

# М.Н. ЮДИН ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ШВАРЦА





# Декомпозиция задач геоэлектрики на основе алгоритма Шварца

1. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ МЕТОДА
2. АЛГОРИТМ МЕТОДА ШВАРЦА
3. АДАПТАЦИЯ МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ
4. ОБСУЖДЕНИЕ СХОДИМОСТИ АМШ
5. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ
6. ИЛЛЮСТРАЦИЯ СООТНОШЕНИЯ РАЗМЕРОВ СЕТОЧНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМАХ ЕЕ ВЫБОРА (2D)
7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ(2D)
8. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ (3D)
9. ОБ АЛГОРИТМЕ ШВАРЦА И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА МУЛЬТИПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ
10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

# 1. Краткая история метода

## Hermann Schwarz

(25 January 1843 – 30 November 1921)

**КАРЛ ГЕРМАН АМАДЕУС ШВАРЦ** - НЕМЕЦКИЙ МАТЕМАТИК, ИЗВЕСТНЫЙ РАБОТАМИ В КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ. СТАТЬЯ ОБ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕМ МЕТОДЕ ОПУБЛИКОВАНА В 1870 Г.

*SCHWARTZ H.A.(1870), "ÜBER EINEN GRENZÜBERGANG DURCH ALTERNIERENDES VERFAHREN", VIERTELJAHRSSCHRIFT DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN ZÜRICH 15: 272–286.*



**Карл Герман Амадеус Шварц** - родился в Хермсдорфе, (Силезия, теперь Польша), умер в Берлине. Женат на Марии Куммер (дочери математика Е. Куммера), в семье было 6 детей. Первоначально изучал химию в Берлине, но под влиянием тестя и Вейерштрасса стал заниматься математикой. Работал в Халле, затем в Цюрихе, где в 1870 г. им была опубликована статья с обоснованием метода, позднее получившего его имя. С 1875 г. в Геттингенском университете занимался вопросами теории функций, дифференциальной геометрией и вариационными методами. Его математические трактаты были увенчаны короной Берлинской академии в 1867 и напечатаны в 1871. В 1892 он стал членом Берлинской Академии наук и профессором университета в Берлине, где его студентами были Л. Фейер, П. Коеб и Е. Цермело.

SCHWARTZ H.A. (1870), «О ЧЕРЕДУЮЩЕМСЯ ПРОЦЕССЕ НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ ГРАНИЦ», ЕЖЕКВАРТАЛЬНЫЙ ЖУРНАЛ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРИРОДЕ ОБЩЕСТВА В ЦЮРИХЕ 15: 272–286.

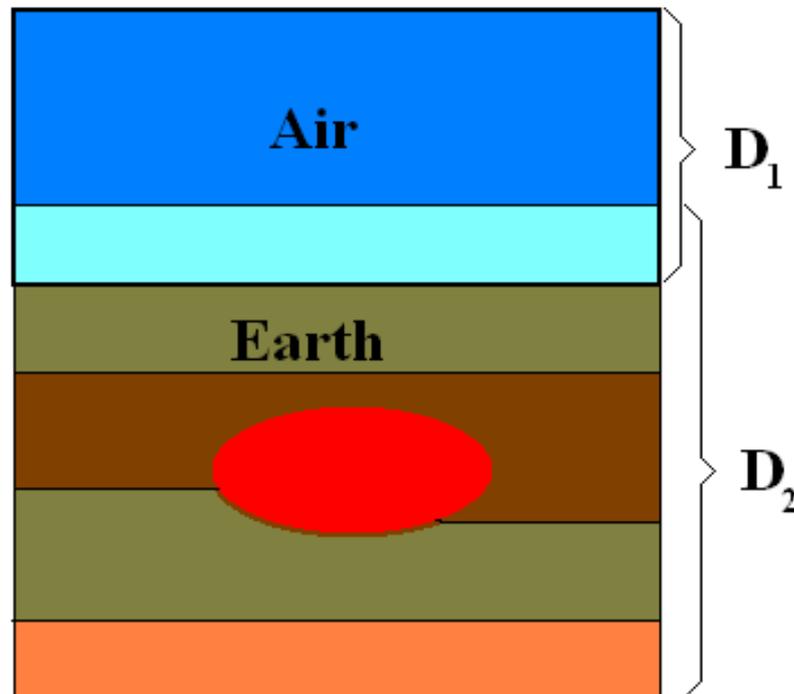
[MIKHLIN, S.G.](#) (1951), "ON THE SCHWARZ ALGORITHM", [DAN SSSR](#), N. SER., 77: 569–571, [ZBL 0054.04204 \(RUSSIAN\)](#).<sup>3</sup>

# 1. Краткая история метода

ПЕРВАЯ ПУБЛИКАЦИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ДЕКОМПОЗИЦИОННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МТЗ

(E-поляризация):

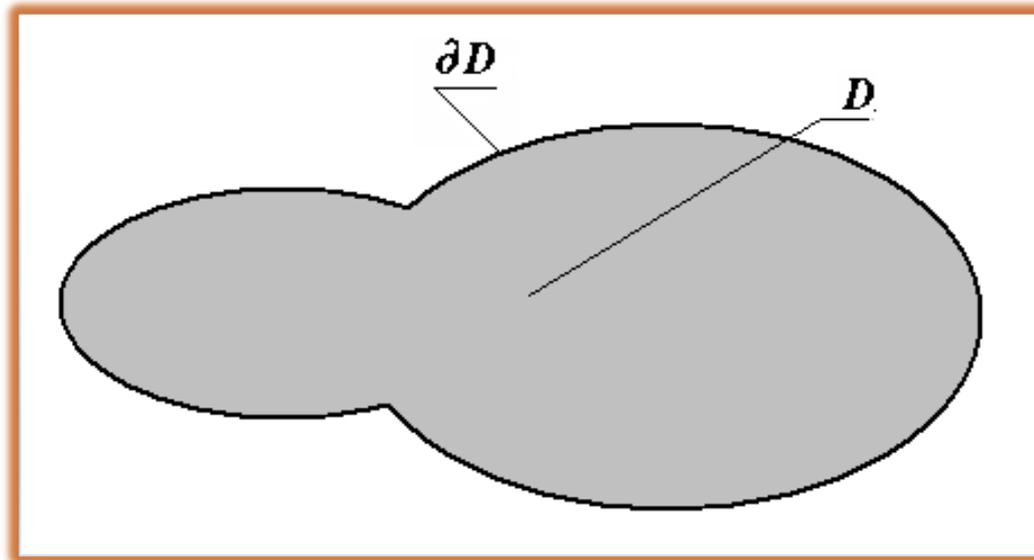
Юдин М.Н. Алгоритм итерационного построения граничных условий при решении геолого-геофизических задач. ЭИ "Мат. методы в геологии". № 6, ВИЭМС, 1981, с. 12-19.



