют  $u'_0$  и  $u'_1$ .

### 1.8. О решении систем линейных алгебраических уравнений

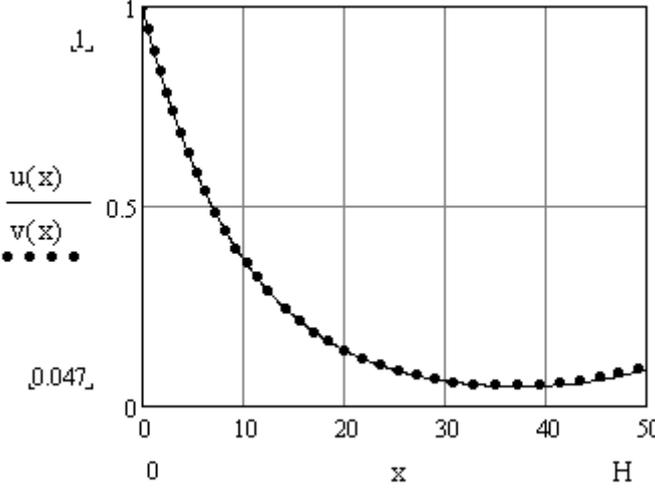
Численное решение стационарных краевых задач геоэлектрики сводит дифференциальные задачи к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно вектора неизвестных значений искомой функции в узлах сетки  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$  с матрицей коэффициентов  $A$  размера  $N \times N$  и правой частью  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^N$ :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (1.8.1)$$

Методы решения СЛАУ можно разбить на две основные группы: *прямые* и *итерационные* [Самарский, Гулин, 2003; Дмитриев и др., 1990]. Обычно (кроме МИУ) матрица системы (1.8.1) – разреженная. В МКР и МКЭ эта матрица может оказаться трехдиагональной. В этом случае при решении краевых задач для уравнений эллиптического типа система уравнений может быть решена

прямым методом (вариантом метода Гаусса) – *методом прогонки* [Дмитриев и др., 1990]. При решении краевых задач большей размерности (двумерных и трехмерных) прямые методы решения СЛАУ могут оказаться неустойчивыми и

Таблица 1.7.2

<p><i>Операторы</i></p> <p><i>MathCAD</i></p>	<p><i>Исходные данные:</i></p> $u_0 := 1 \quad u_1 := 0 \quad k := 0.1 \quad H := 50$ $u(x) := du_1 \cdot e^{-k \cdot (H-x)} - du_0 \cdot e^{-k \cdot x} + u_0 \cdot k \cdot e^{-k \cdot x}$ $v(x) := u_0 \cdot \frac{\sinh[k \cdot (H-x)]}{\sinh(k \cdot H)} + u_1 \cdot \frac{\sinh(k \cdot x)}{\sinh(k \cdot H)}$
<p><i>Сравнение графиков</i></p>	

приводить к большим погрешностям из-за накопления ошибок округлений в процессе вычислений. В этом случае, как правило, системы (1.8.1) решаются итерационными методами или вариантами прямых методов с предварительным изменением СЛАУ (предобуславливание), обеспечивающим устойчивость вычислительных алгоритмов. Некоторые из этих алгоритмов, допускающих обобщение на задачи большей размерности, удобно проиллюстрировать на решении СЛАУ, получающихся при численном решении одномерных задач.

## 1.8.1. Прямые методы

### А. Метод прогонки

Метод предназначен для решения СЛАУ с трехдиагональной невырожденной матрице,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 + c_1 x_2 = b_1, \\ d_2 x_1 + a_2 x_2 + c_2 x_3 = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ d_m x_{m-1} + a_m x_m + c_m x_{m+1} = b_m, \\ \dots\dots\dots \\ d_{n-1} x_{n-2} + a_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = b_{n-1}, \\ d_n x_n + a_n x_{n+1} = b_n. \end{array} \right. \quad (1.8.2)$$

в которой выполнено условие диагонального преобладания

$$|a_m| \geq |d_m| + |c_m|. \quad (1.8.3)$$

и хотя бы для одного  $m$  выполняется строгое неравенство. Прогонка состоит из двух шагов. Прямой ход прогонки приводит трехдиагональную матрицу к двухдиагональному виду по формулам

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{c_1}{a_1}, \quad g_1 = -\frac{b_1}{a_1}; \\ e_m &= -\frac{c_m}{a_m + d_m e_{m-1}}, \quad g_m = \frac{b_m - d_m g_{m-1}}{a_m + d_m e_{m-1}}, \quad m = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Обратный ход прогонки позволяет вычислить все неизвестные по формулам

$$x_n = -\frac{b_n - d_n g_{n-1}}{a_n + d_n e_{n-1}}, \quad x_m = x_{m+1} e_m + g_m, \quad m = n-1, \dots, 1. \quad (1.8.4)$$

Обобщение алгоритма на задачи большей размерности носит название метода *матричной прогонки* [Самарский, Гулин, 2003].

### Б. Спектральный подход

Стационарная задача. Пусть симметричная самосопряженная матрица  $A$  в (1.8.1) имеет  $N$  собственных векторов  $e_m \in \mathbb{R}^N$  и соответствующих им различных собственных значений  $\lambda_m$ , т.е. таких, что имеет место равенство

$$A\mathbf{e}_m = \lambda_m \mathbf{e}_m, m = 1, \dots, N. \quad (1.8.5)$$

В этом случае система собственных векторов  $\{\mathbf{e}_m\}_{m=1}^N$  является базисом в  $\mathbf{R}^N$  и любой элемент  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$  может быть представлен в виде суммы (см. формулы (1.0.10) – (1.0.15))

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^N x_m \mathbf{e}_m. \quad (1.8.6)$$

Разложим вектор  $\mathbf{b}$  по этому же базису

$$\mathbf{b} = \sum_{m=1}^N b_m \mathbf{e}_m. \quad (1.8.7)$$

Подставляя (1.8.6) и (1.8.7) в (1.8.1), получим

$$A \sum_{m=1}^N x_m \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^N b_m \mathbf{e}_m \Rightarrow \sum_{m=1}^N x_m A \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^N b_m \mathbf{e}_m \Rightarrow \sum_{m=1}^N x_m \lambda_m \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^N b_m \mathbf{e}_m.$$

Последнее равенство позволяет найти неизвестные коэффициенты

$$x_m, m = 1, \dots, N$$

$$x_m \lambda_m = b_m \Rightarrow x_m = b_m / \lambda_m.$$

Подставляя найденные значения  $x_m$  в (1.8.6), получим решение уравнения

(1.8.1)

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^N \frac{b_m}{\lambda_m} \mathbf{e}_m. \quad (1.8.8)$$

Эволюционная задача. При численном решении краевых эволюционных задач (с уравнениями параболического типа) вместо системы (1.8.1) приходят к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с такой же матрицей  $A$ , как и (1.8.1)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + A\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(t), t > 0, \\ \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{g}, \end{cases}. \quad (1.8.9)$$

в которой начальное условие задает постоянный вектор  $\mathbf{g}$ . Пусть матрица  $A$  такова, что остаются в силе высказанные выше относительно ее предположения. Примем

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^N x_m(t) \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{b}(t) = \sum_{m=1}^N b_m(t) \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{g} = \sum_{m=1}^N g_m \mathbf{e}_m \quad (1.8.10)$$

и подставим эти разложения векторов в (1.8.9). С учетом (1.8.5) после простых преобразований найдем

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^N \frac{dx_m(t)}{dt} \mathbf{e}_m + \sum_{m=1}^N \lambda_m x_m(t) \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^N b_m(t) \mathbf{e}_m, \\ \sum_{m=1}^N x_m \mathbf{e}_m \Big|_{t=0} = \sum_{m=1}^N g_m \mathbf{e}_m. \end{cases}$$

Отсюда следует, что каждая компонента  $x_m(t)$  вектора  $\mathbf{x}(t)$  является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx_m(t)}{dt} + \lambda_m x_m(t) = b_m(t), \\ x_m \Big|_{t=0} = g_m. \end{cases} \quad (1.8.11)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$x_m(t) = g_m e^{-\lambda_m t} + \int_0^t b_m(\tau) e^{-\lambda_m(t-\tau)} d\tau \quad (1.8.12)$$

удовлетворяет уравнению и начальным условиям задачи (1.8.11).

Следовательно, решение системы (1.8.9) дает формула

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^N x_m(t) \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^N \left( g_m e^{-\lambda_m t} + \int_0^t b_m(\tau) e^{-\lambda_m(t-\tau)} d\tau \right) \mathbf{e}_m. \quad (1.8.13)$$

Если процесс установился, то решение  $\mathbf{x}$  и вектор  $\mathbf{b}$  от времени не зависят.

Пусть  $\lambda_m > 0$ , тогда при  $t \rightarrow \infty$  получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \left( g_m e^{-\lambda_m t} + b_m e^{-\lambda_m t} \int_0^t e^{\lambda_m \tau} d\tau \right) \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^N \frac{b_m}{\lambda_m} \mathbf{e}_m. \quad (1.8.14)$$

Как и следовало ожидать, формулы (1.8.8) и (1.8.14) совпадают.

*Обобщение.* При решении двумерных и трехмерных задач на основе спектрального подхода полную спектральную проблему реализовать затруднительно, поэтому ограничиваются частичным ее решением, отыскивая

несколько (к примеру,  $n$ ) основных собственных векторов и собственных значений. Они позволяют приближенно найти вектор решения  $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) \approx \sum_{m=1}^{n < N} x_m(t) \mathbf{e}_m.$$

Для решения этой задачи иногда используют алгоритм Ланцоша в пространствах Крылова [Деммель, 2001; Друскин, Книжнерман, 1987].

### 1.8.2. Итерационные методы

Итерационные методы обычно применяются тогда, когда матрица  $A$  разрежена и имеет большой порядок. Именно такая структура матрицы СЛАУ получается при численном решении задач математической физики (и геоэлектрики, в частности). Эти методы требуют гораздо меньше оперативной памяти, хотя и требуют больше времени на исполнение.

Метод Якоби (метод простой итерации).

Поясним сущность метода на простом примере СЛАУ [Райс, 1984]:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -2, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases} \quad (1.8.20)$$

Обозначим

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

и запишем систему (1.8.20) в матрично-векторной форме

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Запишем эту же систему в эквивалентном виде

$$\begin{cases} x_1 = (7 - 4x_2 + x_3)/3, \\ x_2 = (-2 - 2x_1 - 3x_3)/6, \\ x_3 = (4 + x_1 - x_2)/4. \end{cases}$$

Обозначим

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -4/3 & 1/3 \\ -2/6 & 0 & -3/6 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} := \begin{pmatrix} 7/3 \\ -2/6 \\ 4/4 \end{pmatrix}.$$

Зададим начальное приближение к решению  $\mathbf{x}^0$ . В этих обозначениях метод Якоби заключается в применении итерационного процесса

$$\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{g}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.8.21)$$

где  $k$  – номер итерации.

### Метод Зейделя или Гаусса-Зейделя.

Систему (1.8.20) запишем в виде

$$\begin{cases} 3x_1 & = -4x_2 + x_3 + 7, \\ 2x_1 + 6x_2 & = -3x_3 - 2, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 & = 4. \end{cases}$$

Примем обозначения

$$D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} := \mathbf{b}.$$

Здесь матрица  $D$  диагональ матрицы  $A$ ,  $L$  – ее нижняя треугольная часть, а  $U$  – верхняя треугольная часть, так что  $A = L + D + U$ . Выберем начальное приближение  $\mathbf{x}^0$ . Метод Зейделя состоит в выполнении итераций

$$(L + D)\mathbf{x}^{k+1} = -U\mathbf{x}^k + \mathbf{g}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.8.21_1)$$

Отличие метода Зейделя от метода Якоби состоит в том, что новые значения  $x_m^k$  используются сразу же по мере получения, в то время как в методе Якоби они не используются до следующей итерации. Если матрица  $A$  симметричная и положительно определенная, то метод Зейделя сходится в 2 раза быстрее метода Якоби.

Вопросы сходимости методов Якоби и Зейделя здесь не будут рассматриваться. Отметим только, что при численном решении задач геоэлектрики условиями сходимости этих итерационных методов, как правило, выполняются.

### Метод последовательной верхней релаксации (SOR)

Этот метод использует итерационный шаг по методу Зейделя  $\mathbf{x}_S^{k+1}$  и решение  $\mathbf{x}^k$  на предыдущем шаге метода SOR и из них конструирует новое приближение. Символически это можно представить так

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + Q(\mathbf{x}_S^{k+1} - \mathbf{x}^k), k = 1, 2, \dots \quad (1.8.22)$$

где  $Q$  – диагональная матрица параметров релаксации. В простейшем случае вместо матрицы  $Q$  берут число  $q$ . Априорный выбор оптимальных величин параметров релаксации затруднителен, поэтому зачастую они приближенно оцениваются экспериментально в процессе выполнения итераций.

Метод спуска. Рассмотрим идеи решения уравнения (1.8.1) по методу покоординатного и градиентного (наискорейшего) спуска, а также методом сопряженных градиентов.

Пусть матрица  $A$  системы уравнений (1.8.1) симметрична и положительно определена. Примем

$$F(\mathbf{y}) = (A\mathbf{y}, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{b}, \mathbf{y}), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T \in \square^N. \quad (1.8.23)$$

Функции многих переменных  $F(\mathbf{y})$  имеет единственный минимум, который достигается на векторе  $\mathbf{x}$ , являющимся решением системы (1.8.1):

$$\min_{\mathbf{y} \in \square^N} F(\mathbf{y}) = \mathbf{x}.$$

*Методы спуска* реализуют разные алгоритмы отыскания глобального минимума функции  $F(\mathbf{y})$ .

*Покоординатный спуск.* Пусть  $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, \dots, y_N^0)^T$ .

1. Зафиксируем все переменные  $y_2, \dots, y_N$ , кроме переменной  $y_1$ , положив  $\mathbf{y}_1 = (y_1, y_2^0, \dots, y_N^0)^T$ . Тогда функция  $F(y_1, y_2^0, \dots, y_N^0)$  будет являться функцией одной переменной  $y_1$  – полиномом второго порядка (параболой). Пусть ее минимум достигается при  $y_1 = y_1^1$ .
2. Положим  $y_1 = y_1^1$  и будем считать переменной компоненту  $y_2$  и оставим прежними значения  $y_m = y_m^0, m = 3, \dots, N$ . Сейчас функция

$F(y_1^1, y_2, y_3^0, \dots, y_N^0)$  будет зависеть от одной переменной  $y_2$ . Пусть ее минимум достигается при  $y_2 = y_2^1$ .

3. Продолжая процесс для всех переменных, получим вектор  $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, \dots, y_N^1)^T$ .
4. Далее процесс циклически повторяют и последовательно находят векторы  $\mathbf{y}^k = (y_1^k, \dots, y_N^k)^T, k = 2, 3, \dots$

*Градиентный спуск.* Пусть функция  $F(\mathbf{y})$  и матрица  $A$  те же самые, что и в (1.8.23). Как известно, градиент  $F(\mathbf{y})$  равен

$$\text{grad } F(\mathbf{y}) = \left( \frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_N} \right)^T.$$

Найдем производные функции  $F(\mathbf{y})$ . В качестве примера возьмем матрицу  $A$  размера  $2 \times 2$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{y} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)y_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)y_2, \\ (\mathbf{b}, \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = b_1y_1 + b_2y_2. \end{aligned}$$

С учетом симметричности матрицы коэффициентов имеем

$$(\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (a_{11}y_1y_1 + a_{12}y_2y_1) + (a_{21}y_1y_2 + a_{22}y_2y_2) = a_{11}y_1y_1 + 2a_{12}y_2y_1 + a_{22}y_2y_2.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y})}{\partial y_1} &= 2a_{11}y_1 + 2a_{12}y_2, & \frac{\partial (\mathbf{b}, \mathbf{y})}{\partial y_1} &= b_1; \\ \frac{\partial (\mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y})}{\partial y_2} &= 2a_{12}y_1 + 2a_{22}y_2, & \frac{\partial (\mathbf{b}, \mathbf{y})}{\partial y_2} &= b_2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathit{grad} F(\mathbf{y}) &= \left( \frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^T = \begin{pmatrix} 2a_{11}y_1 + 2a_{12}y_2 - 2b_1 \\ 2a_{12}y_1 + 2a_{22}y_2 - 2b_2 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \left[ \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right] = 2(\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y} = -\frac{1}{2} \mathit{grad} F(\mathbf{y}).$$

Эта формула верна для любой квадратной матрицы коэффициентов  $A$  размера  $N \times N$ . Обозначим

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}) := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

Тогда

$$r(\mathbf{y}) := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y} = -\frac{1}{2} \mathit{grad} F(\mathbf{y}).$$

Приближения в методе наискорейшего спуска определяют согласно формуле

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k - \alpha_k \mathit{grad} F(\mathbf{y}^k) = \mathbf{y}^k + \alpha_k 2\mathbf{r}^k, \quad \mathbf{r}^k = \mathbf{r}(\mathbf{y}^k). \quad (1.8.24)$$

Так как

$$2\mathbf{r}^k = 2\mathbf{r}(\mathbf{y}^k) := 2(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y}^k) = -\mathit{grad}F(\mathbf{y}^k),$$

то можно говорить, что на  $(k+1)$ -ой итерации вектор  $\mathbf{y}^{k+1}$  получают сдвигом вектора  $\mathbf{y}^k$ , вычисленного на  $k$ -той итерации, на величину вектора – антиградиента, направленного в направлении быстреешего убывания функции  $F(\mathbf{y})$ . Параметр  $\alpha_k$  определяют из условия касания этого направления линии уровня функции  $F(\mathbf{y})$ , поэтому

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{y}^k - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\mathbf{y}^k - \mathbf{b})}{(\mathbf{A}\mathbf{y}^k - \mathbf{b})^T \mathbf{A} (\mathbf{A}\mathbf{y}^k - \mathbf{b})} = \frac{(\mathbf{r}^k)^T \mathbf{r}^k}{(\mathbf{r}^k)^T \mathbf{A} \mathbf{r}^k}. \quad (1.8.25)$$

Известно, что метод сходится для любой СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей  $A$  со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой  $q = (\beta - \alpha) / (\beta + \alpha)$ , если  $\beta, \alpha$

соответственно максимальное и минимальное собственные значения матрицы  $A$ .