## 2. Алгоритм метода Шварца

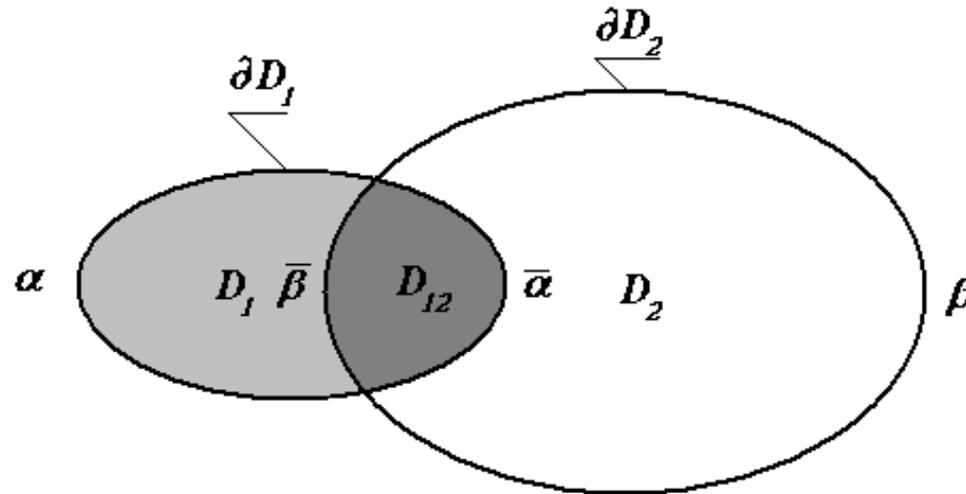
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ  $D$  С ГРАНИЦЕЙ  $\partial D$ :

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in D, \\ u|_{\partial D} = \varphi(M), M \in \partial D. \end{cases} \quad (1)$$



## 2. Алгоритм метода Шварца

Пусть в плоскости  $(x, y)$  область  $D$  представлена объединением двух подобластей, имеющих непустое пересечение.



Предполагается известным метод решения задач Дирихле для в каждой из частичных областей при любых непрерывных или кусочно-непрерывных граничных данных.

## 2. Алгоритм метода Шварца

ПОСТРОИМ ФУНКЦИЮ, РЕШАЮЩУЮ ЗАДАЧУ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1) В  $D_1$  ПРИ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ:

$$u_1(x, y) = \begin{cases} \varphi(M), M \in \alpha \\ \phi(M), M \in \bar{\alpha} \end{cases} \quad (2)$$

ЕЕ ПРИМЕМ ЗА ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ К  $u(x, y)$  В  $D_1$ . ПО НАЙДЕННОЙ  $u_1(x, y)$  ПОСТРОИМ ФУНКЦИЮ, ЯВЛЯЮЩУЮСЯ РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧУ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТИ  $D_2$  ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ:

$$v_1(x, y) = \begin{cases} \varphi(M), M \in \beta \\ u_1(M), M \in \bar{\beta} \end{cases} \quad (3)$$

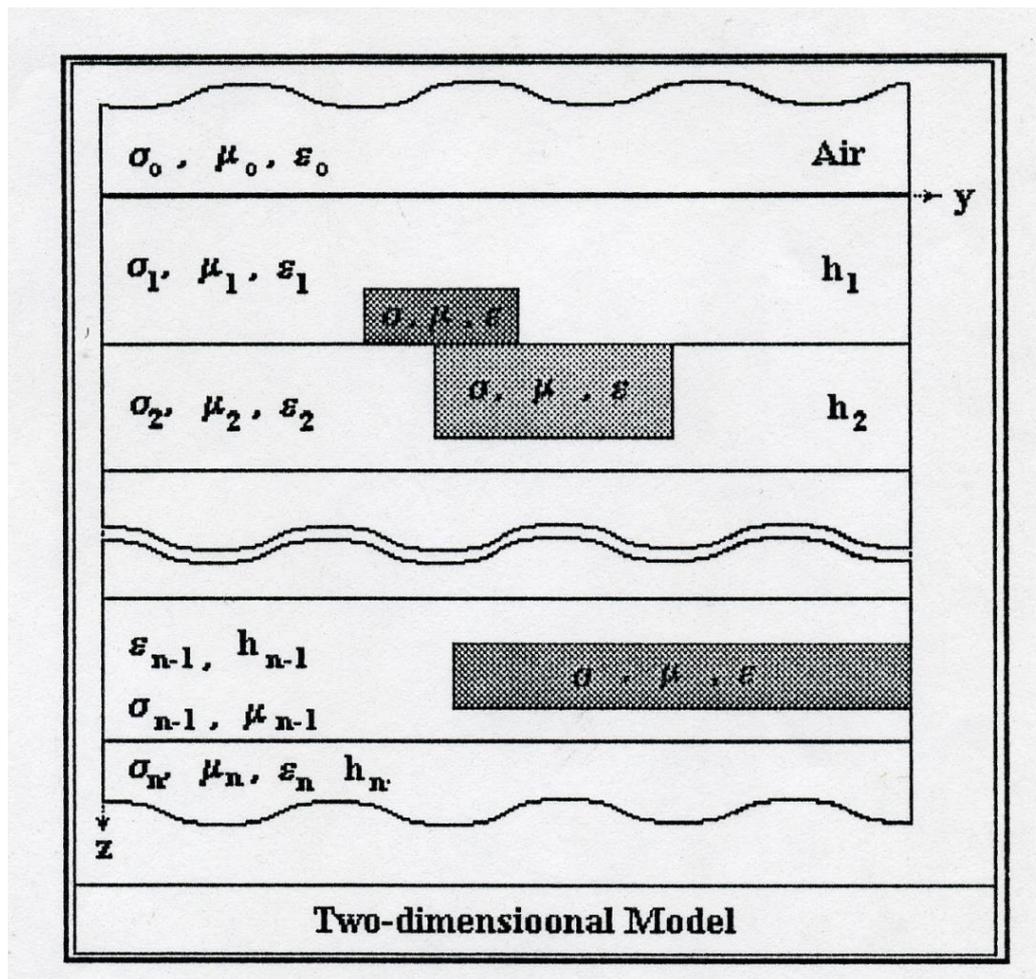
$v_1(x, y)$  ЕСТЬ ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ К  $v(x, y)$  В  $D_2$ .

В КАЖДОЙ ИЗ ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ СТРОЯТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ  $\{u_k(x, y)\}$   $\{v_k(x, y)\}$  К ИСКОМОМУ РЕШЕНИЮ  $u(x, y)$ :

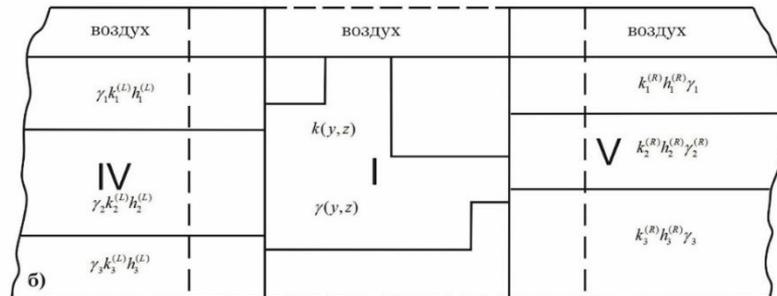
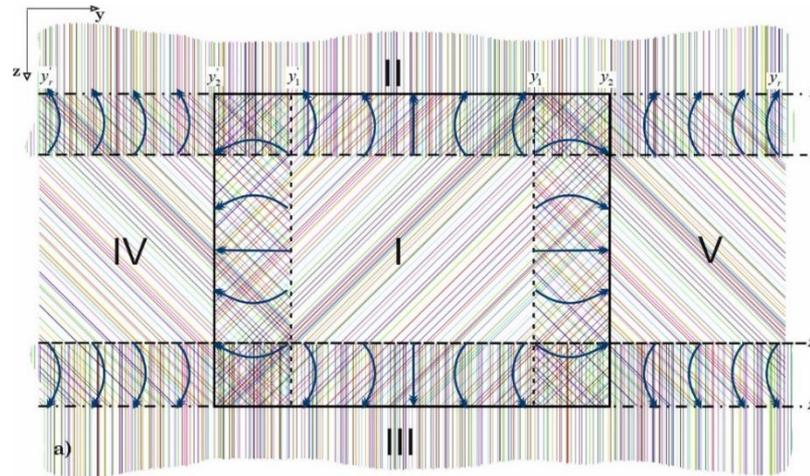
$$\begin{aligned} u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y), \dots \quad (x, y) \in D_1, \\ v_1(x, y), v_2(x, y), \dots, v_n(x, y), \dots \quad (x, y) \in D_2. \end{aligned} \quad (4)$$

ШВАРЦ ДОКАЗАЛ, ЧТО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (4) СХОДЯТСЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ УДОВЛЕТВОРЯЮТ УРАВНЕНИЮ (1) И ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ. ТАКИМ ОБРАЗОМ, ПУТЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В КАЖДОЙ ИЗ ОБЛАСТЕЙ И В ПРЕДЕЛЕ МОЖНО ПОЛУЧИТЬ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ (1) ДЛЯ ОБЛАСТИ  $D = D_1 \cup D_2$

### 3. Адаптация метода к решению задач геоэлектрики



# 3. Адаптация метода к решению задач геоэлектрики



а) Общий вид двумерных областей

-  Верхняя (II) и нижняя (III) полуплоскости
-  Двумерная область (I)
-  Левая (IV) и правая (V) полуполосы

б) Правая (R) и левая (L) полуполосы и общий вид двумерной неоднородности.

### 3. Адаптация метода к решению задач геоэлектрики

Для реализации ДАМ нужно уметь решать два класса задач.

1. **ВНЕШНИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ** - задачи в неограниченных областях II-V для относительно простых моделей (чаще – одномерных горизонтально- слоистых (кусочно-постоянных) сред) .
2. **ВНУТРЕННИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ** - задачи в ограниченной области I, в которой распределение свойств среды может быть достаточно произвольным.



# 3. Адаптация метода к решению задач геоэлектрики

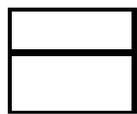
## 1. ВНЕШНИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ.

ПРИМЕНЯЯ ОДНОМЕРНОЕ ИЛИ ДВУМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ, ОТНОСИТЕЛЬНО СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ  $\widehat{u}_m$  В М-ТОМ СЛОЕ ОБЫЧНО ПРИХОДИМ К НЕОБХОДИМОСТИ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ВИДА :

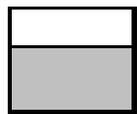
$$\begin{cases} \frac{d^2 \widehat{u}_m}{dz^2} = \eta_m^2 \widehat{u}_m + \psi_m(z), & \eta_m^2 = k_m^2 + \alpha^2 (+\beta^2), \\ [\widehat{u}_m] = 0, [\gamma^{-1} \widehat{u}'_m] = 0, & \widehat{u}_j|_{z=z_{j-1}} = A_j, \widehat{u}_n|_{z=z_n} = A_n. \end{cases}$$

С ЧИСЛЕННО ЗАДАНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ  $\psi_m(z)$  И ГРАНИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ  $A_j, A_n$

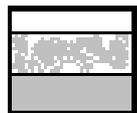
ДАЛЕЕ ПРИВЕДЕМ ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ Е- И Н-ПОЛЯРИЗАЦИЙ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ И ОБЛАСТИ ОРИГИНАЛОВ ДЛЯ СЛЕДУЮЩИХ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕДЫ:



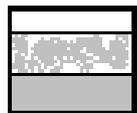
1) ИЗОЛЯТОР НЕОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ



2) ПРОВОДНИК НЕОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ



3) ИЗОЛЯТОР ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ Н, ПОДСТИЛАЕМЫЙ ИДЕАЛЬНЫМ ПРОВОДНИКОМ



4) ПРОВОДНИК ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ Н, ПОДСТИЛАЕМЫЙ ИДЕАЛЬНЫМ ПРОВОДНИКОМ

# 3. Адаптация метода к решению задач геоэлектрики

## Е-ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Номер модели	Изображение $e_0(\alpha, \beta, z)$	Оригинал $E_0(y, z)$	Область
1	$e^{- \alpha z}$	$\frac{z}{\pi} \frac{1}{y^2 + z^2}$	$z > 0$ $y \in R$
2	$e^{-\sqrt{\alpha^2 + k^2}z}$	$G(k, y, z)$	$z > 0$ $y \in R$
3	$\frac{sh[\alpha(H-z)]}{sh\alpha H}$	$\frac{1}{2H} \frac{\sin(\pi z/H)}{ch(\pi y/H) - \cos(\pi z/H)}$	$0 \leq z \leq H$ $y \in R$
4	$\frac{sh[\eta(H-z)]}{sh\eta H}$	$\sum_{m=0}^{\infty} G(k, y, (2mH-z)) - G(k, y, (2(m+1)H-z))$	$0 \leq z \leq H$ $y \in R$

## Н-ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Номер модели	Изображение $e_0(\alpha, \beta, z)$	Оригинал $H_0(y, z)$	Область
1	$e^{- \alpha z}$	$\frac{z}{\pi} \frac{1}{y^2 + z^2}$	$z > 0$ $y \in R$
2	$e^{-\sqrt{\alpha^2 + k^2}z}$	$G(k, y, z)$	$z > 0$ $y \in R$
3	$\frac{ch[\alpha(H-z)]}{ch\alpha H}$	$\frac{1}{H} \frac{\sin(\pi z/H) ch(\pi y/2H)}{ch(\pi y/H) - \cos(\pi z/H)}$	$0 \leq z \leq H$ $y \in R$
4	$\frac{ch[\eta(H-z)]}{ch\eta H}$	$\sum_{m=0}^{\infty} G(k, y, (2mH+z)) - G(k, y, (2(m+1)H-z))$	$0 \leq z \leq H$ $y \in R$

$$G(k, y, z) := \frac{kz}{\pi} \frac{K_1\left(k\sqrt{y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

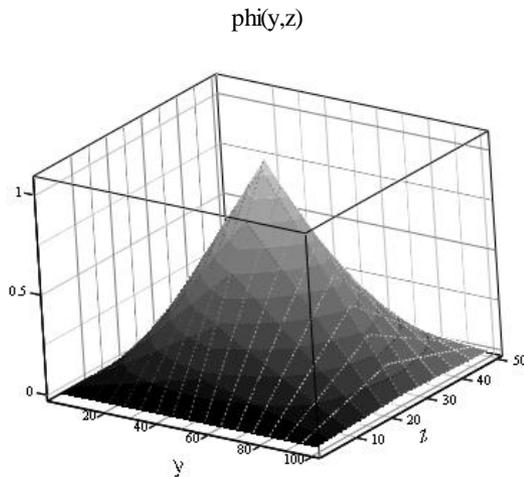
# 3. Адаптация метода к решению задач геоэлектрики