Метод сопряженных градиентов (*метод Conjugate Gradients* или *метод CG*). Здесь мы не будем делать вывод расчетных формул. Подробное изложение теории метода CG можно найти, например, в книге [Деммель, 2001]. Используя обозначения, введенные при описании метода наискорейшего спуска, метод CG определяется формулами [Дмитриев и др., 1990]

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^0 &= \mathbf{r}^0, \quad \alpha_k = (\mathbf{r}^k)^T \mathbf{p}^k / (\mathbf{p}^k)^T A \mathbf{p}^k, \\ \mathbf{y}^{k+1} &= \mathbf{y}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k, \quad \mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \alpha_k A \mathbf{p}^k, \\ \beta_k &= -(\mathbf{r}^{k+1})^T A \mathbf{p}^k / (\mathbf{p}^k)^T A \mathbf{p}^k, \quad \mathbf{p}^k = \mathbf{r}^{k+1} + \beta_k \mathbf{p}^k. \end{aligned} \quad (1.8.26)$$

Как видим, алгоритм этого метода не намного сложнее метода градиентного спуска, но он обладает рядом преимуществ. В частности, метод CG дает точное решение за число шагов  $k \leq n$ . С этой точки зрения его можно отнести к прямым методам.

Программа решения СЛАУ по методу CG приведена в сборнике алгоритмов [Уилкинсон, Райнш, 1976].

### **1.9. Альтернирующий метод Шварца**

Как отмечалось во Введении, при численном решении прямых задач математической физики нередко используются так называемые *гибридные* алгоритмы композиционного и декомпозиционного типа. *Декомпозиционные* методы основаны на расчленении исходной сложной задачи на ряд более простых подзадач, каждая из которых решается независимо. Сюда относится декомпозиционный альтернирующий метод (ДАМ), являющийся обобщением альтернирующего метода Шварца<sup>14</sup> (АМШ) на скалярные и векторные задачи геоэлектрики [Юдин, 1982; Ваньян, Дебабов, Юдин, 1984; Юдин, 1985; Юдин, Юдин, 2004].

<sup>14</sup> Метод предложен Шварцем в шестидесятых годах прошлого столетия применительно к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа

ДАМ позволяет:

- решение задачи в неограниченном пространстве разделить на две более простые подзадачи, одна из которых - внутренняя краевая задача - решается численно в ограниченной области, содержащей локальную неоднородность; другая - внешняя краевая задача - решается посредством функций или тензоров Грина, аналитически или асимптотическими методами;
- путем *вторичной декомпозиции* решение сложной внутренней краевой задачи свести к последовательности более простых задач;
- выполнить итерационную рекомпозицию общего решения.

В ДАМ связь между частными задачами устанавливается через краевые условия, что обеспечивает большие вычислительные преимущества по отношению к композиционным методам, т.к. структура матриц систем разностных уравнений остается без изменения. Поэтому декомпозиция на основе алгоритма Шварца является

- удобным аппаратом для выполнения *параллельных* вычислений на многопроцессорных ЭВМ,
- идеальным методом решения *обратных задач* методом подбора в режиме *интерактивного графического диалога*.

Декомпозиция сложной задачи по алгоритму Шварца особенно важна при решении двумерных и трехмерных задач. Решение задачи в неограниченном пространстве позволяет сконструировать из конечного числа более простых подзадач. Часть из них будут являться краевыми задачами в ограниченных областях и могут быть решены численно. Другая часть краевых задач должна быть решена в неограниченных областях; они, как правило, допускают аналитическое решение. Метод Шварца позволяет согласовать решения внутренних краевых задач, полученных посредством таких универсальных методов как метод сеток или конечных элементов, и решений внешних краевых задач спектральными методами или методом интегральных уравнений, а в некоторых простых случаях и аналитическими решениями. Менее ограничительным становится предположение о локальном характере двух- или

трехмерной неоднородности, существенным образом использующееся при численном решении внутренних краевых задач геоэлектрики.

На основе ДАМ можно построить алгоритмы решения двумерной задачи для геофизического профиля, вообще говоря, сколь угодно большой протяженности, что особенно важно для интерпретации результатов профильных электроразведочных работ.

### 1.9.1. Решение задачи Дирихле для суммы двух областей по методу Шварца

Следуя Л.В.Канторовичу и В.И.Крылову [1962], приведем краткое описание алгоритма АМШ при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области  $D$  с границей  $\partial D$ :

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in D, \\ u|_{\partial D} = \varphi(M), M \in \partial D. \end{cases} \quad (1.9.1)$$

Будем полагать, что функция  $\varphi(x, y)$  кусочно-непрерывна.

Метод заключается в следующем: пусть в плоскости  $(x, y)$  даны две области  $D_1$  и  $D_2$  с границами  $\partial D_1$  и  $\partial D_2$ , имеющие непустое пересечение  $D_{12}$  ( $D_{12} = D_1 \cap D_2$ ). Предполагается известным метод решения задач Дирихле в каждой из областей  $D_1$  и  $D_2$  при любых непрерывных или кусочно-непрерывных граничных данных.

Назовем  $\alpha$  часть границы  $\partial D_1$  области  $D_1$ , лежащую внутри  $D_2$ , и  $\alpha \square$  оставшуюся часть  $\partial D_1$ . Аналогично назовем  $\beta$  часть границы  $\partial D_2$  области  $D_2$ , лежащую внутри  $D_1$  и  $\beta$  – оставшуюся часть (см. рис. 1.9.1).

Будем считать, что  $\alpha$ ,  $\alpha \square$ ,  $\beta$  и  $\beta \square$  состоят из конечного числа кусочно-гладких дуг без точек самопересечения. Границей суммы  $D = D_1 \cup D_2$  заданных областей, очевидно, будет  $\partial D = \alpha \cup \beta$ .

Начнем с решения задачи в области  $D_1$ . Граничные значения здесь заданы только на части  $\alpha$  ее контура  $\partial D_1$ . Зададим произвольно на  $\alpha$  функцию  $\phi(M)$ , подчинив ее единственному условию, чтобы вместе со значениями  $\varphi(M)$  на  $\alpha \square$

она давала бы кусочно-непрерывную функцию на всем контуре  $\partial D_1$  области  $D_1$ .

Построим функцию  $u_1(x, y)$ , решающую задачу Дирихле для уравнения (1.9.1) в  $D_1$  при граничном условии:

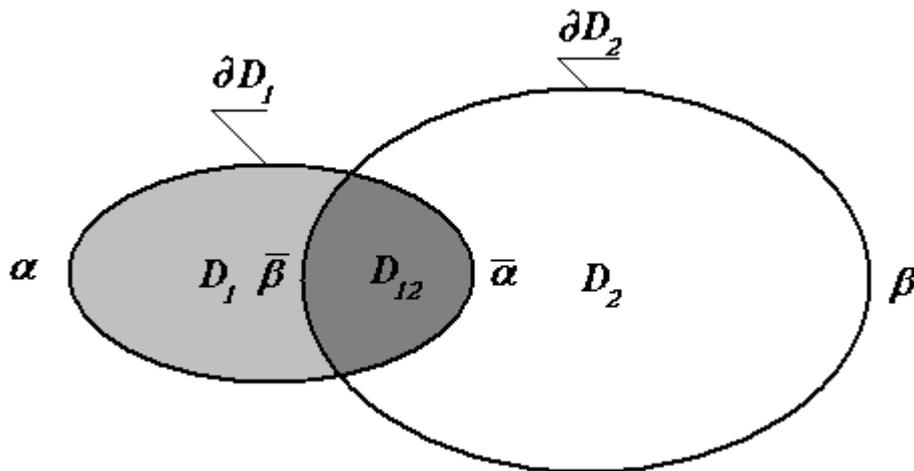


Рис. 1.9.1. К иллюстрации алгоритма Шварца.

$$u_1(x, y) = \begin{cases} \varphi(M), & M \in \alpha \\ \phi(M), & M \in \bar{\alpha} \end{cases} \quad (1.9.2)$$

Ее примем за первое приближение к  $u(x, y)$  в  $D_1$ . По найденной  $u_1(x, y)$  построим функцию  $v_1(x, y)$ , являющуюся решением задачи Дирихле в области  $D_2$  при граничных условиях:

$$v_1(x, y) = \begin{cases} \varphi(M), & M \in \beta \\ u_1(M), & M \in \bar{\beta} \end{cases} \quad (1.9.3)$$

$v_1(x, y)$  есть первое приближение к  $v(x, y)$  в  $D_2$ . По  $v_1(x, y)$  строим второе приближение  $u_2(x, y)$  к  $u(x, y)$  в  $D_1$  как решение задачи Дирихле для (1.9.1) при граничном условии:

$$u_2(x, y) = \begin{cases} \varphi(M), & M \in \alpha \\ v_1(M), & M \in \bar{\alpha} \end{cases} \quad (1.9.4)$$

и т. д.

$k$ -е приближения  $u_k(x, y)$  и  $v_k(x, y)$  в областях  $D_1$  и  $D_2$ . мы определим через предыдущие приближения как решения задач Дирихле при граничных требованиях:

$$u_k(x, y) = \begin{cases} \varphi(M), M \in \alpha \\ v_{k-1}(M), M \in \bar{\alpha} \end{cases}, \quad v_k(x, y) = \begin{cases} \varphi(M), M \in \beta \\ u_k(M), M \in \bar{\beta} \end{cases}.$$

В каждой из областей  $D_1$  и  $D_2$  мы построили последовательности приближений к искомому решению  $u(x, y)$ :

$$\begin{aligned} u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y), \dots \quad (x, y) \in D_1, \\ v_1(x, y), v_2(x, y), \dots, v_n(x, y), \dots \quad (x, y) \in D_2. \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

Шварц доказал, что последовательностей (1.9.5) сходятся и предельные функции удовлетворяют уравнению (1.9.1) и нужным нам граничным условиям. Таким образом, путем последовательного решения задач в каждой из областей  $D_1$  и  $D_2$  в пределе можно получить точное решение задачи Дирихле (1.9.1) для области  $D = D_1 \cup D_2$ .

Л.В.Канторович и В.И.Крылов [1962] обобщили алгоритм Шварца и показали, что он с успехом может быть применен для существенно более широкого класса задач, связанных с решением дифференциальных и интегральных уравнений. Располагая решениями для относительно узкого класса частичных областей и комбинируя области в согласии с алгоритмом Шварца, можно получить явное решение для областей весьма сложной формы. На этом пути открывается возможность организации параллельных вычислений на мультипроцессорных компьютерах.

Вопросы сходимости АМШ рассмотрены в монографиях [Канторович, Крылов. 1962, Завадский, 1972].

Далее на простых одномерных задачах геоэлектрики покажем сходимость метода Шварца и оценим скорость приближения итерационного процесса к точному решению дифференциальной задачи в зависимости от параметров алгоритма. Сходимость ДАМ для более сложных моделей обсуждается в диссертации автора [Юдин, 1985].

## 1.9.2. Стационарные задачи геоэлектрики

### А. Однородное полупространство.

Проиллюстрируем сущность алгоритма и оценим скорость сходимости *альтернирующего метода Шварца* на простейшей задаче геоэлектрики, имеющей аналитическое решение.

Пусть требуется по алгоритму Шварца решить краевую задачу на полупрямой  $z > 0$  при постоянном значении волнового числа  $k$ :

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dz^2} = k^2 U, \quad k = \text{const}, \\ U|_{z=0} = u_0; \quad U \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (1.9.6)$$

Решение задачи (1.9. 6) очевидно:

$$U(z) = u_0 e^{-kz}.$$

Построим решение задачи (1.9.6) посредством АМШ, исходя из предположения, что оно нам неизвестно. В согласии с алгоритмом Шварца решение будем искать посредством поочередного решения двух связанных между собой подзадач при  $m = 1, 2, \dots$  (см. таблицу 1.9.1 и изображение модели в правой части рис. 1.9.4). В общем случае величина  $H$  выбирается исходя из некоторых априорных соображений, которые здесь обсуждать не будем.

Таблица 1.9.1

Подзадача 1 в области $0 < z < H$	Подзадача 2 в области $h < z < +\infty$
$\begin{cases} \frac{d^2 u^{(2m-1)}}{dz^2} = k^2 u^{(2m-1)}, \quad z \in (0, H); \\ u^{(2m-1)} _{z=0} = u_0, \quad u^{(2m-1)} _{z=H} = \begin{cases} u^{(0)} = a; \\ u^{(2m-2)}(H). \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{d^2 u^{(2m)}}{dz^2} = k^2 u^{(2m)}, \quad z \in (h, \infty), \quad h < H; \\ u^{(2m)} _{z=h} = u^{(2m-1)}(h); \quad u^{(2m-1)} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \end{cases}$

Решение выполняется в два этапа. На первом этапе (методом последовательных приближений) строится решение во внутренней точке

полубесконечного интервала при  $z = H$ . После того, как оно будет найдено (и будет совпадать с решением исходной задачи), решения вспомогательных задач (каждая на своем интервале) будут давать решение задачи (1.9.6).

*Этап 1. Построение решения в точке  $z = H$ .*

Можно было бы определить первый этап как шаг вычислений, целью которого является построение краевого условия на нижней границе области подзадачи 1. Последовательность решений  $\{u^{(k)}\}$  начинается с подзадачи 1 с произвольно заданным краевым условием на нижней границе  $u^{(0)}(H) = a$ .

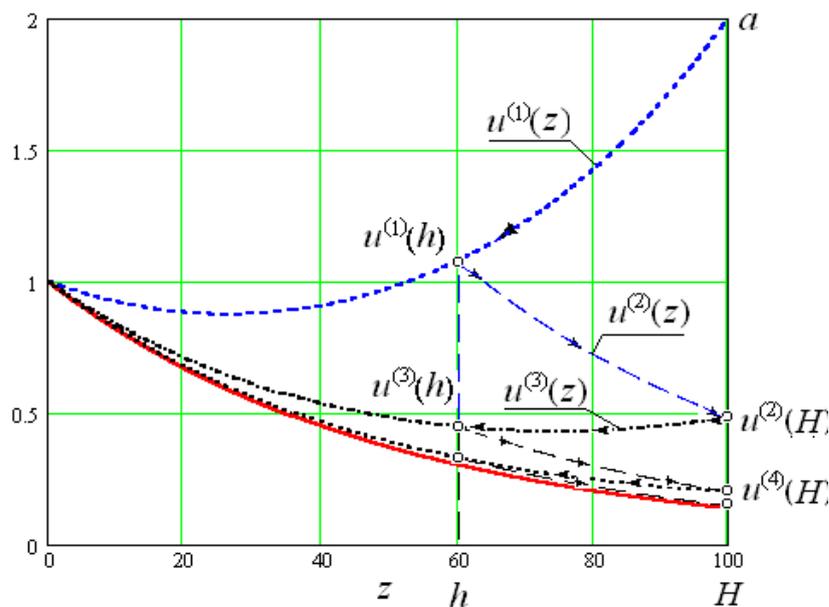
При  $m = 1$  ее решение описывает формула (см. часть 1 Пособия и рис.1.9.2)

$$u^{(1)}(z) = u_0 \hat{q}_1(z, k, H) + a \hat{q}_2(z, k, H),$$

$$\hat{q}_2(z, k, H) = \frac{\text{sh}(kz)}{\text{sh} kH}, \quad \hat{q}_1(z, k, H) = \hat{q}_2(H - z, k, H) = \frac{\text{sh}[k(H - z)]}{\text{sh} kH}, \quad (1.9.7)$$

а вторая подзадача с учетом найденного выражения для  $u^{(1)}(z)$  имеет решение

$$u^{(2)}(z) = u^{(1)}(h) \exp[-k(z - h)] = \left[ u_0 \frac{\text{sh}[k(H - h)]}{\text{sh} kH} + a \frac{\text{sh} kh}{\text{sh} kH} \right] \exp[-k(z - h)].$$



*Рис. 1.9.2. Иллюстрация сходимости алгоритма Шварца*

Таким образом, на втором шаге при  $z = H$  получим решение

$$u^{(2)}(H) = \left\{ u_0 \frac{\text{sh}[k(H-h)]}{\text{sh } kH} + a \frac{\text{sh } kh}{\text{sh } kH} \right\} \exp[-k(H-h)]. \quad (1.9.8)$$

Введем обозначения

$$p_1 := \frac{\text{sh}[k(H-h)]}{\text{sh } kH} \exp[-k(H-h)], \quad p_2 := \frac{\text{sh } kh}{\text{sh } kH} \exp[-k(H-h)]., \quad (1.9.9)$$

Тогда (1.9.8) примет вид:

$$u^{(2)}(H) = u_0 p_1 + a p_2.$$

Обобщая последнее равенство, можно записать рекуррентную формулу

$$u^{(2m)}(H) = u_0 p_1 + u^{(2m-2)} p_2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует

$$u^{(2m)}(H) = u_0 p_1 \sum_{l=0}^{m-1} p_2^l + a p_2^m = u_0 p_1 \frac{1-p_2^m}{1-p_2} + a p_2^m.$$

С учетом того, что  $|p_1| < 1$ ,  $|p_2| < 1$  (см. рис. 1.9.3б) при  $m \rightarrow \infty$  имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u^{(2m)}(H) = u_0 \frac{p_1}{1-p_2}.$$

Посредством соотношений для  $p_1$  и  $p_2$  из (1.9.8) можно доказать тождество (см. Таблицу 1.9.2)

$$\frac{p_1}{1-p_2} = \exp(-kH), \quad (1.9.10)$$

Итак, при  $z = H$  получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u^{(2m)}(H) = e^{-kH},$$

что совпадает с решением задачи (1.9.6). Первый этап решения на этом завершается.