## 2. ВНУТРЕННИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ : FDM-2D

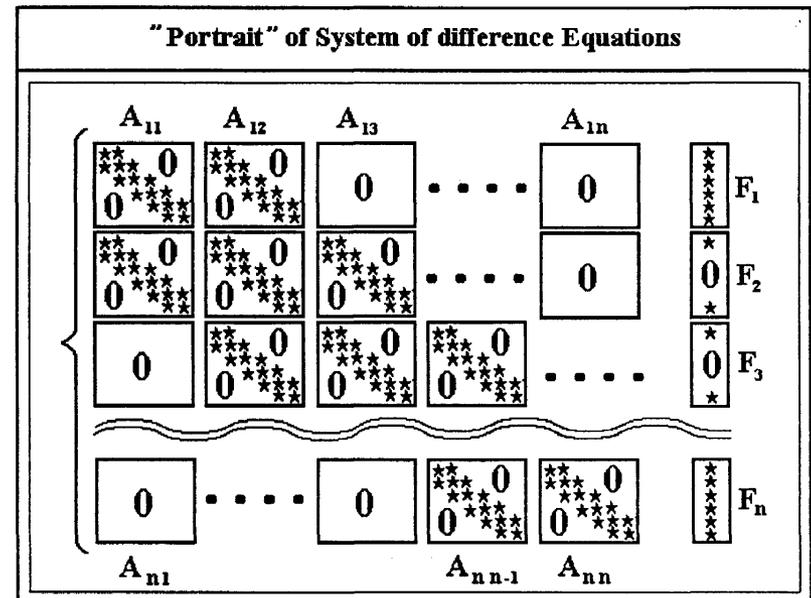
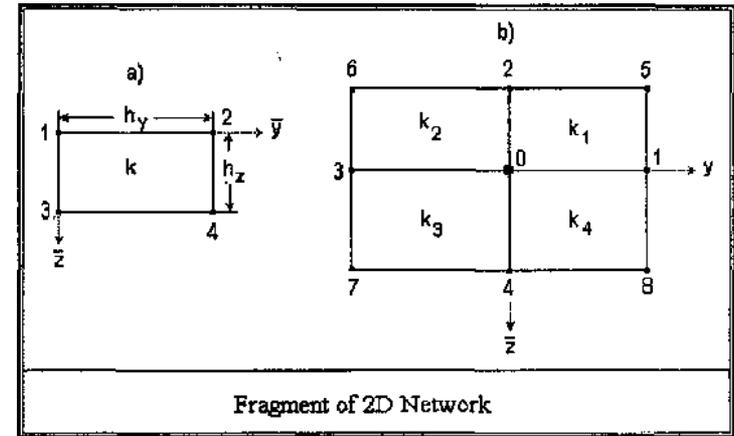
$$F(u) = \int_D \left\{ \frac{1}{\eta} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + k^2 u^2 \right] + 2uf \right\} ds,$$

$$p_1(y) = 1 - \bar{y} / h_y, \quad p_2(\bar{y}) = \bar{y} / h_y, \quad \bar{y} = y - y_j$$

$$q_1(z) = \frac{\text{sh}[k(h_z - \bar{z})]}{\text{sh}(kh_z)}, \quad q_2(\bar{z}) = \frac{\text{sh}(k\bar{z})}{\text{sh}(kh_z)}$$



φ МКЭ. БАЗИСНАЯ ФУНКЦИЯ



# 3. Адаптация метода к решению задач геоэлектрики

## 2. ВНУТРЕННИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ : FDM-3D

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \langle \eta^{-1} \text{rot} \mathbf{V}, \text{rot} \mathbf{U} \rangle + \langle k^2 \eta^{-1} \mathbf{V}, \mathbf{U} \rangle - \langle \mathbf{V}, \tilde{\mathbf{f}} \rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{U} \rangle \\ \mathbf{U}|_{\partial\Omega} = \varphi(P), P \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\tau_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_2)P_1^{(3)}(\bar{x}_3),$$

$$\tau_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_2^{(2)}(\bar{x}_2)P_1^{(3)}(\bar{x}_3),$$

$$\tau_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = P_2^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_2)P_1^{(3)}(\bar{x}_3),$$

$$\tau_4(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = P_2^{(1)}(\bar{x}_1)P_2^{(2)}(\bar{x}_2)P_1^{(3)}(\bar{x}_3),$$

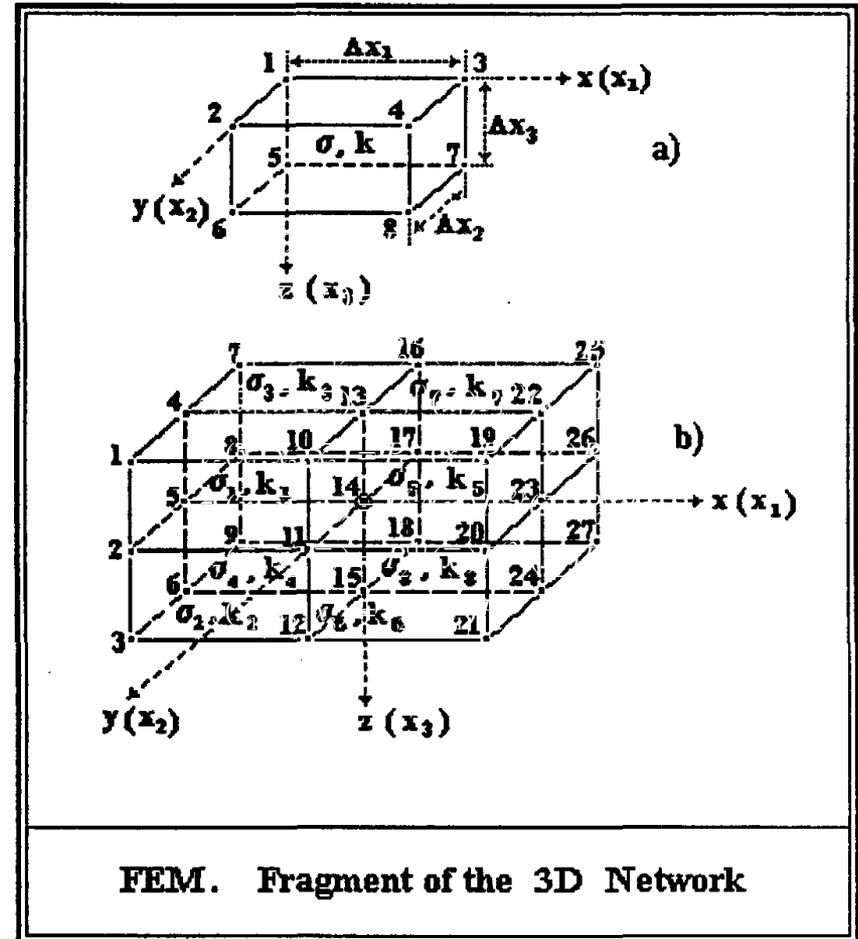
$$\tau_5(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_2)P_2^{(3)}(\bar{x}_3),$$