Нужно показать, что решения обеих подзадач в своих интервалах совпадают с решением общей исходной задачи.

$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $p1(h, H, k) := \frac{\sinh[k \cdot (H - h)]}{\sinh(k \cdot H)} \cdot e^{-[k \cdot (H - h)]} \quad p2(h, H, k) := \frac{\sinh(k \cdot h)}{\sinh(k \cdot H)} \cdot e^{-k \cdot (H - h)}$ $u(h, H, k) := \frac{p1(h, H, k)}{1 - p2(h, H, k)} \quad k := 1 \quad u(h, H, k) \quad \left  \begin{array}{l} \text{expand, } e^{-k \cdot H} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow e^{-H}$
<p><i>Доказательство тождества (1.9.5) посредством символьных вычислений на MathCADe при <math>k = 1</math>.</i></p>

*Этап 2. Построение решения задачи (1.9.6).*

*Первая подзадача.* Теперь, когда найдено решение при  $z = H$ , первая подзадача принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = k^2 u, \quad z \in (0, H), \quad u|_{z=0} = u_0, \quad u|_{z=H} = u_0 e^{-kH}.$$

Ее решением является функция

$$u(z) = A e^{kz} + B e^{-kz}, \quad 0 < z < H,$$

где  $A$  и  $B$  – неопределенные коэффициенты. Найдем их из системы

$$\begin{cases} u(0) \equiv A + B = u_0, \\ u(H) \equiv A e^{kH} + B e^{-kH} = u_0 e^{-kH}. \end{cases}$$

Из системы находим, что  $A = 0$  и  $B = u_0$ , поэтому  $u(z) = u_0 e^{-kz}$ .

*Вторая подзадача* сейчас приобретает вид

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} = k^2 u, \quad z \in (h, \infty), \quad h < H; \\ u|_{z=h} = u_0 e^{-kh}; \quad u^{(2m-1)} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Она имеет решение  $u(z) = u_0 e^{-kh} \cdot e^{-k(z-h)} = u_0 e^{-kz}$ ,  $z > h$ .

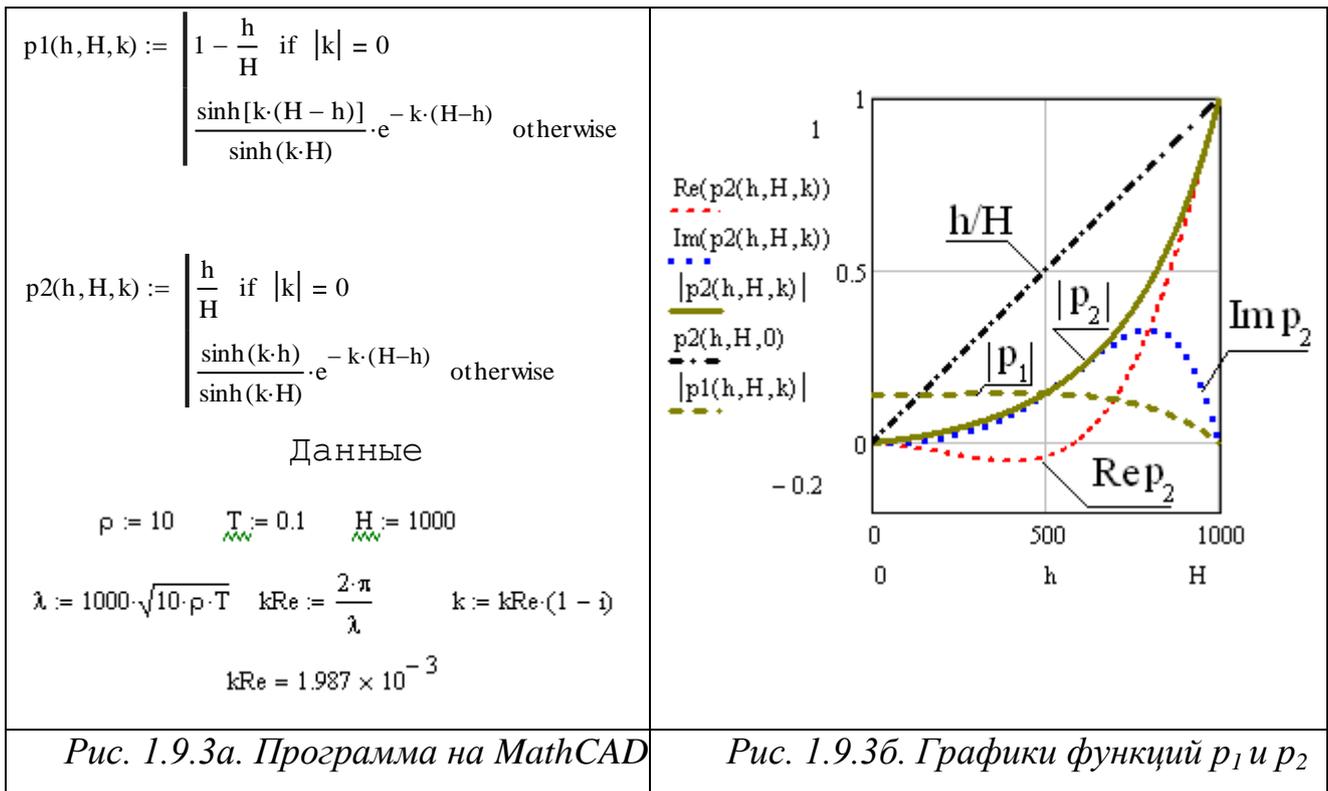
Итак, показали, что при любом  $z$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u^{(2m)}(z) = u(z) = u_0 \exp(-kz). \quad (1.9.11)$$

Из приведенных выкладок следует, что метод Шварца в однородной среде будет сходиться, т.к. при  $h < H$

$$|p_2| = \left| \frac{sh(kh)}{sh(kH)} \exp[-k(H-h)] \right| \leq h/H < 1, \lim_{k \rightarrow 0} p_2 = h/H < 1. \quad (1.9.12)$$

Программа расчета функций  $p_1$  и  $p_2$  и их графики приведены на рис 1.9.3.

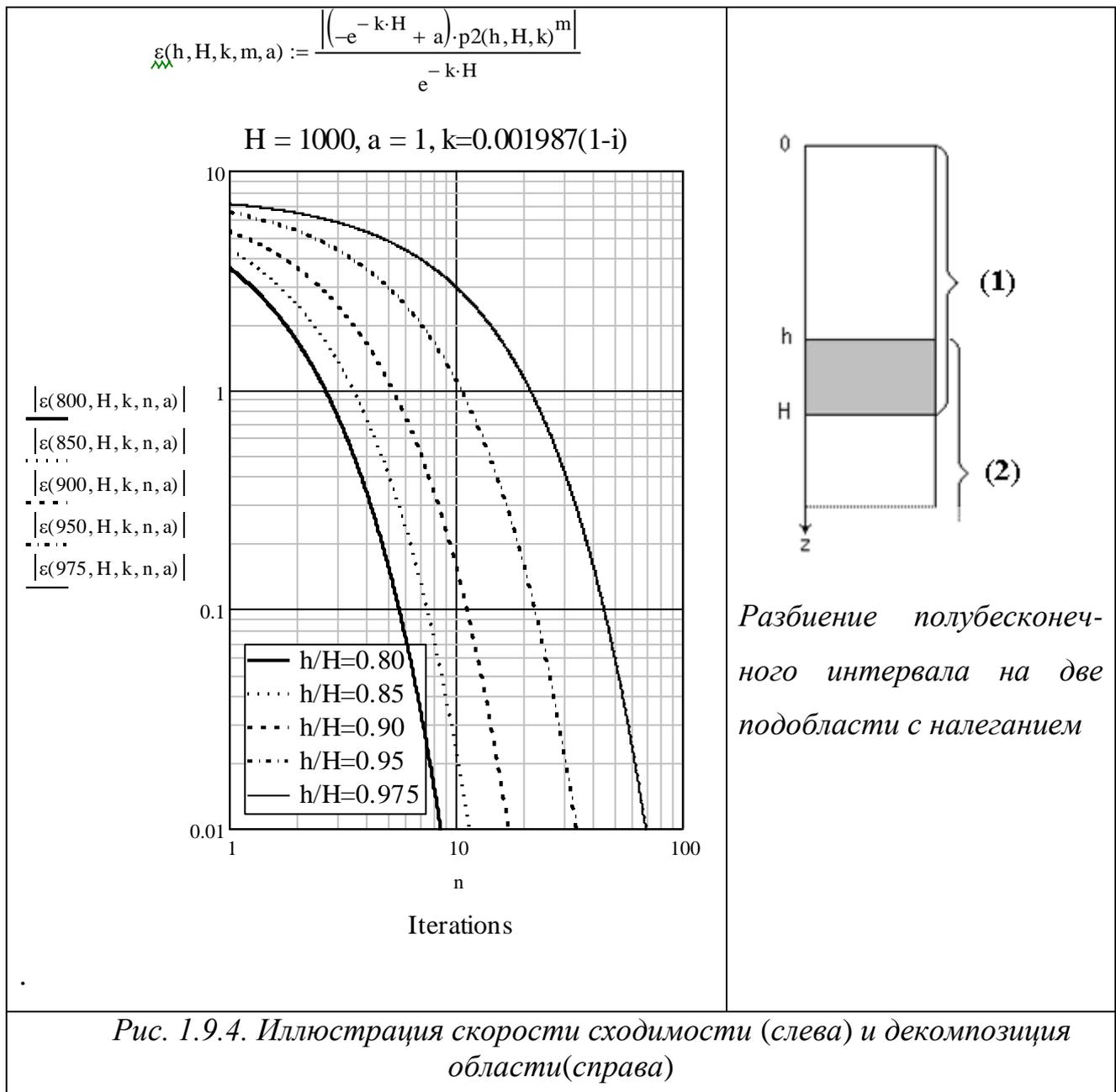


Полная погрешность  $\hat{\varepsilon}_m$  решения задачи на очередной  $m$ -той итерации равна

$$\hat{\varepsilon}_m := \left( -u_0 \frac{p_1}{1 - p_2} + a \right) p_2^m = (-u_0 e^{-kH} + a) p_2^m = O(p_2^m). \quad (1.9.13)$$

На рис. 1.9.4 вверху приведен оператор на языке MathCAD (см. формулу (1.9.8)), вычисляющий относительную погрешность решения на разных итерациях. Внизу графики иллюстрируют скорость сходимости АМШ при различном наложении двух областей

Решение на нижней границе есть  $U(H) = u_0 \exp(-kH)$ . Если принять за начальное приближение  $a = U(H)$ , то, согласно (1.9.13), по методу Шварца сразу получим точное решение. Чем лучше «угадаем» величину  $a$ , тем меньше итераций нужно будет сделать для достижения заданной точности.



Таким образом, по методу Шварца можем получить решение задачи (1.9.11) при любом начальном приближении к граничному значению  $u^{(0)}(H) = a$ . Сходимость итерационного процесса будет тем быстрее, чем меньше величины  $p_2$  и чем ближе начальное приближение  $a$  к точному граничному значению.

*Физическая интерпретация.* С физической точки зрения, параметр  $p_2$  содержит два множителя, первый из них  $sh(kh)/sh(kH)$  определяет уменьшение (затухание) амплитуды поля при его распространении от точки  $z = H$  до точки  $z = h$  и следует из решения задачи в интервале  $0 < z < H$ , а второй

$\exp[-k(H-h)]$  – затухание поля в процессе распространения от точки  $z = h$  до точки  $z = H$  и следует из решения задачи в интервале  $(h, \infty)$ . Величина  $|p_2|$  контролирует скорость уменьшения погрешности решения пары частных задач на одной итерации. Она численно равна произведению относительных величин уменьшения амплитуды поля при распространении от точки  $z = h$  до точки  $z = H$  точных решений обеих частных задач. *Тестовые расчеты.* Расчеты, выполненные по формуле (1.9.10), приведены на рис. 1.9.4. В частности, полагая  $a = 1$ ,  $h = H/2$ ,  $|kH| = 1$ , погрешность решения не будет превосходить 1% после 5 итераций. Приближение  $h$  к  $H$  приводит к возрастанию  $p_2$  и ухудшению сходимости итерационного процесса к решению. Так, при  $h/H = 0.9$  для достижения той же точности потребуется уже 18 итераций.

### **Б. Неоднородное полупространство.**

Рассмотрим одномерную модель реальной среды с кусочно-постоянными свойствами, которые описываются функциями  $\eta(z)$  и  $\gamma(z)$ , определенными при  $z \geq 0$ , причем функция  $\eta(z)$  зависит от  $\gamma(z)$ . Пусть эти функции имеют разрывы в точках

$$0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n-1} < \infty.$$

Далее потребуется решение следующей вспомогательной задачи. Найти функцию  $U(z)$ , удовлетворяющую *неоднородному* дифференциальному уравнению

$$U''(z) - \eta^2(z)U(z) = \psi(z), \quad 0 < z < \infty, \quad (1.9.14)$$

условиям сопряжения на границах разрыва функций  $\eta(z)$  и  $\gamma(z)$

$$[U] = 0, \quad [\gamma^{-1}U'(z)] = 0, \quad (1.9.15)$$

краевому условию и условию на бесконечности

$$U|_{z=0} = U_0, \quad U(z) \rightarrow 0; \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.9.16)$$

Задачи вида (1.9.14)-(1.9.16) возникают при расчете электромагнитных полей в слоистых средах. В этом случае  $\eta_m = \sqrt{\lambda^2 + k_m^2}$ ,  $k_m^2 = -i\omega\mu\sigma_m$ , где  $m$  – номер слоя,  $k$  – волновое число,  $\omega$  – круговая частота,  $\sigma$  – проводимость,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $i$  – мнимая единица. В формуле (1.9.15) параметру  $\gamma$  соответствует магнитная проницаемость ( $U$  соответствует компонента  $E$ -поля), удельная электропроводность ( $U$  соответствует компонента  $H$ -поля) или удельное сопротивление ( $U$  соответствует потенциал постоянного тока). Вещественный параметр  $\lambda$  появляется, если для решения задачи в слоистой среде применяется преобразования Ханкеля (Фурье-Бесселя) или преобразование Фурье. В одномерных задачах МТЗ  $\lambda = 0$ ,  $\eta_m = k_m$ .

Решение задач типа (1.9.14)-(1.9.16) рассмотрено в большом числе работ различных авторов (см., например, [Бердичевский, Дмитриев, 1992]). Здесь мы приведем ее решение в виде, удобном для дальнейшего использования в настоящей статье [Юдин, 1985].

Обозначим

$$q_{1,m}(\bar{z}, \eta_m, h_m) := \begin{cases} \frac{sh[\eta_m(h_m - \bar{z})]}{sh(\eta_m h_m)}, h_m \neq \infty, \\ e^{-\eta_m \bar{z}}, h_m = \infty. \end{cases}, \quad (1.9.17)$$

$$q_{2,m}(\bar{z}, \eta_m, h_m) := \begin{cases} \frac{sh(\eta_m \bar{z})}{sh(\eta_m h_m)}, h_m \neq \infty, \\ 0, h_m = \infty. \end{cases}$$

Здесь  $h_m := z_m - z_{m-1}$ ,  $\bar{z} := z - z_{m-1}$  – локальная координата,  $z \in [z_{m-1}, z_m]$  и  $\bar{z} \in [0, h_m]$ .

Интервал  $[z_{m-1}, z_m]$  с постоянными свойствами будем также называть  $m$ -тым слоем. Решение в  $m$ -том слое принимают вид

$$U_m(z) = A_{m-1}q_{1,m} + A_m q_{2,m} + \varphi_m(\bar{z}), \quad (1.9.18)$$

где  $\varphi_m(\bar{z})$  – частное решение неоднородного уравнения. Оно может быть представлено в виде

$$\varphi_m(\bar{z}) = \int_0^{h_m} \psi(z_{m-1} + \zeta) G_m(\bar{z}, \zeta; \eta_m, h_m) d\zeta \quad (1.9.19)$$

где  $G_m(\bar{z}, \zeta; \eta_m, h_m)$  - функция Грина для уравнения (1.9.14) [Диткин, Прудников, 1972]

$$G_m(\bar{z}, \zeta; \eta_m, h_m) = \begin{cases} q_{1,m}(\zeta) \eta_m^{-1} sh(\eta_m \bar{z}), \bar{z} \leq \zeta, \\ q_{2,m}(\zeta) \eta_m^{-1} sh[\eta_m (h_m - \bar{z})], \bar{z} \geq \zeta, \end{cases} \quad (1.9.20)$$

удовлетворяющая однородным краевым условиям на границах пласта.