$$\tau_6(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = P_1^{(1)}(\bar{x}_1)P_2^{(2)}(\bar{x}_2)P_2^{(3)}(\bar{x}_3),$$

$$\tau_7(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = P_2^{(1)}(\bar{x}_1)P_1^{(2)}(\bar{x}_2)P_2^{(3)}(\bar{x}_3),$$

$$\tau_8(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = P_2^{(1)}(\bar{x}_1)P_2^{(2)}(\bar{x}_2)P_2^{(3)}(\bar{x}_3).$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{27} (U_i C_i^{(1)} + V_i D_i^{(1)} + W_i G_i^{(1)}) - R_i^{(1)} F_i^{(1)} = 0, \\ \sum_{i=1}^{27} (U_i C_i^{(2)} + W_i D_i^{(2)} + U_i G_i^{(2)}) - R_i^{(2)} F_i^{(2)} = 0, \\ \sum_{i=1}^{27} (W_i C_i^{(3)} + U_i D_i^{(3)} + V_i G_i^{(3)}) - R_i^{(3)} F_i^{(3)} = 0. \end{cases}$$



### 3. Адаптация метода к решению задач геоэлектрики

$$\vec{E}_x^a = \frac{-z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{E}^a(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{\left[ \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} \right]^3}, \quad z < 0$$

1D-REGION

3D-REGION

$$\vec{E}_t = C_1 y^{-1} + C_2 y^{-2} + C_3 y^{-3}$$

$$\vec{E}^a(x, y, z) = \frac{z-H}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{E}^a(\xi, \eta, H)(1+k\mathbb{R})e^{-k\mathbb{R}} d\xi d\eta}{R^3},$$

$$z > H, \mathbb{R}^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-H)^2$$

**FFT**

$$\vec{E}(x, y, z) = F_2^{-2} \left\{ F_2 \left[ \vec{E}(x, y, 0) \cdot \varphi(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + k^2}, 0, z) \right] \right\}$$

## 4. Обсуждение сходимости АМШ

### А). СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧИ МТЗ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

ПРОИЛЛЮСТРИРУЕМ СУЩНОСТЬ АЛГОРИТМА И ОЦЕНИМ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО МЕТОДА ШВАРЦА НА ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧАХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ, ИМЕЮЩИХ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ.

ПУСТЬ ТРЕБУЕТСЯ ПО АЛГОРИТМУ ШВАРЦА РЕШИТЬ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ НА ПОЛУПРЯМОЙ  $z > 0$  ПРИ ПОСТОЯННОМ ЗНАЧЕНИИ ВОЛНОВОГО ЧИСЛА  $k$ :

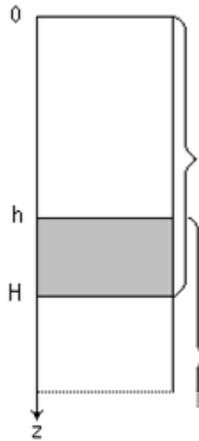
$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dz^2} = k^2 U, \quad k = const, \\ U|_{z=0} = u_0; \quad U \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (6)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (6) ОЧЕВИДНО

$$U(z) = u_0 e^{-kz} \quad (7)$$

ПОСТРОИМ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (6) ПОСРЕДСТВОМ АМШ .

# 4а. Обсуждение сходимости АМШ



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1.9.6) БУДЕМ ИСКАТЬ ПОСРЕДСТВОМ ПООЧЕРЕДНОГО РЕШЕНИЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ ПОДЗАДАЧ ПРИ  $m = 1, 2, \dots$

(1) ПОДЗАДАЧА 1 В ОБЛАСТИ  $0 < z < H$

ПОДЗАДАЧА 2 В ОБЛАСТИ  $h < z < +\infty$

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2 u^{(2m)}}{dz^2} = k^2 u^{(2m)}, z \in (h, \infty), h < H; \\ u^{(2m)}|_{z=h} = u^{(2m-1)}(h); u^{(2m-1)} \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^{(2m-1)}}{dz^2} = k^2 u^{(2m-1)}, z \in (0, H); \\ u^{(2m-1)}|_{z=0} = u_0, u^{(2m-1)}|_{z=H} = \begin{cases} u^{(0)} = a; \\ u^{(2m-2)}(H). \end{cases} \end{cases}$$

ПЕРВЫЙ ЭТАП ВЫЧИСЛЕНИЙ НАПРАВЛЕН НА ПОСТРОЕНИЕ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ НА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ ПОДЗАДАЧИ 1 В ТОЧКЕ  $z = H$ . ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ  $\{u^{(k)}\}$  НАЧИНАЕТСЯ С ПОДЗАДАЧИ 1 С ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ  $u^{(0)}(H) = a$

$$u^{(2m)}(H) = u_0 p_1 \sum_{l=0}^{m-1} p_2^l + a p_2^m = u_0 p_1 \frac{1 - p_2^m}{1 - p_2} + a p_2^m$$

$$p_1 := \frac{\text{sh}[k(H-h)]}{\text{sh}kH} \exp[-k(H-h)],$$

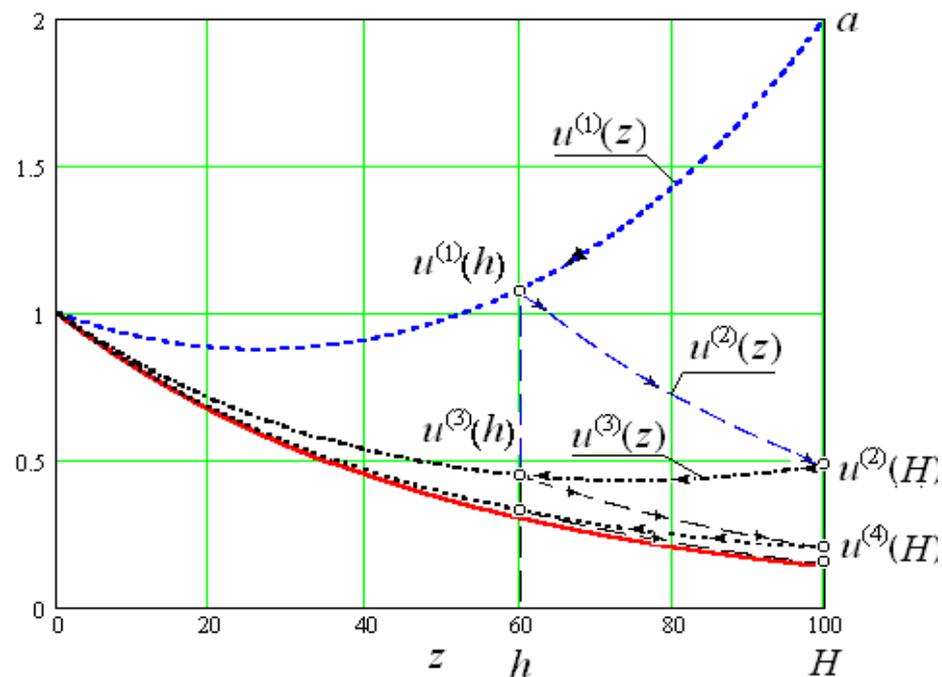
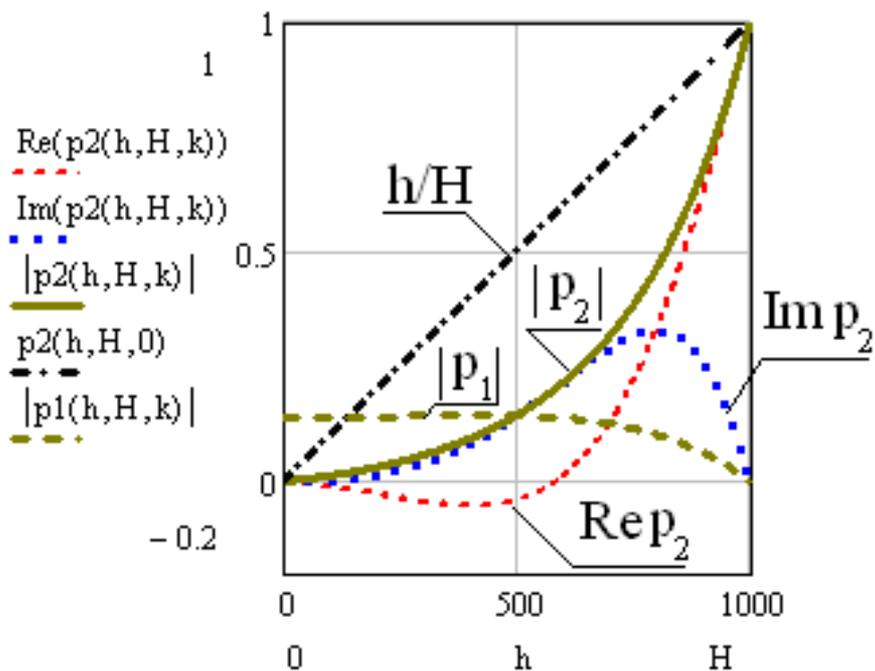
$$p_2 := \frac{\text{sh}kh}{\text{sh}kH} \exp[-k(H-h)].$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u^{(2m)}(H) = u_0 \frac{p_1}{1 - p_2} = u_0 e^{-kH} \Rightarrow u(z) = u_0 e^{-kz}$$

ПОЛНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ОЧЕРЕДНОЙ  $m$ -ТОЙ ИТЕРАЦИИ РАВНА

$$\varepsilon_m := \left( -u_0 \frac{p_1}{1 - p_2} + a \right) p_2^m = (-u_0 e^{-kH} + a) p_2^m = O(p_2^m)$$

# 4а. Обсуждение сходимости АМШ



# 4а. Обсуждение сходимости АМШ

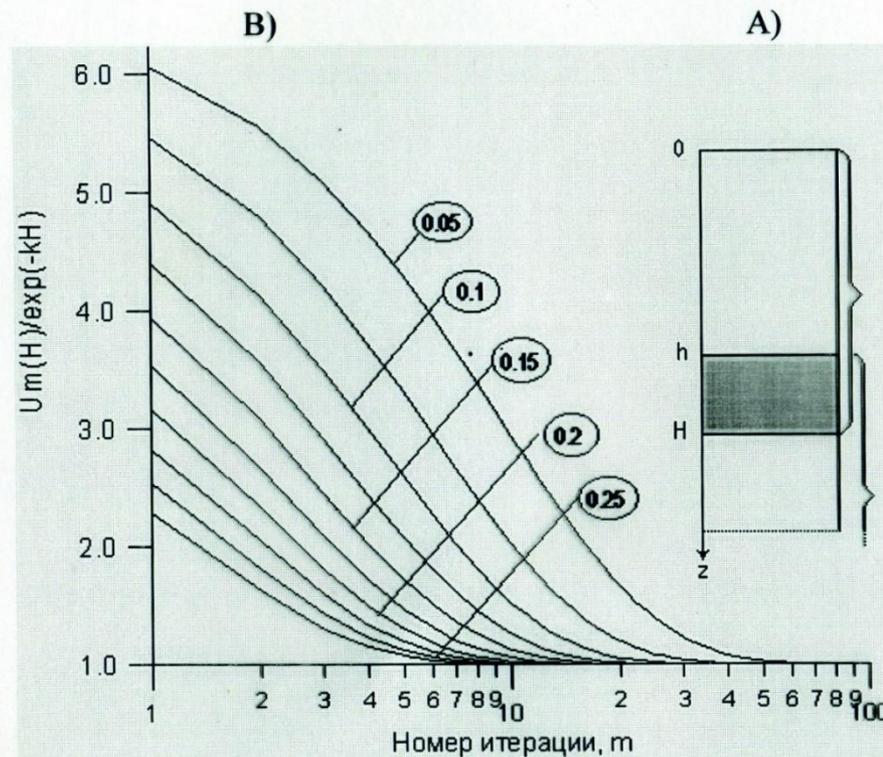


Figure 1. Illustration of the convergence for Schwarz method for difference cases of domains overlapping ( $U^{(0)}(H) = 1.0, k = 0.1, H = 20, a = 1$ , curves parameters  $(H-h)/H$ )

Полная погрешность решения задачи на очередной  $m$ -той итерации равна

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u^{(2m)}(H) = u_0 \frac{p_1}{1 - p_2} = u_0 e^{-kH} \Rightarrow u(z) = u_0 e^{-kz}$$

# 46. Обсуждение сходимости АМШ

## Б. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА МТЗ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

### ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА-КАРСОНА:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u^0, & z=0, \\ 0, & z>0; \end{cases} \\ u|_{z=0} = u^0; \quad u \rightarrow 0, z \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (6)$$

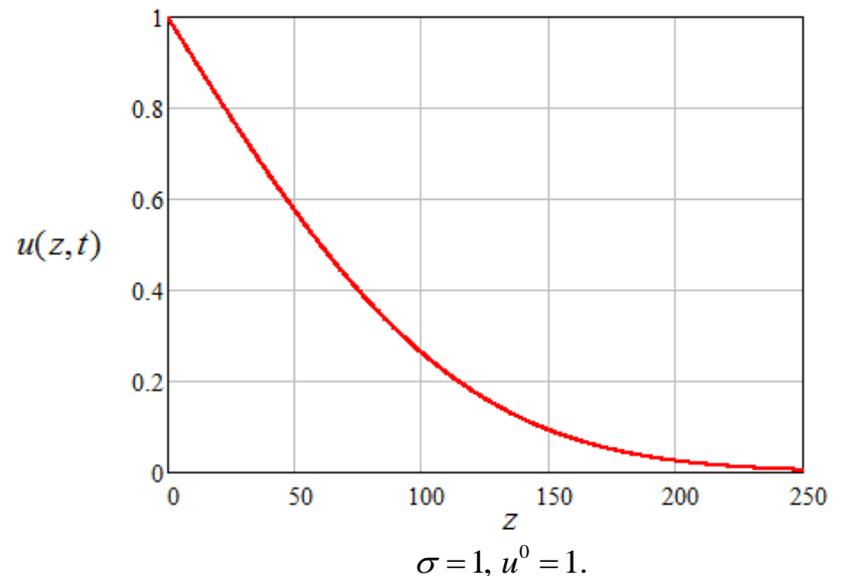
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}(z,p) = p \int_0^{\infty} u(z,t) e^{-pt} dt, \\ \frac{d^2 \hat{u}(z,p)}{dz^2} = p\mu\sigma \hat{u}(z,p), \\ \hat{u}|_{z=0} = u^0, \quad \hat{u} \rightarrow 0, z \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (6^*)$$