В таком представлении решения автоматически обеспечивается непрерывность функций на границах разрыва свойств модели. Действительно,  $U_m(z_m) = U_{m+1}(z_m) = A_m$ , т.к.

$$\begin{aligned} \varphi_m(h_m) = \varphi_{m+1}(0) = 0; \\ q_{1,m}(h_m, ; \cdot) = 0, q_{2,m}(h_m, ; \cdot) = 1; q_{1,m+1}(0, ; \cdot) = 1, q_{2,m+1}(0, ; \cdot) = 0. \end{aligned} \quad (1.9.21)$$

Выполнение второго условия сопряжения (1.9.15), граничного условия и условия на бесконечности (1.9.16) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений коэффициентов  $A_m$  с трехдиагональной матрицей коэффициентов следующего вида :

$$\begin{cases} A_1(C_1 + C_2) + A_2 b_2 = -U_0 b_1 + g_1, \\ A_{m-1} b_m + A_m(C_m + C_{m+1}) + A_{m+1} b_{m+1} = g_m, m = 2, 3, \dots, n-2, \\ A_{n-2} b_{n-1} + A_{n-1}(C_{n-1} + C_n) = g_{n-1}, \end{cases} \quad (1.9.22)$$

где

$$b_m = -\eta_m \gamma_m^{-1} / sh(\eta_m h_m), C_m = \eta_m \gamma_m^{-1} cth(\eta_m h_m), \quad (1.9.23)$$

$$g_m = -\gamma_m^{-1} \int_0^{h_m} \psi(z_{m-1} + \zeta) q_{2,m}(\zeta) d\zeta - \gamma_{m+1}^{-1} \int_0^{h_{m+1}} \psi(z_m + \zeta) q_{1,m+1}(\zeta) d\zeta. \quad (1.9.24)$$

Согласно (1.9.23), при  $m = n$ ,  $h_n = \infty, \Rightarrow b_n = 0$ ,  $C_n = \eta_n / \gamma_n$ .

*Частный случай.* Будем считать, что среда *двухслойная* и при  $z > h_1$   $\psi(z) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} U_1(z) &= U_0 q_{1,1} + A_1 q_{2,1} + \varphi_1(z), \quad 0 \leq z \leq z_1; \\ U_2(\bar{z}) &= A_1 e^{-\eta_2 \bar{z}}, \quad z > z_1, \quad \bar{z} := z - z_1. \end{aligned}$$

Величины  $A_1$  равна

$$A_1 = U_1(h_1) = (g_1 - U_0 b_1) / (C_1 + C_2) \quad g_1 = -\gamma_1^{-1} \int_0^{h_1} \psi(\zeta) q_{2,1}(\zeta) d\zeta. \quad (1.9.25)$$

Рассмотрим модель среды, изображенной на рис. 1.9.5. Пусть нужно найти решение задачи (1.9.14)-(1.9.16) с произвольным распределением свойств среды в первом слое и постоянными свойствами в основании. Такая задача в общем случае не имеет аналитического решения, поэтому ее решение находят численно. Дадим краткое описание алгоритмов численного решения одномерных задач на полубесконечном интервале.

*Стандартное численное решение задачи* (рис. 1.9.5.). Численное разностное решение краевой задачи на неограниченном интервале приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений. Поэтому обычно находят решение *на конечном интервале*  $(z_0, z_3)$ . При этом остается открытым вопрос о способе задания граничного значения на искусственно созданной дополнительной нижней границе  $z = z_3$ . На этой границе чаще используются импедансные или асимптотические краевые условия.

*Классический алгоритм Шварца.* Классический алгоритм Шварца позволяет найти решение задачи на *бесконечном интервале* (полупрямой). Он состоит в последовательном решении двух краевых задач (рис. 1.9.5. \*2\*a):

- на интервале  $(0, z_2)$  (в области  $D_1$ ) задача решается численно,
- на интервале  $(z_1, \infty)$  (область  $D_2$ ) задача решается аналитически.

При этом нужно, чтобы  $D_1 \cap D_2 = D_{12} \neq \emptyset$ . Зададим достаточно произвольно краевое условие на границе  $z = z_2$ . В этом случае приближенное решение задачи в области  $D_1$  позволяет найти обновленное граничное значение в точке  $z = z_1$

для задачи в области  $D_2$ . В свою очередь, аналитическое решение задачи в  $D_2$  дает следующее приближение к краевому условию в точке  $z = z_2$  для задачи в  $D_1$ . Сходимость такого алгоритма для горизонтально-слоистой среды можно доказать аналитически посредством очевидных изменений алгоритма, описанного в разделе А.

**Модифицированный алгоритм Шварца** (рис. 1.9.5.b). Подобно классическому алгоритму, модифицированный алгоритм Шварца [Юдин М.Н., Юдин В.М., 2002] дает возможность найти решение задачи на *бесконечном интервале* (полупрямой  $\Omega$ ).

Алгоритм вычислений состоит в последовательном решении двух краевых задач:

- на интервале  $(0, z_1)$  (в области  $D$ ) краевая задача решается численно,
- на интервале  $(0, \infty)$  (в области  $\Omega$ ) задача решается аналитически.

Так же как в классическом алгоритме Шварца, сначала (достаточно произвольно) возьмем краевое условие на границе  $z = z_1$ . Далее граничное значение при  $z = z_1$  уточняется в итерационном процессе Шварца посредством

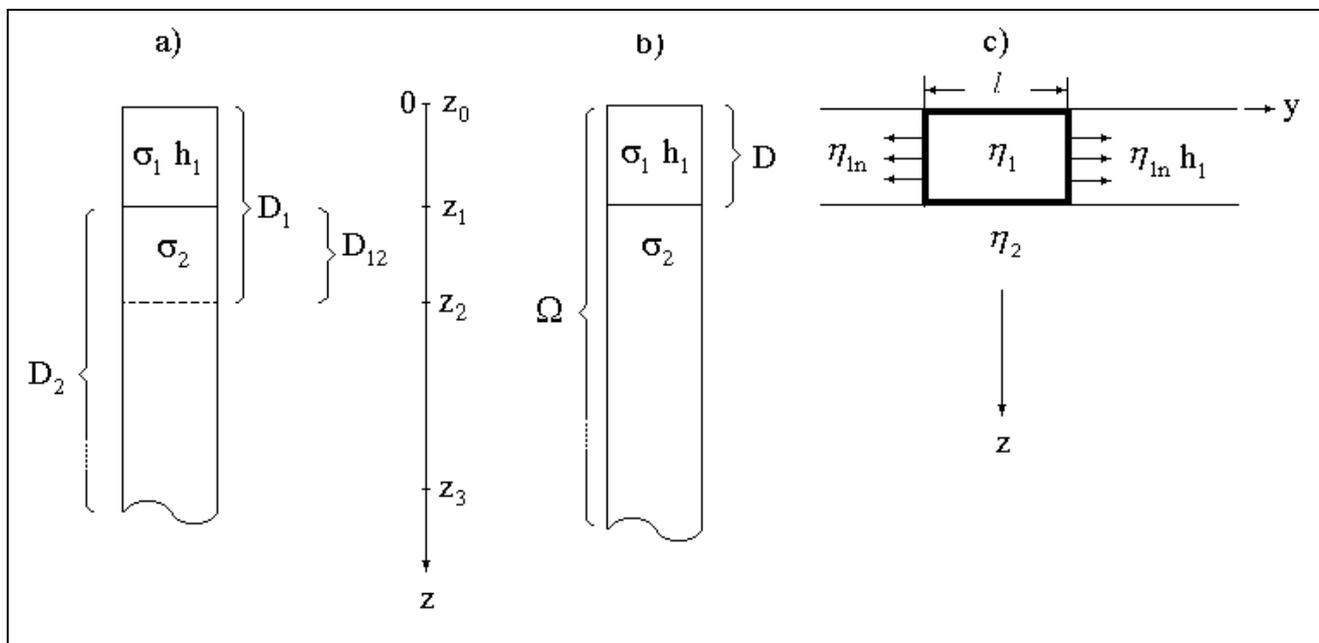


Рис. 1.9.5. а) Выбор 1D областей в классическом алгоритме Шварца.

б) Выбор 1D областей в модифицированном алгоритме Шварца.

с) Двумерная модель среды (вставка в двухслойной вмещающей среде).

последовательного решения задач в областях  $\Omega$  и  $D$ . Основное отличие модифицированного алгоритма от классического состоит в том, что область  $\Omega$  содержит область  $D$ . Это обещает получить два важных преимущества:

1. Повысить скорость сходимости метода Шварца за счет максимально возможного наложения областей ( $\Omega \cap D = D$ ).
2. Численно решать задачу в области минимально возможных размеров (только в области  $D$ , рис. 1.9.5b).

*Исследование сходимости модифицированного алгоритма Шварца.*

Получим условия сходимости алгоритма на примере двухслойной среды. Будем полагать, что в первом слое имеется вставка шириной  $l$  (рис. 1.9.5c). Устремляя  $l$  к бесконечности, получим двухслойную среду, свойства которой описывает функция

$$\eta(z) = \begin{cases} \eta_1(z), & 0 \leq z < h_1, \\ \eta_2 = \text{const}, & z \geq h_1. \end{cases}$$

Рассмотрим две задачи вида (1.9.14)-(1.9.16). Первая задача относительно функции  $U(z)$

$$\begin{cases} U''(z) - \eta^2(z)U(z) = 0, & 0 < z < \infty, \\ [U]_{z=h_1} = 0, [\gamma^{-1}U'(z)]_{z=h_1} = 0; U|_{z=0} = U_0, U(z) \rightarrow 0; z \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.9.26)$$

Вторая задача относительно функции  $U_n(z)$  отличается от первой только тем, что в ней  $\eta_1(z) = \eta_n = \text{const}$ . Из этих двух задач для аномальной составляющей  $U_a$  получим задачу

$$\begin{cases} U_a''(z) - \eta_n^2(z)U_a(z) = \psi(z), & z > 0, \\ [U_a]_{z=h_1} = 0, [\gamma^{-1}U_a'(z)]_{z=h_1} = 0; \\ U_a|_{z=0} = 0, U_a(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.9.27)$$

где

$$U_a := U - U_n; \quad \psi(z) := (\eta^2 - \eta_n^2)U. \quad (1.9.28)$$

Следует отметить, что, согласно (1.9.28), в правую часть уравнения в (1.9.27) входит неизвестное (искомое) решение.

Построим итерационный процесс Шварца и покажем, что он сходится к решению задачи (1.9.26) в любой точке полупрямой  $\Omega$ . Для получения аналитических оценок сходимости метода в задаче (1.9.26) заменим в первом слое функцию  $\eta(z)$  константой  $\eta_1$ , причем  $\eta_1 \neq \eta_{1n}$ . Например, можно принять величину  $\eta_1$  равной интегральному среднему функции  $\eta(z)$  в первом слое. В этом случае известны точные решения обеих задач, поэтому легко найти условия сходимости метода последовательных приближений. Будем аналитически решать пару связанных задач.

1) Сначала решим задачу

$$\begin{cases} U''^{(1)}(z) - \eta_1^2 U^{(1)}(z) = 0, & 0 < z < h_1, \\ U^{(1)}|_{z=0} = U_0, \quad U^{(1)}|_{z=h_1} = U_1 \end{cases} . \quad (1.9.29)$$

Граничное значение  $U_1$  неизвестно, поэтому примем  $U_1 = U_n(h_1)$ . Тогда ее решением является функция

$$U^{(1)}(z) = \tilde{U}_n(z) := U_0 q_{1,1}(z) + U_n(h_1) q_{2,1}(z) . \quad (1.9.30)$$

2) Следующий шаг вычислений состоит в решении задачи (1.9.27), в которой в качестве нулевого приближения к  $\psi(z)$  возьмем функцию  $\psi(z) \approx \psi^{(0)}(z) := (\eta^2 - \eta_n^2) \tilde{U}_n$ . Согласно (1.9.22),

$$U_a^{(0)}(h_1) = A_1^{(0)} = g_1^{(0)} / (C_{1,n} + C_2),$$

где

$$\begin{aligned} g_1^{(0)} &= -\gamma_{1,n}^{-1} \int_0^{h_1} \psi^{(0)}(\zeta) q_{2,1n}(\zeta) d\zeta \\ &= -\gamma_{1,n}^{-1} (\eta_1^2 - \eta_{1,n}^2) \int_0^{h_1} \tilde{U}_n(\zeta) q_{2,1n}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (1.9.31)$$

Индексы 1 и 2 у  $\eta$  и  $\gamma$  указывают на номер пласта двухслойной модели среды.

Подставим (1.9.30) в (1.9.31) и вычислим интегралы, тогда получим

$$g_1^{(0)} := U_0 Q_{1,2} + U_n(h_1) Q_{2,2}$$

где

$$Q_{1,2}(\eta_1, \eta_{1n}, h_1) := -\gamma_1^{-1}(\eta_1^2 - \eta_{1n}^2)2^{-1} \int_0^{h_1} q_{1,1}(\zeta)q_{2,1n}(\zeta)d\zeta, \quad (1.9.32_1)$$

$$Q_{2,2}(\eta_1, \eta_{1n}, h_1) := -\gamma_1^{-1}2^{-1}(\eta_1^2 - \eta_{1n}^2) \times \int_0^{h_1} q_{2,1}(\zeta)q_{2,1n}(\zeta)d\zeta = C_{1,n} - C_1. \quad (1.9.32_2)$$

Таким образом, уточненное полное поле при  $z=h_1$  после первого шага равно

$$U^{(0)}(h_1) = U_n(h_1) + A_1^{(0)},$$

$$A_1^{(0)} = [U_0Q_{12} + U_n(h_1)Q_{22}] / (C_{1,n} + C_2).$$

3) Следующее решение задачи из пункта 1) принимает вид

$$U^{(1)}(z) = U_0q_{1,1}(z) + (U_n(h_1) + A_1^{(0)})q_{2,1}(z)$$

$$= \tilde{U}_n(z) + A_1^{(0)}q_{2,1}(z).$$

4) Уточненное решение задачи из пункта 2) дают формулы

$$\psi^{(1)}(z) := (\eta^2 - \eta_n^2) [\tilde{U}_n(z) + A_1^{(0)}q_{2,1}(z)],$$

$$U_a^{(1)}(h_1) = A_1^{(1)} = g_1^{(1)} / (C_{1,n} + C_2),$$

$$g_1^{(1)} := -\gamma_{1,n}^{-1}(\eta^2 - \eta_n^2) \int_0^{h_1} [\tilde{U}_n(\zeta) + A_1^{(0)}q_{2,1}(\zeta)]q_{2,1n}(\zeta)d\zeta = g_1^{(0)} + A_1^{(0)}Q_{2,2}, \quad (1.9.33)$$

$$A_1^{(1)} := A_1^{(0)}(1+r), \quad r := Q_{2,2} / (C_{1,n} + C_2) = (C_{1,n} - C_1) / (C_{1,n} + C_2).$$

После первых  $N$  итераций получим

$$A_1^{(N)} = A_1^{(0)} \sum_{m=0}^N r^m = A_1^{(0)} (1 - r^{N+1}) / (1 - r).$$

Таким образом, итерационный процесс будет сходиться, если  $|r| < 1$ . В этом

случае величина аномального поля на нижней границе пласта равна

$$A_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} A_1^{(N)} = A_1^{(0)} \frac{1}{1-r} = \frac{g_1^{(0)}}{(C_1 + C_2)} \frac{1}{1-r} = \frac{U_0Q_{1,2} + U_n(h_1)Q_{2,2}}{(C_1 + C_2)} \frac{1}{1-r}.$$

Итак, на нижней границе верхнего слоя получаем

$$\begin{aligned}
 U(h_1) &= U_n(h_1) + A_1 = U_n(h_1) + \left[ U_0 \frac{Q_{1,2}}{Q_{2,2}} + U_n(h_1) \right] \frac{r}{1-r} = \\
 &= \left[ U_0 \frac{Q_{1,2}}{Q_{2,2}} r + U_n(h_1) \right] \frac{1}{1-r}.
 \end{aligned}
 \tag{1.9.34}$$

Отметим, что точное решение рассматриваемой задачи для двухслойной среды с параметрами  $\eta_1 = k_1$  и  $\eta_2 = k_2$  при  $z = h_1$  дает формула (1.9.25), в которой нужно принять  $g_1 = 0$ . Подстановкой в правую часть (1.9.34) формул (1.9.32) и (1.9.33) можно показать, что формула (1.9.34) дает точное решение задачи, совпадающее с (1.9.25), если только  $|r| < 1$ . Линии уровня функции  $|r|$  при  $k_2 = 0$  приведены на рис. 1.9.6. По осям координат этого рисунка отложены величины  $\text{Re } k_\alpha h_1, \alpha = 1, 1n$ . Наихудшие условия сходимости будут при  $k_1 h_1 \rightarrow \infty$  и  $k_{1n} h_1 \rightarrow \infty$ . Этот предельный случай не представляет большого практического интереса. Обсуждаемый здесь алгоритм решения задач имеет смысл использовать лишь тогда, когда мощность первого слоя соизмерима или превосходит величину скин-слоя, т.е. при  $\text{Re } k_1 h_1 < 1$ ,  $\text{Re } k_{1n} h_1 < 1$ . В этом практически важном диапазоне изменений свойств модели среды и частот, согласно рис.1.9.6 итерационный алгоритм Шварца сходится. Сходимость тем лучше, чем меньше отличаются свойства неоднородного слоя от свойств нормального разреза.

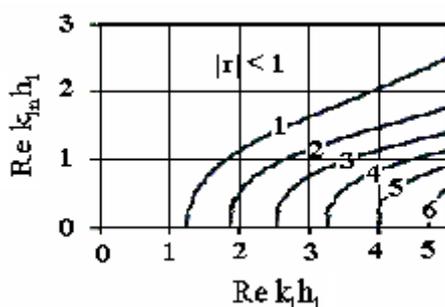


Рис. 1.9.6. Карта изолиний функции  $|r|$  при  $k_2 = 0$ .