РЕШЕНИЕ В ОБЛАСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ:

$$\hat{u}(z,p) = u^0 e^{-\sqrt{p\mu\sigma} z}.$$

В ОБЛАСТИ ОРИГИНАЛОВ:

$$u(z,t) = u^0 \operatorname{erfc} \left( \frac{z \cdot \sqrt{\mu\sigma}}{2\sqrt{t}} \right).$$



# 46. Обсуждение сходимости АМШ

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ ПО МЕТОДУ ШВАРЦА

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

РАЗОБЬЕМ ИНТЕРВАЛ  $[0, \infty)$  НА ОБЛАСТИ  $D_1$  И  $D_2$  С НЕПУСТЫМ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ.

Diagram illustrating the decomposition of the interval  $[0, \infty)$  into regions  $D_1$  and  $D_2$  with non-empty intersection. The vertical axis is labeled  $z$  and points downwards. The regions are defined by boundaries at  $z=0$ ,  $z=h$ , and  $z=H$ .

- Region  $D_1$  (yellow) is  $0 \leq z < h$  with coefficient  $\sigma_1 \mu$ .
- Region  $D_1 \cap D_2$  (orange) is  $h \leq z < H$  with coefficient  $\sigma_1 \mu$  and  $\sigma_2 \mu$ .
- Region  $D_2$  (brown) is  $z \geq H$  with coefficient  $\sigma_2 \mu$ .

The governing equations and boundary conditions are:

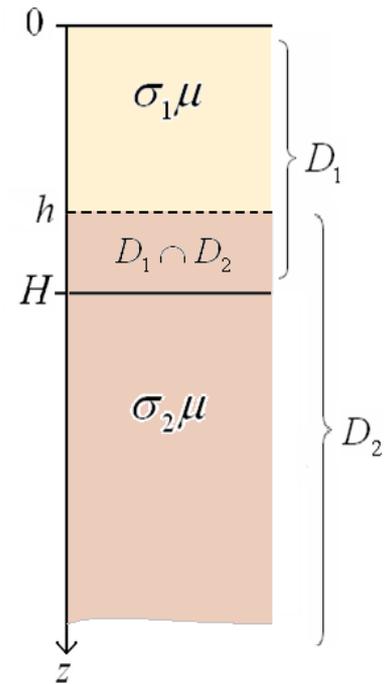
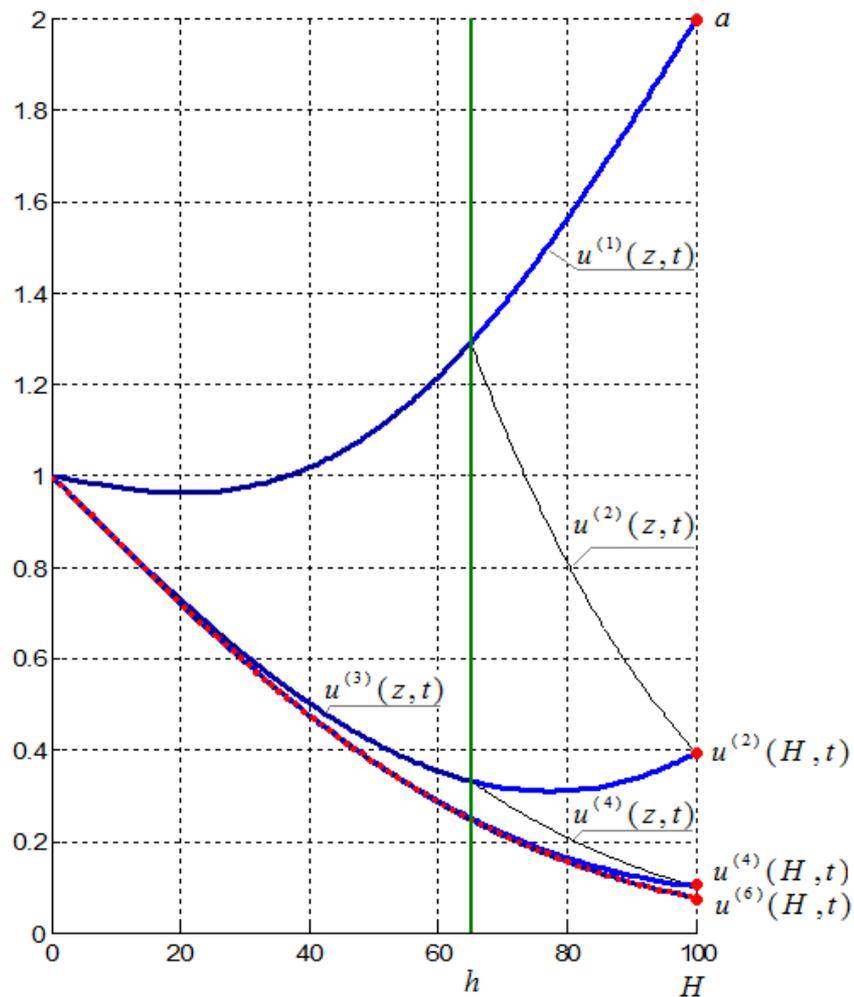
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sigma(z)} \frac{\partial u_1(z, t)}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial u_1(z, t)}{\partial t}, & (9.1) \\ u_1|_{t=0} = \begin{cases} u^0, & z = 0, \\ 0, & z > 0; \end{cases} \\ u_1|_{z=0} = u^0, \quad u_1|_{z=H} = u^H(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2(z, t)}{\partial z^2} = \mu \sigma_2 \frac{\partial u_2(z, t)}{\partial t}, & (9.2) \\ u_2|_{t=0} = 0, \\ u_2|_{z=h} = u^h(t), \quad u_2|_{z \rightarrow \infty} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sigma(z)} \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u^0, & z = 0, \\ 0, & z > 0; \end{cases} \\ u|_{z=0} = u^0, \quad u \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (9)$$