При произвольном изменении свойств верхнего слоя представляет интерес аппроксимация неоднородного слоя конечным количеством слоев с кусочно-постоянными свойствами. Для такой модели можно получить аналитическое решение задачи для аппроксимирующего разреза и оценить условия сходимости итерационного процесса.

Можно надеяться на то, что полученные оценки условий сходимости метода Шварца для слоистой среды будут оценками сверху для моделей большей размерности, представляющие собой локальные неоднородности в горизонтально-слоистой среде. Соответствующие априорные оценки можно сделать по приведенным выше формулам.

*Замечание.* Существуют модели, для которых итерационный процесс Шварца, построенный по модифицированный алгоритму, может расходиться (см. рис. 1.9.6).

### 1.9.3. Нестационарные задачи геоэлектрики<sup>15</sup>

Рассмотрим решение нестационарной задачи на полубесконечной прямой

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \mu(z)\sigma(z) \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u^0, & z=0, \\ 0, & z>0; \end{cases} \quad u|_{z=0} = u^0; \quad u \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.9.35)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость (примем  $\mu = 4\pi 10^{-7}$ ),  $\sigma$  – удельная электропроводность среды.

1. Однородное полупространство. Будем считать, что  $\mu = const$  и  $\sigma = const$ . Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что решением задачи (1.9.35) является функция

$$u(z,t) = u^0 \operatorname{erfc} \left( \frac{z\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} \right). \quad (1.9.36)$$

Применим к задаче (1.9.35) преобразование Лапласа-Карсона [Диткин, Прудников, 1965]

$$\widehat{u}(z,p) = p \int_0^{\infty} u(z,t) e^{-pt} dt.$$

Далее символом  $\square$  будем обозначать соответствие между оригиналом и изображением:

<sup>15</sup> Этот раздел Пособия был подготовлен при участии студентки 5 курса специальности «Прикладная математика» РГГРУ Е. Болотовой.

$$\widehat{u}(z, p) \square u(z, t).$$

Очевидно,

$$p \int_0^{\infty} u_t(z, t) e^{-pt} dt = p u e^{-pt} \Big|_{+0}^{+\infty} + p^2 \int_0^{+\infty} u(z, t) e^{-pt} dt = p \widehat{u}(z, p),$$

т.е.  $u_t(z, t) \square p \widehat{u}(z, p)$

Здесь учтено, что при  $\operatorname{Re} p > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(z, t) e^{-pt} = 0$ , а, согласно начального условия,  $\lim_{t \rightarrow +0} u(z, t) e^{-pt} = u(z, +0) = 0$ . Кроме того,

$$p \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 \widehat{u}(z, p)}{\partial z^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} \square \frac{\partial^2 \widehat{u}(z, p)}{\partial z^2}, \quad p \int_0^{\infty} u^0 e^{-pt} dt = u^0 p \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = u^0,$$

$$p \int_0^{\infty} u(z, t) e^{-pt} dt \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0, \quad \Rightarrow \widehat{u}(z, p) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0.$$

Окончательно, в области изображений получим задачу

$$\begin{cases} \widehat{u}''(z, p) = p \mu(z) \sigma(z) \widehat{u}(z, p), \\ \widehat{u}|_{z=0} = u^0; \widehat{u} \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.9.37)$$

Примем  $k^2(z) := p \mu(z) \sigma(z)$ , тогда задача (1.9.36) совпадает с задачей (1.9.6) при  $p = -i\omega$ . В частности, при  $\mu = \text{const}$  и  $\sigma = \text{const}$  решение задачи (1.9.36) дает функция

$$\widehat{u}(z, p) = u^0 \exp(-kz) = u^0 \exp(-z \sqrt{\mu \sigma} \sqrt{p}).$$

Таким образом, имеем соответствие между решениями задач (1.9.6) и (1.9.36)

$$u^0 \exp(-z \sqrt{\mu \sigma} \sqrt{p}) \square u^0 \operatorname{erfc} \left( \frac{z \sqrt{\mu \sigma}}{2 \sqrt{t}} \right)$$

или

$$\exp(-\alpha \sqrt{p}) \square \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha}{2 \sqrt{t}} \right), \quad \alpha \geq 0. \quad (1.9.38)$$

Пользуясь этим соответствием, найдем оригиналы некоторых функций из предыдущего раздела, через которые можно выразить решения нестационарных задач.

Найдем обратное преобразование Лапласа-Карсона функций  $\hat{q}_1, \hat{q}_2$  (см. формулы (1.9.7.)), в которых следует принять  $k = \sqrt{-i\omega}\sqrt{\mu\sigma} = \sqrt{p}\sqrt{\mu\sigma}$ .

Представим функцию  $\hat{q}_2$  в виде ряда по экспонентам

$$\begin{aligned}\hat{q}_2(z, k, H) &:= \frac{\text{sh}(kz)}{\text{sh} kH} = \frac{e^{kz} - e^{-kz}}{e^{kH} - e^{-kH}} = \frac{e^{-k(H-z)} - e^{-k(H+z)}}{1 - e^{-2kH}} = \\ &= \left( e^{-k(H-z)} - e^{-k(H+z)} \right) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2mkH} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ e^{-k[(2m+1)H-z]} - e^{-k[(2m+1)H+z]} \right\}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\hat{q}_2(z, k, H) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\sqrt{p} \left\{ \sqrt{\mu\sigma} [(2m+1)H - z] \right\} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[ -\sqrt{p} \left\{ \sqrt{\mu\sigma} [(2m+1)H + z] \right\} \right] \right\}\end{aligned}$$

На основании (1.9.38) получим соответствие  $\hat{q}_2(z, k, H) \square q_2(z, t, H)$ , в котором

$$q_2(z, t, H) := \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \text{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu\sigma} [(2m+1)H - z]}{2\sqrt{t}} \right] - \text{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu\sigma} [(2m+1)H + z]}{2\sqrt{t}} \right] \right\}. \quad (1.9.39)$$

Так как  $\hat{q}_1(z, k, H) = \hat{q}_2(H - z, k, H)$ , то

$$q_1(z, t, H) := \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \text{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu\sigma} (2mH + z)}{2\sqrt{t}} \right] - \text{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu\sigma} [2(m+1)H - z]}{2\sqrt{t}} \right] \right\} \quad (1.9.40)$$

Графики функций  $q_1(z, t, H)$  и  $q_2(z, t, H)$  изображены на рис. 1.3.7.

Согласно (1.9.40) при  $H \rightarrow \infty$   $q_1(z, t, H) \rightarrow q_{1\infty}(z, t) = \text{erfc}(z\sqrt{\mu\sigma}/2\sqrt{t})$ .

Для решения нестационарной задачи по методу Шварца потребуется решение вспомогательной задачи на конечном и полубесконечном интервалах.

## 2. Решение нестационарной задачи на конечном интервале $[0, H]$ .

А. Найдем функцию  $u(z, t)$ , являющуюся решением нестационарной задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \mu(z)\sigma(z) \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}, 0 < z < H, t > 0, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u^0, z = 0, \\ 0, 0 < z < H, \\ \chi(0), z = H, \end{cases} \\ u|_{z=0} = u^0, u|_{z=H} = \chi(t). \end{array} \right. \quad (1.9.41)$$

В области изображений ей соответствует задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{u}''(z,p) = p\mu(z)\sigma(z)\widehat{u}(z,p), \\ \widehat{u}|_{z=0} = u^0; \widehat{u}|_{z=H} = \widehat{\chi}(p), \end{array} \right. \quad (1.9.42)$$

где

$$\widehat{\chi}(p) = p \int_0^{\infty} \chi(t) e^{-pt} dt.$$

Если  $\mu(z)\sigma(z) = \mu\sigma = const$ , то решение задачи (1.9.42), как известно, может быть представлено в виде

$$\widehat{u}(z,p) = u^0 \widehat{q}_1(z,k,H) + \widehat{\chi}(p) \widehat{q}_2(z,k,H),$$

поэтому в области оригиналов

$$u(z,t) = u^0 q_1(z,t,H) + \chi(t) * q_2(z,t,H), \quad (1.9.43)$$

где  $\chi(t) * q_2(z,t,H)$  – свертка функций, вычисляемая по формуле [Диткин, Прудников, 1965]

$$\chi(t) * q_2(z,t,H) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \chi(\tau) q_2(z,t-\tau,H) d\tau = \int_0^t \chi(\tau) \frac{\partial}{\partial t} q_2(t-\tau,z,H) d\tau.$$

Здесь принято во внимание, что при  $z > 0$   $q_2(+0,z,H) = \lim_{t \rightarrow +0} q_2(t,z,H) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \chi(\tau) q_2(z,t-\tau,H) d\tau &= \\ &= \chi(t) q_2(+0,z,H) + \int_0^t \chi(\tau) \frac{\partial q_2(t-\tau,z,H)}{\partial t} d\tau = \int_0^t \chi(\tau) \frac{\partial q_2(t-\tau,z,H)}{\partial t} d\tau. \end{aligned}$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{4\sqrt{t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}},$$

ПОЭТОМУ

$$\frac{\partial}{\partial t} q_2(z, t - \tau, H) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \sqrt{(t - \tau)^3}} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \exp\left[ -\frac{\mu\sigma[(2m+1)H - z]^2}{4(t - \tau)} \right] - \exp\left[ \frac{\mu\sigma[(2m+1)H + z]^2}{4(t - \tau)} \right] \right\}.$$

В частности, когда  $\chi(t) = \chi_0 = \text{const}$ , формула (1.9.43) упрощается

$$u(z, t) = u^0 q_1(z, t, H) + \chi_0 q_2(z, t, H).$$

Б. Найдем функцию  $u(z, t)$ , являющуюся решением нестационарной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}, 0 < z < H, t > 0, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} v(0), z = 0, \\ 0, 0 < z < H, \\ \chi(0), z = H, \end{cases} \\ u|_{z=0} = v(t), u|_{z=H} = \chi(t). \end{cases} \quad (1.9.44)$$

Согласно (1.9.43), ее решение дает формула

$$u(z, t) = v(t) * q_1(z, t, H) + \chi(t) * q_2(z, t, H).$$

### 3. Решение нестационарной задачи на полупрямой.

Пусть  $\mu = \text{const}$ ,  $\sigma = \text{const}$ . Рассмотрим решение следующей задачи на полубесконечном интервале  $(h, \infty)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}, h < z < \infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, h < z < \infty, \\ u|_{z=h} = v(t), u \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.9.45)$$

Решение задачи дает функция

$$u(z,t) = v(t) * \operatorname{erfc} \left( \frac{(z-h)\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v(\tau) \operatorname{erfc} \left( \frac{(z-h)\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} \right) d\tau =$$

$$= \frac{(z-h)\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} e^{-\frac{(z-h)^2\mu\sigma}{4(t-\tau)}} d\tau.$$

Если  $v(t) = v_0 = \text{const}$ , то решение задачи (1.9.45) становится проще

$$u(z,t) = v_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{(z-h)\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} \right).$$

Будем решать задачу (1.9.35) посредством последовательного решения задачи (1.9.41) на конечном интервале  $[0, H]$  и задачи (1.9.45) на полубесконечном интервале  $[h, \infty)$ .

Решение выполняется в два этапа. На первом этапе (методом последовательных приближений) строится решение во внутренней точке полубесконечного интервала при  $z = H$ . После того, как оно будет найдено (и будет совпадать с решением исходной задачи), решения вспомогательных задач (каждая на своем интервале) будут давать решение задачи (1.9.35).

*Этап 1. Построение решения в точке  $z = H$  на фиксированном времени  $t$ .*

Можно было бы определить первый этап как шаг вычислений, целью которого является построение краевого условия на нижней границе области подзадачи (1.9.41). Последовательность решений  $\{u^{(k)}\}$  начинается с подзадачи (1.9.41) при произвольно заданном краевом условии на нижней границе  $u^{(0)}(H) = a$ . При  $m = 1$  ее решение может быть представлено в следующем виде

$$u^{(1)}(z,t) = u_0 q_1(z,t,H) + a q_2(z,t,H),$$

а вторая подзадача с учетом найденного выражения для  $u^{(1)}(z)$  при  $m = 1$  имеет решение

$$u^{(2)}(z,t) = u^{(1)}(h,t) * \operatorname{erfc} \left( \frac{(z-h)\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} \right).$$

Таким образом, на втором шаге при  $z = H$  получим решение

$$u^{(2)}(z,t) = u^{(1)}(h,t) * \operatorname{erfc}\left(\frac{(H-h)\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}}\right).$$

Преобразуем функции (1.9.4)

$$\begin{aligned}\widehat{p}_1 &:= \frac{\operatorname{sh}[k(H-h)]}{\operatorname{sh} kH} \exp[-k(H-h)] = e^{-kH} \frac{1 - e^{-2k(H-h)}}{1 - e^{-2kH}} = \\ &= (e^{-kH} - e^{-2k(H-h)-kH}) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2kmH} = \sum_{m=0}^{\infty} [e^{-k(2m+1)H} - e^{-k[H(2m+3)-2h]}], \\ \widehat{p}_2 &:= \frac{\operatorname{sh} kh}{\operatorname{sh} kH} \exp[-k(H-h)] = \sum_{m=0}^{\infty} [e^{-k((2m+1)H-h)} - e^{-k((2m+1)H+h)}].\end{aligned}$$

Запишем функции  $\widehat{p}_1$  и  $\widehat{p}_2$  в области оригиналов. Очевидно

$$\begin{aligned}p_1(h,t) &:= q_1(h,t,H) * \operatorname{erfc}\left(\frac{(H-h)\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}}\right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{\mu\sigma}(2m+1)H}{2\sqrt{t}}\right] - \operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{\mu\sigma}[(2m+3)H-2h]}{2\sqrt{t}}\right] \right\}, \\ p_2(h,t) &:= q_2(h,t,H) * \operatorname{erfc}\left(\frac{(H-h)\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}}\right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{\mu\sigma}(2m+1)H-h}{2\sqrt{t}}\right] - \operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{\mu\sigma}[(2m+1)H+h]}{2\sqrt{t}}\right] \right\}.\end{aligned}$$

Тогда аналог формул (1.9.8)-(1.9.9) примет вид:

$$u^{(2)}(H,t) = u_0 p_1(h,t) + a p_2(h,t).$$

Продолжая далее итерационный процесс, получим

$$\begin{aligned}u^{(4)}(H,t) &= u_0 p_1(h,t) + u^{(2)}(H,t) * p_2(h,t) = \\ &= u_0 p_1(h,t) + [u_0 p_1(h,t) + a p_2(h,t)] * p_2(h,t) = \\ &= u_0 \{p_1(h,t) + p_1(h,t) * p_2(h,t)\} + a p_2(h,t) * p_2(h,t).\end{aligned}$$

Обобщая последнее равенство, можно записать рекуррентную формулу

$$u^{(2m)}(H,t) = u_0 p_1(h,t) + u^{(2m-2)}(H,t) * p_2(h,t), \quad m = 1, 2, \dots$$

Графики функций  $p_1(h,t)$  и  $p_2(h,t)$  для  $H=100$  представлены на рис. 1.9.8. Он свидетельствует о том, что при  $h < H$  величина  $p_2(h,t)$  меньше 1, поэтому

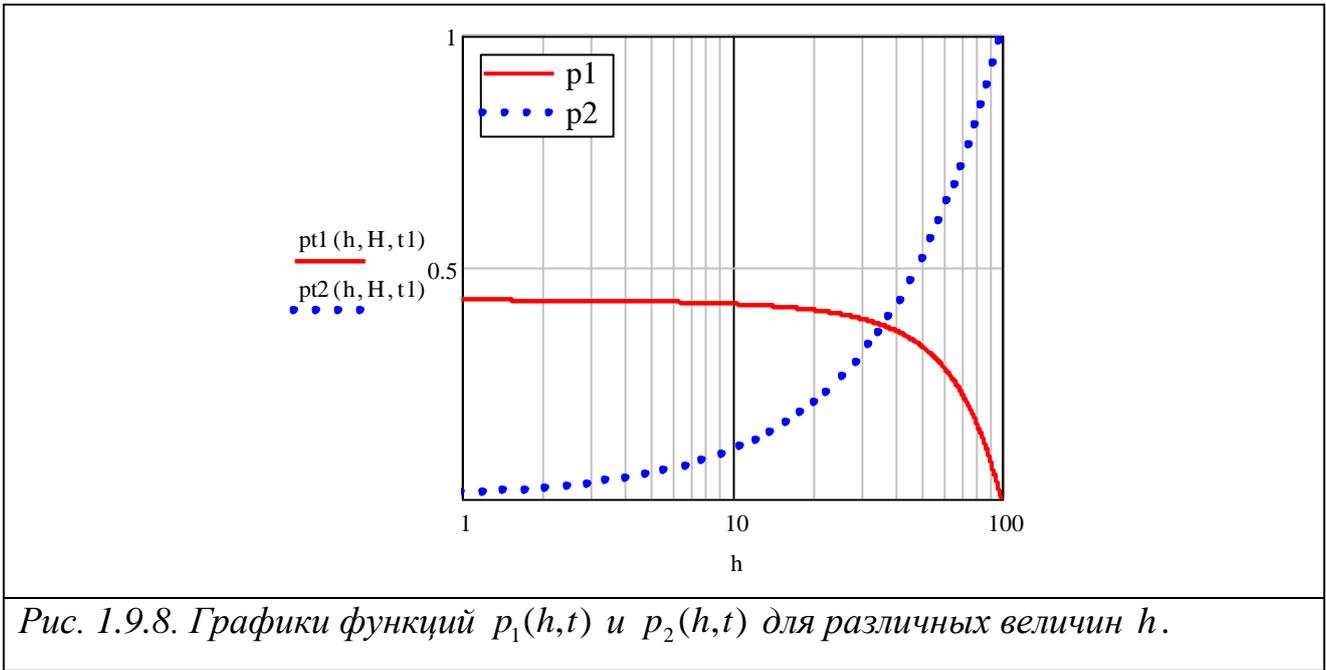


Рис. 1.9.8. Графики функций  $p_1(h, t)$  и  $p_2(h, t)$  для различных величин  $h$ .

итерационный процесс Шварца сходится к точному решению в однородной среде. Действительно, в частотной области показано, что (см. формулу (1.9.10))

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{u}^{(2m)}(H) = u_0 \frac{\hat{q}_1}{1 - \hat{q}_2} = u_0 \exp(-kH) = \hat{u}(z)|_{z=H},$$

поэтому в области оригиналов получаем решение задачи (1.9.35) при  $z = H$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u^{(2m)}(H, t) = u(z, t)|_{z=H} = u_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{z\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}}\right)\Big|_{z=H}.$$

Оценку абсолютной погрешности решения  $\varepsilon_m(t)$  в точке  $z = H$  дает нестационарный аналог формулы (1.9.13)

$$\varepsilon_m(t) = \left| \left[ -u_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{H\sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}}\right) + a \right] * p_2^m(h, t) \right| \leq M (h/H)^m,$$

где  $M = \left| -u_0 \operatorname{erfc}\left(H\sqrt{\mu\sigma}/2\sqrt{t}\right) + a \right|$ .

#### 4. Неоднородное полупространство.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha(z) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right) = \beta(z) \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u^0, & z = 0, \\ 0, & z > 0; \end{cases} \quad u|_{z=0} = u^0; \quad u \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.9.46)$$

Пусть в задаче (1.9.46) коэффициенты  $\alpha'(z) > 0$ ,  $\beta(z) > 0$  на интервале  $(0, h)$  являются *кусочно-непрерывными* функциями переменной  $z$ , а при  $z > h$  – кусочно-постоянными величинами. Тогда на конечном интервале  $(0, H)$  нестационарная задача решается численно, а на промежутке  $(h, \infty)$  – аналитическими методами. Коррекция граничных значений требует применения процедуры свертки и многократного решения задач в налегающих областях при переходе с одного временного слоя на другой. При аналитическом решении задачи в области  $(h, \infty)$  с кусочно-постоянным изменением свойств модели полезно иметь решение нестационарной задачи для горизонтально-однородной слоистой среды, лежащей в ее основании. Далее рассмотрим более внимательно решение применительно к двухслойной среде, которое позволит (на основе использования алгоритма Шварца) сконструировать решение в слоистой среде, состоящей из конечного числа слоев.

Аналитическое решение в кусочно-постоянной среде.

Пусть  $\eta = \mu\sigma$  и

$$\eta(z) = \begin{cases} \eta_1, & 0 = z_0 < z < z_1, \\ \dots \\ \eta_m, & z_{m-1} < z < z_m, \quad m < n, \\ \dots \\ \eta_n & z > z_{n-1}. \end{cases}$$

Рассмотрим решение задачи в слоистой среде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_m(z, t)}{\partial z^2} = \eta_m \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}, \quad z_{m-1} < z < z_m, \quad t > 0, \quad m = 1, \dots, n, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u^0, & z = 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \\ u|_{z=0} = u^0, \quad [u]_{z_m} = 0, \quad \left[ \frac{1}{\zeta} \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z_m} = 0, \quad u \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.9.47)$$

Если  $u(z, t)$  соответствует компонента  $E_x(z, t)$  электрического поля, то следует принять  $\zeta = \mu$ . Когда  $u(z, t) = H_y(z, t)$ , то  $\zeta = \sigma$ .

Частный случай. Двухслойная среда ( $n = 2$ ).

Относительное кажущееся сопротивление нестационарного МТ-поля на поверхности слоистой среды равно

$$\frac{\rho_\tau}{\rho_1} = \frac{Z^2(0,t)}{Z_1^2(0,t)} = R^2(t).$$

Известно [Ваньян, 1965], что на поверхности двухслойной среды

$$R^2(t) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} n k_{12}^n \operatorname{erfc} \left( \frac{4\pi}{\tau_1/h_1} \right), \quad k_{12} := \frac{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}, \quad \tau_1 := \sqrt{2\pi t 10^7} \rho_1.$$

Рассмотрим решение во внутренних точках этой простой модели.

Примем  $h_1 := z_1 - z_0$ ,

$$\begin{aligned} q_{1,1}(z,t,h_1) &:= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu_1 \sigma_1} (2mh_1 + z)}{2\sqrt{t}} \right] - \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu_1 \sigma_1} [2(m+1)h_1 - z]}{2\sqrt{t}} \right] \right\}, \\ q_{2,1}(z,t,h_1) &:= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu_1 \sigma_1} ((2m+1)h_1 - z)}{2\sqrt{t}} \right] - \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu_1 \sigma_1} ((2m+1)h_1 + z)}{2\sqrt{t}} \right] \right\}, \\ q_{1,2}^{\text{inf}}(z,t,h_1) &:= \operatorname{erfc} \left( \frac{(z-h_1)\sqrt{\mu_2 \sigma_2}}{2\sqrt{t}} \right). \end{aligned} \quad (1.9.48)$$

Функцию  $q_{1,1}$  можно также записать несколько иначе:

$$\begin{aligned} q_{1,1}(z,t,h_1) &:= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu_1 \sigma_1} (2mh_1 + z)}{2\sqrt{t}} \right] - \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu_1 \sigma_1} [2(m+1)h_1 - z]}{2\sqrt{t}} \right] \right\} = \\ &\operatorname{erfc} \left( \frac{z\sqrt{\mu_1 \sigma_1}}{2\sqrt{t}} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu_1 \sigma_1} [2(m+1)h_1 + z]}{2\sqrt{t}} \right] - \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\mu_1 \sigma_1} [2(m+1)h_1 - z]}{2\sqrt{t}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что

$$q_{1,1}(z,t,h_1) \xrightarrow{h_1 \rightarrow \infty} \operatorname{erfc} \left( \frac{z\sqrt{\mu_1 \sigma_1}}{2\sqrt{t}} \right).$$

Решение представим в форме

$$u(z,t) = \begin{cases} u_1(z,t) = u_0 q_{1,1}(z,t,h_1) + u_1(h_1-0,t) * q_{2,1}(z,t,h_1), & 0 \leq z \leq h_1, \\ u_2(z,t) = u_2(h_1+0,t) * \operatorname{erfc}\left(\frac{(z-h_1)\sqrt{\mu_2\sigma_2}}{2\sqrt{t}}\right), & z > h_1. \end{cases} \quad (1.9.49)$$

Это решение стремится к нулю на бесконечности, обеспечивает выполнение граничного условия при  $z = 0$  и удовлетворяет условию сопряжения  $[u]_{z_1} = 0$ , если только  $u_1(h_1-0,t) = u_2(h_1+0,t) \equiv u(h_1,t)$ . Остается обеспечить равенство производных на границе  $z = z_1$ :

$$\left[ \frac{1}{\zeta} \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\zeta_1} \frac{\partial u_1}{\partial z}(z_1-0,t) = \frac{1}{\zeta_2} \frac{\partial u_2}{\partial z}(z_1+0,t).$$

Согласно (1.9.49)

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(z_1-0,t) = \left[ u_0 \frac{\partial}{\partial z} q_{1,1}(z,t,h_1) + u(z_1,t) * \frac{\partial}{\partial z} q_{2,1}(z,t,h_1) \right]_{z=z_1},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}(h_1+0,t) = u(z_1,t) * \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{erfc}\left(\frac{(z-h_1)\sqrt{\mu_2\sigma_2}}{2\sqrt{t}}\right) \Big|_{z=z_1}.$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{erfc}\left(\frac{(z-h_1)\sqrt{\mu_2\sigma_2}}{2\sqrt{t}}\right) \Big|_{z=h_1} = \frac{\partial}{\partial z} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{(z-h_1)\sqrt{\mu_2\sigma_2}}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) \Big|_{z=h_1} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\mu_2\sigma_2}}{2\sqrt{t}}.$$

Величину  $u(z_1,t) = u(h_1,t)$  найдем из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_1} \left[ u_0 \frac{\partial}{\partial z} q_{1,1}(h_1,t,h_1) + u(z_1,t) * \frac{\partial}{\partial z} q_{2,1}(h_1,t,h_1) \right] = \\ = \frac{1}{\zeta_2} u(h_1,t) * \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{erfc}\left(\frac{(z-h_1)\sqrt{\mu_2\sigma_2}}{2\sqrt{t}}\right) \Big|_{z=h_1} \end{aligned} \quad (1.9.50)$$

Для вычисления величины  $u(h_1,t)$  запишем аналог этого уравнения в области изображений

$$\frac{1}{\zeta_1} \left[ u_0 \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_{1,1}(h_1,t,h_1) + \hat{u}(h_1,p) \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_{2,1}(h_1,p,h_1) \right] = \frac{-k_2}{\zeta_2} \hat{u}(h_1,p)$$

и учтем, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \widehat{q}_{1,1}(z, t, h_1) \Big|_{z=h_1} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{sh(k_1(h_1 - z))}{shk_1 h_1} \Big|_{z=h_1} = -k_1 \frac{1}{shk_1 h_1}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \widehat{q}_{2,1}(z, t, h_1) \Big|_{z=h_1} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{sh(k_1 z)}{shk_1 h_1} \Big|_{z=h_1} = k_1 cthk_1 h_1.\end{aligned}$$

Из уравнения относительно  $\widehat{u}(z_1, p)$

$$\frac{k_1}{\zeta_1} \left[ -\frac{u_0}{shk_1 h_1} + \widehat{u}(z_1, p) cthk_1 h_1 \right] = -\widehat{u}(z_1, p) \frac{k_2}{\zeta_2}$$

найдем

$$\widehat{u}(z_1, p) = \frac{u_0}{shk_1 h_1 (cthk_1 h_1 + k_2 \zeta_1 / (k_1 \zeta_2))}.$$

Примем  $q_{12} := k_2 \zeta_1 / (k_1 \zeta_2)$ , тогда, выражая гиперболические функции через экспоненты, путем простых преобразований можно убедиться в тождестве

$$\frac{1}{shk_1 h_1 (cthk_1 h_1 + k_2 \zeta_1 / k_1 \zeta_2)} = \frac{2e^{-k_1 h_1}}{1 + q_{12}} \frac{1}{1 + \bar{k}_{12} e^{-2k_1 h_1}}, \quad (1.9.51)$$

в котором

$$\bar{k}_{12} := \frac{1 - q_{12}}{1 + q_{12}}, \quad \frac{2}{1 + q_{12}} = 1 + \bar{k}_{12}.$$

Так как

$$\frac{1}{1 + \bar{k}_{12} e^{-2k_1 h_1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \bar{k}_{12}^m e^{-2mk_1 h_1},$$

то

$$\frac{1}{shk_1 h_1 (cthk_1 h_1 + k_2 \zeta_1 / k_1 \zeta_2)} = (1 + \bar{k}_{12}) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \bar{k}_{12}^m e^{-(2m+1)k_1 h_1}. \quad (1.9.52)$$

Пусть  $\zeta = \mu_1 = \mu_2 = const$ . Когда  $u(z, t)$  соответствует компоненте  $E_x$ , то

$$\bar{k}_{12} = k_{12} = \frac{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}.$$

Если же  $u(z, t)$  соответствует компоненте  $H_x$ , тогда  $\zeta_1 = \sigma_1$ ,  $\zeta_2 = \sigma_2$ , поэтому

$$\bar{k}_{12} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} = -\frac{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}} = -k_{12}.$$

На основании (1.9.52) аналог формулы (1.9.36) в области оригиналов примет вид

$$\hat{u}(h_1, p) \square u(h_1, t) = u_0(1 + \bar{k}_{12}) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \bar{k}_{12}^m \operatorname{erfc} \left( \frac{(2m+1)h_1 \sqrt{\mu_1 \sigma_1}}{2\sqrt{t}} \right). \quad (1.9.53)$$

Решение  $u(z, t)$  дает формула (1.9.49), в которой следует положить

$$u_1(h_1 - 0, t) = u_2(h_1 + 0, t) \equiv u(h_1, t). \quad (1.9.54)$$

Итак, формула (1.9.49) с учетом (1.9.40) принимает вид

$$u(z, t) = \begin{cases} u_1(z, t) = u_0 q_{1,1}(z, t, h_1) + u(h_1, t) * q_{2,1}(z, t, h_1), & 0 \leq z \leq h_1, \\ u_2(z, t) = u(h_1, t) * \operatorname{erfc} \left( \frac{(z - h_1) \sqrt{\mu_2 \sigma_2}}{2\sqrt{t}} \right), & z > h_1. \end{cases} \quad (1.9.55)$$

Рассмотрим более подробно вычисление интегралов свертки в (1.9.55).

Используя определение функции  $\operatorname{erfc}(x)$ <sup>16</sup> получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{erfc} \left[ \frac{a}{\sqrt{t}} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) = \frac{a}{\sqrt{\pi t^3}} \exp \left( -\frac{a^2}{t} \right), \quad a = \text{const}. \quad (1.9.56)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} u(h_1, t) * \operatorname{erfc} \left( \frac{(z - h_1) \sqrt{\mu_2 \sigma_2}}{2\sqrt{t}} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \operatorname{erfc} \left( \frac{(z - h_1) \sqrt{\mu_2 \sigma_2}}{2\sqrt{t - \tau}} \right) u(h_1, \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t u(h_1, \tau) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{erfc} \left( \frac{(z - h_1) \sqrt{\mu_2 \sigma_2}}{2\sqrt{t - \tau}} \right) d\tau = \\ &= \frac{(z - h_1) \sqrt{\mu_2 \sigma_2}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u(h_1, \tau)}{\sqrt{(t - \tau)^3}} e^{-\frac{(z - h_1)^2 \mu_2 \sigma_2}{4(t - \tau)}} d\tau. \end{aligned} \quad (1.9.57)$$

Аналогично, на основании приведенного выше соотношения (1.9.48) для  $q_{2,1}(z, t, h_1)$ , найдем

<sup>16</sup>  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ ,  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ .

$$u(h_1, t) * q_{2,1}(z, t, h_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_m^-}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u(h_1, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} e^{-\frac{(\alpha_m^-)^2}{4(t-\tau)}} d\tau - \frac{\alpha_m^+}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u(h_1, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} e^{-\frac{(\alpha_m^+)^2}{4(t-\tau)}} d\tau \right\}, \quad (1.9.58)$$

где  $\alpha_m^{\pm} := \sqrt{\mu_1 \sigma_1} [(2m+1)h_1 \pm z]$ .

Итак, решение задачи (1.9.47) в двухслойной среде описывает формула (1.9.55) в которой величина  $u(h_1, t)$  вычисляется посредством (1.9.53)-(1.9.54), а свертки – по формулам (1.9.57)-(1.9.58).

*Замечание.* Для выполнения расчетов удобно ввести безразмерные величины  $\bar{z}$ ,  $\bar{t}_m$  и  $\bar{\tau}_m$  посредством формул

$$\bar{z} := \frac{z}{h_1}, \quad \bar{t}_m := \frac{2\sqrt{t}}{h_1 \sqrt{\mu_m \sigma_m}} = \frac{\sqrt{2\pi t 10^7 \rho_m}}{h_1} = \frac{\sqrt{2\pi t 10^7 \rho_1 \rho_m / \rho_1}}{h_1} = \bar{t}_1 \sqrt{\bar{\rho}_m},$$

$$\bar{\tau}_m := \frac{\sqrt{2\pi \tau 10^7 \rho_m}}{h_1} = \bar{\tau}_1 \sqrt{\bar{\rho}_m},$$

где принято

$$\bar{\rho}_m = \frac{\rho_m}{\rho_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_m} = \frac{1}{\bar{\sigma}_m}, \quad \mu_m = \frac{\mu_m}{\mu_0} \mu_0 = \bar{\mu}_m \mu_0, \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7}.$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{(z-h_1)\sqrt{\mu_1 \sigma_1}}{2\sqrt{t-\tau}} &= \frac{\left(\frac{z}{h_1}-1\right)h_1\sqrt{\mu_1 \sigma_1}}{2\sqrt{t-\tau}} = \frac{\left(\frac{z}{h_1}-1\right)h_1\sqrt{4\pi 10^{-7} \sigma_1}}{2\sqrt{t-\tau}} = \\ &= \frac{h_1\sqrt{2\pi^2}}{\sqrt{10^7 \rho_1 2\pi(t-\tau)}} \left(\frac{z}{h_1}-1\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{10^7 \rho_1 2\pi(t-\tau)}} \left(\frac{z}{h_1}-1\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\bar{t}^2 - \bar{\tau}^2}} (\bar{z}-1). \end{aligned}$$

В этих обозначениях справедливы тождества

$$u(h_1, t) = u_0 (1 + k_{12}) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m k_{12}^m \operatorname{erfc} \left( \frac{\pi\sqrt{2}}{\bar{t}_1} (2m+1) \right),$$

$$\frac{(\alpha_m^{\pm})}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\mu_1 \sigma_1} [(2m+1)h_1 \pm z]}{2\sqrt{t}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\bar{t}_1} (2m+1 \pm \bar{z})$$

$$\operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{\mu_1\sigma_1}(2mh_1+z)}{2\sqrt{t}}\right]=\operatorname{erfc}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\bar{t}_1}(2m+\bar{z})\right),$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\mu_2\sigma_2}(z-h_1)}{2\sqrt{t}}\right)=\operatorname{erfc}\left((\bar{z}-1)\frac{\pi\sqrt{2}}{\bar{t}_1}\sqrt{\frac{\mu_2\sigma_2}{\mu_1\sigma_1}}\right).$$

*Выводы.* 1. Скорость сходимости алгоритма Шварца к решению зависит от величины проводимости среды, круговой частоты или времени установления  $t$  и величины наложения интервалов, равной  $H - h$ . В одномерной модели среды (при достаточно произвольном распределении проводимостей) итерационный процесс Шварца будет сходиться к решению задачи со скоростью, зависящей от свойств модели в области наложения интервалов, т.е. при  $h < z < H$ .

2. Сходимость итерационного процесса зависит от величины  $\hat{p}_2$ , при вычислении которой следует в волновом числе принять проводимость равной  $\tilde{\sigma} = \min_{h \leq z \leq H} \sigma(z)$ . Как следует из (1.9.9), при  $k \rightarrow 0$   $p_2 \rightarrow h/H$ , что может служить оценкой сверху для величины этого параметра в проводящей среде не только в одномерных задачах, но и, возможно, в задачах большей размерности.

3. Применение альтернирующего метода Шварца для построения граничных значений в процессе получения численного решения задач с уравнениями эллиптического и параболического типов позволяет существенно уменьшить размеры матрицы системы сеточных уравнений за счет сокращения размеров области, в которой задача решается численно.

4. Достоинство алгоритма Шварца состоит также в том, что он дает возможность сделать декомпозицию сложной задачи на ряд более простых подзадач, решение каждой из которых может выполняться автономно. На этом пути появляется возможность построить серию алгоритмов параллельных вычислений на мультипроцессорных компьютерах.

5. Поля в дальней зоне контролируемых источников распространяется в слоистой земле подобно плоской волне [Ваньян, 1965], поэтому рассмотренные здесь области применимости и оценки скорости сходимости алгоритма Шварца

остаются в силе на достаточно больших расстояниях от источников электромагнитного поля.

## **Заключение.**

В Пособии рассмотрены различные методы решения прямых одномерных задач геоэлектрики, относящихся преимущественно к уравнениям эллиптического и параболического типов, как на конечном, так и полубесконечном интервалах. Очевидно пропедевтическое значение такого подхода. Систематическое изложение подходов к исследованию простых моделей является вводным курсом, обеспечивающим обобщение рассмотренных здесь методов и алгоритмов на решение аналогичных задач большей размерности в неограниченных областях.

Следует отметить рассмотренное в Пособии построение системы кусочно-экспоненциальных базисных функций метода конечных элементов. Они обеспечили расширение функций базиса за счет элементов, определенных на полубесконечных интервалах. Это обобщение позволило получить численные решения задач с кусочно-постоянными свойствами среды, совпадающие с их аналитическими (точными) решениями на полупрямых.

Показано, что при численном решении задач в неограниченных областях целесообразно выполнять их декомпозицию на основе использования альтернирующего метода Шварца. Результаты исследований позволяют сделать оценку сверху скорости сходимости итерационного процесса Шварца как в стационарных, так и нестационарных задачах.

Обобщение изложенных здесь идей, методов и алгоритмов на задачи большей размерности предполагается сделать в следующей (третьей) части Пособия.

## Список литературы

1. Ахишмин В.Н., Гитман М.Б., Келлер И.Э., Неймарк О.Б., Столбов В.Ю., Трусов П.В., Фрик П.Г. Введение в математическое моделирование. – М.: Логос, 2005. 440 с.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. –М.: Мир, 1984, 494 с.
3. Бердичевский М.Н. Электроразведка методом магнитотеллурического профилирования. –М.: Недра, 1969. 255 с.
4. Бердичевский М.Н., Жданов М.С. Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля Земли. –М.: Недра, 1981. 327 с.
5. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. МТ зондирования горизонтально-однородных сред. –М.: Недра. 1992. 250 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, т. I, 1969, т. II, 1970.
7. Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. –М.: Недра, 1965. 108 с.
8. Ваньян Л.Л., Дебабов А.С., Юдин М.Н. Интерпретация магнитотеллурических зондирований неоднородных сред. –М., Недра, 1984 - 197 с.
9. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике: Справочник геофизика. / Под ред. В.И. Дмитриева. –М.: Недра, 1990. 498 с.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. –М.: ФМ, 1962. 1100 с.
11. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. –М.: Высшая школа, 1965. 466 с.
12. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001, 430 с.
13. Дмитриев В.И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. –М.: МГУ, 1969. 131 с.

14. Друскин В.Л., Книжнерман Л.А. Спектральный дифференциально-разностный метод численного решения трехмерных нестационарных задач электроразведки // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1988. № 8. С. 63–74.
15. Завадский Ю.В. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. –М.: Наука, 1972. 557 с.
16. Зенкевич О. "Метод конечных элементов в технике". – М.: Мир, 1975.
17. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. –М.: Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
18. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1970, 720 с.
19. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005, 671 с.
20. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. 3-е изд. –М.: Наука, 1989.
21. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы –М.: Наука, 1981.
22. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы –М.: Наука, 1981. - 416 с.
23. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. –М.: Физматгиз, 1970. 512 с.
24. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. — М.: Л.: Гостехиздат, 1952. 254 с.
25. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов, – М.: Физматгиз, 1966. 432 с.
26. Никольский В.В. Вариационные методы внутренних задач электродинамики. –М.: Наука, 1967. 400 с.
27. Никольский В.В., Никольская Т.И. Декомпозиционный подход к решению задач электродинамики.–М.: Наука, 1983, 304 с.
28. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов.– М.: Мир, 1981, 304 с.

29. Райс.Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. –М.: Мир, 1984,264 с.
30. Самарский А.А.Введение в теорию разностных схем -М.: Наука, 1971. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные схемы для эллиптических уравнений. –М.: Наука, 1976.
31. Самарский А.А., Гулин. А.В. Устойчивость разностных схем. –М.: Наука, 1973.
32. Самарский А.А., Гулин. А.В. Численные методы математической физики. –М.: Научный мир, 2003, 316 с.
33. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. –М.: Физматлит, 2002. 320 с.
34. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
35. Л. Сегерленд. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир, 1979, 392 с.
36. Г. Стренг, Дж. Фикс. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977, 349 с.
37. Суворов Ю. П.. О решении прямых задач электроразведки с помощью вариационных методов математической физики. Известия ВУЗов, сер. Геология и разведка, 5,1969,
38. Суворов Ю. П. О применении метода Рунге к решению прямых задач электроразведки. Известия ВУЗов, сер. Геология и разведка, 12, 1969.
39. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1977.
40. Уилкинсон Дж., Райш С. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. –М.: Машиностроение, 1976, 389 с.
41. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2, – М.: Наука, 1964, 463 с.
42. Юдин В.М., Юдин М.Н. Математические модели геоэлектрики. Часть I. Слоистые модели среды. – М.: РГГРУ(МГРИ), 2007, 155 с.

43. Юдин М.Н. К расчету нестационарного поля бесконечно длинного кабеля в двумерной среде. –М.: 1978, 9 с.- Рукопись представлена МГРИ. Деп. в ВИНТИ 9 ноября 1978, N3437-78 Деп.
44. Юдин М.Н. Альтернирующий метод численного решения задач геоэлектрики. В сб.: Математические методы в геоэлектрике, АН СССР, ИЗМИРАН, 1982, с. 47-52.
45. Юдин М.Н. Применение альтернирующего метода Шварца для численного решения задач геоэлектрики. Изв. ВУЗов, Геология а разведка, деп. в ВИНТИ I2.03.82, 19 с. ,№. 1047-82 Деп.
46. Юдин М.Н. Математическое обеспечение численного решения прямых задач электромагнитных зондирований неоднородных сред. Дисс. на соиск. уч. ст. д. ф.-м. н. –М.: МГРИ, 1985. 380 с.
47. Юдин М.Н. Некоторые вопросы теории интерпретации индукционных зондирований. Дисс. на соиск. уч.ст. к.т.н. –М: МГРИ, 1970. 225 с.
48. Юдин М.Н., Калишенко Т.В., Юдин В.М. О применении вейвлет-преобразования и альтернирующего метода Шварца для решения некоторых задач геоэлектрики. – М.: МГГА, Материалы международной конференции «Новое в науках о земле», – М.:2002, с. 311-325.
49. Юдин М.Н., Юдин В.М.. О декомпозиции прямых задач геоэлектрики на основе алгоритма Шварца. Изв. РАН, Физика Земли, №4, 2004, с. 3-11.
50. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. –М.: Наука, 1968, 344 с.
51. Beylkin G., Coifman R., and Rokhlin V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms, Pure Appl. Math.1991, 44, p. 141-183.]
52. Beylkin G.On wavelet based algorithms for solving differential equations. Benedetto J., and Frazier M. (eds.) Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press, Boca Raton, 1993, pp.449-466.
53. Coggon, J. H., Electromagnetic and electrical modelling by the finite element method: Ph.D. thesis, University of Delft, Holland. .Geophysics 36, 132-155., 1971.

54. Dahmen W., Kurdila A. J., and Oswald P. (eds.), *Multiscale Wavelets Methods for Partial Differential Equations*. San Diego, Calif.:Academic Press, 1997.
55. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
56. Daubechies I. Orthonormal Bases of compactly supported wavelets. *Comm. PureAppl. Math.*, 41, 1988, pp. 909-996.
57. Gagnon L. and Lina J.M. Symmetric Daubechies' wavelets and numerical solutions of NLS2 equations. *J. Phys.A: Math. Gen.* 27, 1994, pp. 8207-8230.
58. Glowinsky R., Lawton W.M., Ravachol M., and Tenenbaum E. Wavelet solution of linear and nonlinear elliptic, parabolic, and hyperbolic problems in one space dimension, in *Computing Methods in Applied Science and Engineering*, Glowinsky R and Lichnewsky A. (eds.), Philadelphia: SIAM, 1990, pp.55-120.
59. Goswami J.C., Chan A.K. *Fundamentals on Wavelets. (Theory, Algorithms, and Applications)*. A Wiley-Interscience Publication. New York, 1999.
60. Jawerth B. and Swedlens W. An Owerview of wavelet based multiresolution analyses. *SIAM Review*. Vol.36, pp. 377-412, 1994.
61. Kaiser G. *A Friendly guide to wavelets*. Birkhauser. ISBN G-8176-3711-7, Boston, 1994.
62. Kölzow D. *Wavelets. A Tutorial and a Bibliography*, Erlangen, 1994.
63. Mallat S. Multiresolution approximation and wavelets. *Trans. Amer. Math. Soc.* 315, 1989, pp. 69-88.
64. Resnikoff H. L., Wells R.O. *Wavelet Analysis*. Springer, 1991.
65. Rodi, 1976,Xu J., and Shann W. Galerkin-wavelet methods for two point value problems, *Numer.Math.*63, pp. 123-144, 1992.
66. Xu J., and Shann W. Galerkin-wavelet methods for two point value problems, *Numer.Math.*63,pp. 123-144, 1992.

## Приложение. Основные математические понятия и определения

В этом разделе дадим определения некоторых функциональных пространств, которые понадобятся для изложения материала последующих глав.

### П.1. Некоторые функциональные пространства

#### П.1.1. Пространство функций, интегрируемых с квадратом.

Пусть  $L^2(a,b)$  означает совокупность всех (измеримых) функций  $f(x)$ , заданных и интегрируемых с квадратом на отрезке  $[a,b]$ . Интегрируемость с квадратом означает, что

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Ясно, что в  $L^2(a,b)$  входят все ограниченные кусочно-непрерывные функции, тем более входят все непрерывные функции.

Скалярным произведением двух функций  $f(x), g(x) \in L^2(a,b)$  называют интеграл

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (\text{П.1})$$

Черта над функцией  $g(x)$  означает комплексное сопряжение.

Функции  $f(x), g(x) \in L^2(a,b)$  называются *ортogonalными* на интервале  $(a,b)$ , если  $\langle f, g \rangle = 0$ .

Для любых функций  $f(x), g(x) \in L^2(a,b)$  справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}, \quad (\text{П.2})$$

называемое *неравенством Коши-Буняковского*.

*Нормой* функции  $f(x) \in L^2(a,b)$  называют неотрицательное число

$$\|f\|_{L^2(a,b)} := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}. \quad (\text{П.3})$$

Из определения нормы, свойств интеграла и неравенства Коши-Буняковского следуют свойства нормы

1.  $\|f\| \geq 0, \|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$ .
2. Для любого числа  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ .
3. Неравенство треугольника  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ .

В более компактной записи неравенство Коши-Буняковского принимает вид

$$|\langle f, g \rangle|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \|g\|_{L^2(a,b)}. \quad (\text{П.2}_1)$$

Пространство  $L^2(a,b)$  является *полным*<sup>17</sup> *нормированным* пространством, в котором норма порождена скалярным произведением. Такое пространство называют *гильбертовым*. Гильбертово пространство одновременно является метрическим пространством, так в нем можно определить расстояние  $d$  между элементами  $f, g \in L^2(a,b)$  посредством формулы

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

*Замечание.* Вместо промежутка  $(a,b)$  в приведенных формулах можно взять ограниченную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  и принять  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ . Приведенные выше определения и формулы останутся без изменения.

### П.1.2. Пространство непрерывных функций

Пусть  $C[a,b]$  – множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке  $[a,b]$ . Норму функции  $f \in C[a,b]$  определяют по формуле

$$\|f\|_{C[a,b]} := \max_{a \leq x \leq b} |f|,$$

а расстояние между парой функций  $f, g \in C[a,b]$  вычисляют, полагая

$$d(f, g) := \max_{a \leq x \leq b} |f - g| = \|f - g\|_{C[a,b]}.$$

<sup>17</sup> Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая *фундаментальная последовательность* имеет предел. Последовательность элементов  $\{\varphi_n\}$  метрического пространства  $E$  называется *фундаментальной (сходящейся в себе)*, если  $d(\varphi_n, \varphi_m) \rightarrow 0$  при  $m, n \rightarrow \infty$ .

Можно показать, что  $C[a,b]$  – полное нормированное (т.е. банахово) пространство.

## П.2. Обобщенные ряды Фурье.

### П.2.1. Ортогональные системы функций

Рассмотрим систему вещественных функций  $\{\varphi_n(x)\}$ , определенных в промежутке  $[a, b]$  и непрерывных на нем или, по крайней мере, кусочно-непрерывных. Если функции этой системы попарно ортогональны

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, n, m = 0, 1, \dots; n \neq m,$$

то ее называют *ортогональной системой* функций. При этом мы всегда будем предполагать, что

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \|\varphi_n\|^2 > 0.$$

Система функций  $\{\varphi_n(x)\}$  называется *полной* в  $L^2(a,b)$ , если не существует отличной от нуля функции, ортогональной всем функциям этого семейства.

При соблюдении условий  $\|\varphi_n\| = 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) система называется *ортонормальной* или *ортонормированной*. Если же эти условия не выполнены, то, при желании можно перейти к системе  $\{\varphi_n(x)/\|\varphi_n\|\}$ , которая уже заведомо будет *ортонормальной*.

Важнейшим примером ортогональной системы функций в промежутке  $[-\pi, \pi]$  является тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

Пусть  $\{\varphi_n(x)\}$  ортогональная система на отрезке  $[a,b]$  и пусть  $f(x)$  непрерывная или кусочно-непрерывная на  $[a,b]$  вещественная функция. Разложим эту функцию в ряд по функциям  $\varphi$  вида

$$f(x) = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n + \dots \quad (\text{П.4})$$

Для определения коэффициентов этого разложения, допуская возможность дальнейших операций, умножим обе части разложения на  $\varphi_m(x)$  и проинтегрируем:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

Ввиду ортогональности все интегралы в правой части, кроме одного, будут равны нулю, поэтому

$$\int_a^b f(x)\varphi_m dx = c_m \int_a^b \varphi_m^2(x)dx = c_m \|\varphi_m\|^2.$$

Откуда получим

$$c_m = \frac{1}{\|\varphi_m\|^2} \int_a^b f(x)\varphi_m dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{П.5})$$

Ряд (П.4) с коэффициентами, вычисленными по формулам (П.5), называется (*обобщенным*) *рядом Фурье* функции  $f(x)$ , а сами коэффициенты – ее (*обобщенными*) *коэффициентами Фурье* относительно системы  $\{\varphi_n(x)\}$ . Обобщенный ряд Фурье, построенный по функции  $f(x)$  связан с ней лишь формально. Эту связь принято обозначать так:

$$f(x) \square \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (\text{П.6})$$

Сходимость этого ряда к функции  $f(x)$  подлежит исследованию.

Поставим задачу: из всех линейных комбинаций первых  $n+1$  функций  $\varphi_k(x)$

$$S_n(x) = C_0\varphi_0 + C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$$

при произвольном наборе коэффициентов  $C_0, C_1, \dots, C_n$  найти ту, которая дает наилучшее – в смысле среднеквадратического отклонения – приближение к функции  $f(x)$ . Это означает, что требуется добиться наименьшего значения для величины

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \|f - S_n\|_{L^2(a,b)}^2.$$

Опуская простые промежуточные выкладки [см., например, Фихтенгольц, т.2, 1964, с. 410], для  $\Delta_n$  получают

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)^2 dx - \sum_{m=0}^n \|\varphi_m\|^2 c_m^2 + \sum_{m=0}^n \|\varphi_m\|^2 [c_m - C_m]^2.$$

Видим, что  $\Delta_n$  достигает наименьшего значения тогда, когда последняя сумма равна нулю, а это будет при  $c_m = C_m, m = 0, 1, \dots, n$ . Итак, из всех многочленов  $S_n(x)$  величине  $\Delta_n$  наименьшее значение  $\delta_n$

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_a^b f(x)^2 dx - \sum_{m=0}^n \|\varphi_m\|^2 c_m^2 \quad (\text{П.7})$$

доставляет отрезок обобщенного ряда Фурье

$$s_n(x) = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n.$$

Равенство (П.7) называют тождеством Бесселя. Из него получаются неравенства Бесселя

$$\sum_{m=0}^n \|\varphi_m\|^2 c_m^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx. \quad (\text{П.8})$$

Если при  $n \rightarrow \infty$   $\delta_n \rightarrow 0$ , то говорят, что сумма  $s_n(x)$  сходится к  $f(x)$  «в среднем». Это равносильно наличию равенства

$$\sum_{m=0}^n \|\varphi_m\|^2 c_m^2 = \int_a^b f(x)^2 dx, \quad (\text{П.9})$$

которое называют *уравнением замкнутости*. Если оно выполняется для любой непрерывной функции  $f(x)$ , то саму систему  $\{\varphi_n(x)\}$  называют *замкнутой*.

Пусть  $\{\varphi_n(x)\}$  – ортонормированная система функций на  $[a, b]$ . Тогда коэффициенты Фурье  $c_m$  по этой системе равны

$$c_m = \langle f, \varphi_m \rangle = \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{П.10})$$

В ортонормированной системе  $\|\varphi_n\|^2 = 1$ , поэтому уравнение замкнутости (П.9) (П.7) принимает простой вид:

$$\sum_{m=0}^n c_m^2 = \|f\|^2. \quad (\text{П.11})$$

### П.2.2. Линейные операторы и некоторые их свойства

Выделим из пространства  $L^2(\Omega)$ , ( $\Omega \subset \square^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ ) подмножество элементов  $\Phi \subset L^2(\Omega)$  такое, что

- если  $\varphi, \psi \in \Phi$ , то  $\alpha\varphi + \beta\psi \in \Phi$  (множество  $\Phi$  является линейной системой),
- каждый  $\varphi \in \Phi$  удовлетворяет дополнительным условиям, зависящим от рассматриваемой задачи.

Пусть  $\Phi$  – линейная система и пусть оператор  $A$  каждому элементу  $\varphi \in \Phi$  ставит в соответствие элемент  $y \in L^2(\Omega)$ . Оператор  $A$  называется *аддитивным*, если  $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A\varphi_1 + A\varphi_2$ . Оператор  $A$  называется *линейным*, если он аддитивен и непрерывен. Линейный оператор, определенный на линейном многообразии  $\Phi$  называется *положительно полуопределенным*, если для всех  $\varphi \in \Phi$  выполняется неравенство  $\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0$ , причем  $\langle A\varphi, \varphi \rangle = 0$  допускается на элементе  $\varphi \neq 0$  (более кратко записывают:  $A \geq 0$ ). Если  $\langle A\varphi, \varphi \rangle > 0$  при  $\varphi \neq 0$ , то оператор  $A$  называют *положительным* (более кратко:  $A > 0$ ). Если же  $\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq \gamma \langle \varphi, \varphi \rangle$ ,  $\gamma = \text{const} > 0$ , то оператор  $A$  называют *положительно определенным*.

Множество  $\Phi$  будем называть областью определения оператора  $A$  и обозначать его  $\Phi(A)$ .

Сопряженный оператор вводится посредством тождества Лагранжа

$$\langle Ag, h \rangle = \langle g, A^*h \rangle.$$

Если  $\forall h \in \Phi Ah = A^*h$  и  $\Phi(A) = \Phi(A^*)$ , то оператор  $A$  называют *самосопряженным*.

Для анализа численных алгоритмов большое значение имеют разложения функций в ряды Фурье по собственным функциям основных и сопряженных

операторов. Пусть  $A \geq 0$ . Рассмотрим две задачи на собственные функции и собственные значения

$$Au = \lambda(A)u, \quad A^*u^* = \lambda(A^*)u^*. \quad (\text{П.12})$$

Предположим, что собственные функции  $\{u_n\}$  и  $\{u_n^*\}$  этих спектральных задач образуют полную<sup>18</sup> систему и нормированы следующим образом:

$$\langle u_n, u_m^* \rangle = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad (\text{П.13})$$

а соответствующие собственные числа  $Au = \lambda_n(A)$ ,  $A^*u^* = \lambda_n(A^*)$  вещественны.

Тогда, как известно,  $\lambda_n(A) = \lambda_n(A^*)$ . Эту полную систему собственных функций называют *биортонормированной*. В этом случае любые функции  $f \in \Phi$  и  $f^* \in \Phi^*$  могут быть представлены в виде рядов Фурье

$$f = \sum_n f_n u_n, \quad f^* = \sum_n f_n^* u_n^*, \quad (\text{П.14})$$

где

$$f_n = \langle f, u_n^* \rangle, \quad f_n^* = \langle f^*, u_n \rangle. \quad (\text{П.15})$$

*Пример.* Нужно решить задачу линейной алгебры

$$A\varphi = f \quad (\text{П.16})$$

при различных правых частях  $f$ . Пусть нам известны решения спектральных задач

$$A\omega = \lambda\omega, \quad A^*\omega^* = \lambda\omega^*$$

в виде полных базисов  $\{\omega_n\}$  и  $\{\omega_n^*\}$ . Решение задачи и правую часть представим в виде сумм Фурье

$$\varphi = \sum_{n=1}^m \varphi_n \omega_n, \quad f = \sum_{n=1}^m f_n \omega_n, \quad f_n = \langle f, \omega_n^* \rangle.$$

Подставим эти суммы в (П.16) и умножим результат скалярно на  $\omega_n^*$ . После простых преобразований придем к алгебраической системе

---

<sup>18</sup> В  $L^2(\Omega)$  не существует функции  $g \neq 0$ , ортогональной всем функциям семейства.

$$\lambda_n \varphi_n = f_n, n = 1, 2, \dots, m,$$

из которой следует (при  $\lambda_n \neq 0$ ), что

$$\varphi_n = f_n / \lambda_n.$$

Таким образом, решение задачи (П.16) имеет вид

$$\varphi = \sum_{n=1}^m \frac{f_n}{\lambda_n} \omega_n. \quad (\text{П.17})$$

При численном решении задач математической физики порядок матрицы может оказаться очень большим. В этом случае для получения приближенного решения становится важным вычисление первых собственных элементов спектральной задачи.

### **П.3. Обобщенная производной в смысле Соболева и пространство $H_1$**

#### *1. Обобщенная производная в смысле Соболева*

*Определение 1.* Носителем функции  $\varphi(x)$  называется множество тех точек, где  $\varphi(x) \neq 0$ :

$$\text{supp } \varphi(x) = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

*Определение 2.* Функция  $\varphi(x)$  называется *финитной*, если она равна нулю вне некоторого шара (т.е.  $\varphi(x)$  имеет компактный носитель).

*Определение 3.* Будем говорить, что функция  $\varphi(x) \in C_0^{(l)}(\Omega)$ , если она  $l$  раз непрерывно дифференцируема, имеет компактный носитель в области  $\Omega$ .

Примем

$x := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;  $\alpha$  - мультииндекс,  $\alpha := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ,  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ;

$$D^{|\alpha|} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

*Определение 4.* Пусть  $\varphi(x), \psi(x)$  – суммируемые функции по любой области  $\Omega' \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n$  и пусть  $\forall \psi(x) \in C_0^{(l)}(\Omega)$ . Пусть справедливо равенство:

$$\int_{\Omega} \chi(x)\psi(x)dx = (-1)^l \int_{\Omega} \varphi(x)D^l\psi(x)dx$$

для  $\forall \psi(x) \in C_0^{(l)}(\Omega)$ . Тогда функция  $\chi(x)$  называется обобщенной (в смысле Соболева) производной функции  $\varphi(x)$  вида  $D^l\varphi(x)$ .  $\square$

В частности, если  $\varphi(x) \in C^{(l)}(\Omega)$ , то, очевидно, что  $\chi(x) = D^l\varphi(x)$  в классическом смысле.

## 2. Пространство $H_1(\Omega)$

Функция  $u(x) \in H_1(\Omega)$ , где  $\Omega$  – ограниченная область из  $\mathbf{R}^n$ , если

1)  $u(x) \in L^2(\Omega)$ ,

2) существует обобщенная производная в смысле Соболева  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

причем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega).$$

Норма в пространстве  $H_1(\Omega)$ :

$$\|u\|_1^2 = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right] d\Omega. \quad (\text{П.18})$$

Скалярное произведение в  $H_1(\Omega)$ :

$$\{u, v\}_1 = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right] d\Omega, \quad (\text{П.19})$$

тогда пространство  $H_1(\Omega)$  становится вещественным гильбертовым пространством.

Оказывается, что  $H_1(\Omega)$  – полное нормированное (банахово) пространство.

*Определение 5.* Замыкание множества  $C_0^{\infty}(\Omega)$  по норме пространства  $H_1(\Omega)$

называется пространство  $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$  (полное по самому определению).

#### П.4. Пространства Соболева $W_2^l$

При рассмотрении задач математической физики удобно пользоваться функциями пространства Соболева  $W_2^l(\Omega)$ . Оно состоит из функций пространства  $L^2(\Omega)$ , которые имеют в  $\Omega$  суммируемые с квадратом обобщенные производные порядка  $l$  включительно, и является гильбертовым. Скалярное произведение в пространстве  $W_2^l(\Omega)$  определяется формулой

$$\langle u, v \rangle_{W_2^l} := \int_{\Omega} \sum_{|k|=0}^l \sum_{(k)} \frac{\partial^{k_1} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^{k_1} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (\text{П.20})$$

где  $|k| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  а символ  $\sum_{(k)}$  означает суммирование по всем производным порядка  $|k|$ . Норма в пространстве  $W_2^l(\Omega)$  определяется соотношением

$$\|u\|_{W_2^l} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^l}}. \quad (\text{П.21})$$

Для широкого класса областей  $\Omega$  норма  $\|u\|_{W_2^l}$  эквивалентна норме  $\|u\|_1$ .

Если функции  $\varphi$  принадлежат пространству Соболева  $W_2^l(\Omega)$  и, кроме того, удовлетворяют условию

$$\varphi = 0 \text{ на границе } \partial\Omega \text{ области } \Omega,$$

то такое пространство обозначают  $W_2^l(\Omega)$ .

Для широкого класса областей  $\Omega$  и функций  $\varphi \in W_2^l(\Omega)$  можно ввести норму

$$[\varphi]_1 = \left[ \left( \int_{\Omega} \varphi dx \right)^2 + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right|^2 dx \right]^{1/2},$$

эквивалентную норме  $\|\varphi\|_{W_2^l(\Omega)}$ .

#### П.5. Энергетические пространства

Пусть в гильбертовом пространстве  $H$  рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu = Au + Bu = f, \quad f \in H,$$

где  $A, B$  – линейные операторы в  $H$  с областями определения  $D(A), D(B)$  соответственно. Предполагается, что  $D(A) \subseteq D(B)$ .

Пусть  $B = \theta$ ,  $A$  – симметричный положительно определенный оператор т.е.  $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ ,  $\langle Au, u \rangle \geq \gamma^2$ ,  $\gamma > 0$ ,  $u, v \in D(A)$ . В этом случае приходим к задаче

$$Au = f, f \in H.$$

Пусть  $D(A)$  плотно в  $H$ . Введем в  $D(A)$  скалярное произведение и норму

$$[\varphi, \psi] := \langle A\varphi, \psi \rangle, \|\varphi\| := \sqrt{[\varphi, \varphi]}.$$

Пополняя  $D(A)$  по введенной норме, приходим к *полному*<sup>19</sup> гильбертову пространству  $H_A$ , которое называется *энергетическим* пространством, порождаемым оператором  $A$ .

Каждая функция из  $D(A)$  принадлежит пространству  $H_A$ , однако в процессе пополнения в  $H_A$  могут появиться элементы, не входящие в  $D(A)$ , поэтому представления скалярного произведения  $[\varphi, \psi]$  в виде  $\langle A\varphi, \psi \rangle$  уже не имеет места.

*Пример.* Пусть в пространстве  $H = L^2(0,1)$  рассматривается задача

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dz^2} + qu = f(z), z \in (0,1), q \geq 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

где  $q$  – постоянная. Найдем вид скалярного произведения и нормы в энергетическом пространстве  $H_A$ , соответствующем оператору  $A$

$$A = -\frac{d^2}{dz^2} + q$$

этой задачи.

*A. Оператор  $A$  симметричен.* Действительно

<sup>19</sup> Метрическое пространство  $E$  называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел. Последовательность элементов  $\{\varphi_n\}$  метрического пространства  $E$  называется *фундаментальной (сходящейся в себе)*, если расстояние  $d$  между элементами последовательности  $\varphi_n$  и  $\varphi_m$  стремится к нулю ( $d(\varphi_n, \varphi_m) \rightarrow 0$ ) при  $m, n \rightarrow \infty$ .

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 \left( -\frac{d^2u}{dz^2} + qu \right) v dz = \int_0^1 \left( \frac{du}{dz} \frac{dv}{dz} + quv \right) dz = \int_0^1 \left( -\frac{d^2v}{dz^2} + qv \right) u dz = \langle Av, u \rangle,$$

$u, v \in D(A)$ .

Б. Оператор  $A$  положительно определенный.

Для доказательства воспользуемся неравенством

$$\|u\|_{L_2(0,1)}^2 = \int_0^1 |u(\zeta)|^2 d\zeta \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{du}{d\zeta} \right|^2 d\zeta,$$

справедливым для любой функции  $u(z)$ , удовлетворяющей условиям  $u(0) = 0$  и  $\|du/dz\|_{L_2(0,1)} < \infty$ . Действительно, в этом случае

$$u(z) = \int_0^z u'(\zeta) d\zeta.$$

По неравенству Коши-Буняковского (П.2) имеем

$$|u(z)| = \left| \int_0^z 1 \cdot \frac{du}{d\zeta} d\zeta \right| \leq \sqrt{\int_0^z 1^2 \cdot d\zeta} \sqrt{\int_0^z \left| \frac{du(\zeta)}{d\zeta} \right|^2 d\zeta} = \sqrt{z} \sqrt{\int_0^z \left| \frac{du(\zeta)}{d\zeta} \right|^2 d\zeta}.$$

Полагая в интеграле  $z = 1$  и выполняя интегрирование, получим

$$|u(z)|^2 \leq z \int_0^1 \left| \frac{du}{d\zeta} \right|^2 d\zeta = z \left\| \frac{du}{d\zeta} \right\|_{L_2(0,1)}^2 \Rightarrow \|u\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{du}{d\zeta} \right\|_{L_2(0,1)}^2.$$

Воспользуемся этим неравенством для доказательства положительной определенности оператора  $A$ . Имеем

$$\langle Au, u \rangle = \int_0^1 \left( \left| \frac{du}{d\zeta} \right|^2 + qu^2 \right) d\zeta \geq \int_0^1 \left( \left| \frac{du}{d\zeta} \right|^2 \right) d\zeta = \left\| \frac{du}{dz} \right\|_{L_2(0,1)}^2 \geq 2 \|u\|_{L_2(0,1)}^2,$$

что означает положительную определенность оператора  $A$ .

Свойства симметричности и положительной определенности оператора  $A$  позволяют ввести в  $D(A)$  скалярное произведение

$$[u, v] = \langle Au, v \rangle = \int_0^1 \left( \frac{du}{d\zeta} \frac{dv}{d\zeta} + quv \right) d\zeta$$

и норму

$$\|u\| = \sqrt{[u, u]} = \sqrt{\int_0^1 \left( \left| \frac{du}{d\zeta} \right|^2 + qu^2 \right) d\zeta}.$$

*Замечание.* Множество  $D(A)$  означает, что функция  $u(z)$  имеет *вторую* производную, которая принадлежит  $L^2(0,1)$ . Если же требуется, чтобы  $u(z) \in H_A$ , то подразумевается, что функция  $u(z)$  имеет *первую* производную  $du/dz \in L^2(0,1)$ . Это означает, что пространство  $H_A$  значительно шире множества  $D(A)$ .  $\square$

*Задание.* Показать, что оператор

$$A = -\frac{d}{dz} \left( p(z) \frac{d}{dz} \right) + g(z), \quad p(z) > 0, \quad g(z) \geq 0$$

симметричный и положительно определенный. Записать скалярное произведение и норму в энергетическом пространстве  $H_A$ .  $\square$

## П.6. Квадратичные функционалы

*Квадратичным* называют всякий функционал вида  $F(u) + l_1(u) + \overline{l_2(u)} + C$ , где  $F(u)$  - однородный квадратичный функционал,  $l_1$  и  $l_2$  - линейные функционалы,  $C$  - постоянная.

Пусть вектор  $\mathbf{v}$  принадлежит области определения  $\Omega_A$  оператора  $A$ . Такие функции называют *допустимыми* для оператора  $A$ .

*Теорема 1* [Михлин, 1952; Марчук, 1980]. Пусть  $A$  - положительный оператор. Если уравнение

$$Au = f \tag{П.22}$$

имеет решение, то это решение сообщает функционалу

$$\Phi(u) = \langle Au, u \rangle - \langle f, u \rangle - \langle u, f \rangle \tag{П.23}$$

наименьшее значение.

Обратно, элемент, реализующий минимум функционала (П.23), удовлетворяет уравнению (П.22).