# 46. Обсуждение сходимости АМШ

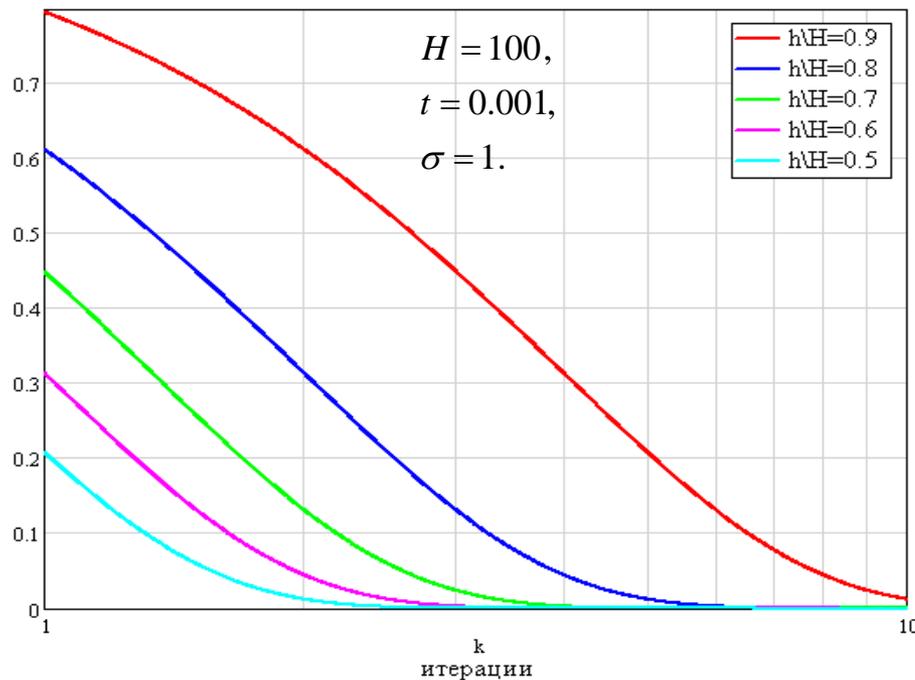
ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ



# 46. Обсуждение сходимости АМШ

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

$$\varepsilon_m \leq u^0 \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{\mu\sigma} [m(H-h) + H]}{2\sqrt{t}} \right) + a \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{\mu\sigma} (H-h)m}{2\sqrt{t}} \right)$$



$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{\varepsilon_m}{u(h,t)} 100$$

$h/H$	$\bar{\varepsilon}_m, \%$	Кол-во итераций
0.5	1	2
0.9	1	12

Погрешность решения не превосходит 1% после 2 итераций при  $h/H=0.5$ . При  $h/H=0.9$  для достижения той же точности потребуется уже 12 итераций.

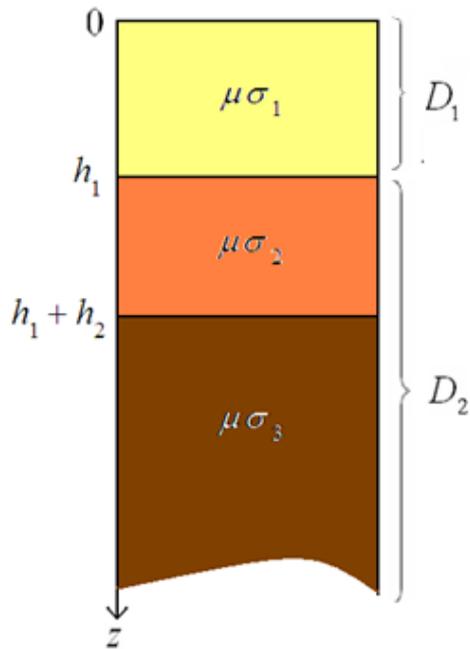
# 4в. Обсуждение сходимости АМШ

В. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ МТЗ В ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ШВАРЦА «В МАЛОМ»

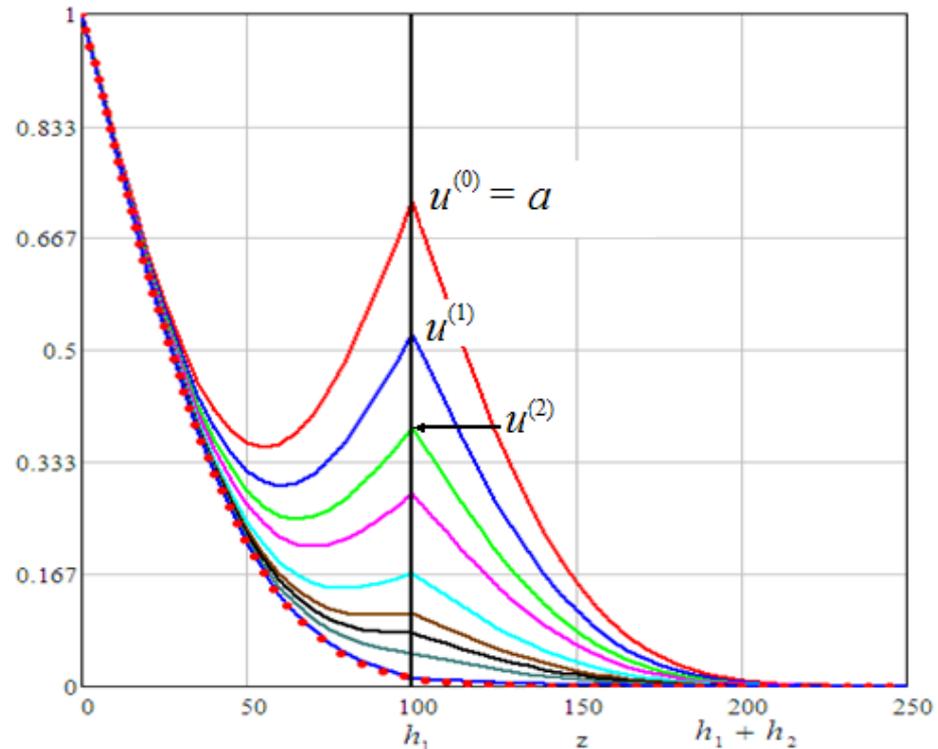
«СШИВАНИЕ» РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ  $D_1$  И  $D_2$  НА ГРАНИЦЕ  $z=h_1$  МЕТОДОМ ШВАРЦА «В МАЛОМ»:

$$u^{(k+1)}(h_1, t) = \frac{u_1^{(k)}(h_1 - d, t) + u_2^{(k)}(h_1 + d, t)}{2}, d < (h_1, h_2), k = 0, 1, \dots$$

ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРИНИМАЕТСЯ РАВНЫМ ПОЛОВИНЕ СУММЫ ВЕЛИЧИН ПОЛЯ В БЛИЖАЙШИХ К ГРАНИЦЕ ТОЧКАХ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПО РАЗНЫЕ СТОРОНЫ ОТ НЕЕ НА РАССТОЯНИИ  $d$ .



МОДЕЛЬ СРЕДЫ



# 4г. Обсуждение сходимости АМШ

## Г. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ШВАРЦА. (СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА МТЗ)

ПОДОБНО КЛАССИЧЕСКОМУ АЛГОРИТМУ (РИС.(А)), МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ШВАРЦА [Юдин М.Н., Юдин В.М., 2002; Юдин, СПАССКИЙ, 2016 ] (РИС.(В)) ДАЕТ ВОЗМОЖНОСТЬ НАЙТИ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА *БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ* (ПОЛУПРЯМОЙ  $\Omega$ ). АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЙ СОСТОИТ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ:

1. НА ИНТЕРВАЛЕ  $(0, z_1)$  (В ОБЛАСТИ  $D$ ) КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ РЕШАЕТСЯ ЧИСЛЕННО,
2. НА ИНТЕРВАЛЕ  $(0, \infty)$  (В ОБЛАСТИ  $\Omega$ ) ЗАДАЧА РЕШАЕТСЯ АНАЛИТИЧЕСКИ.

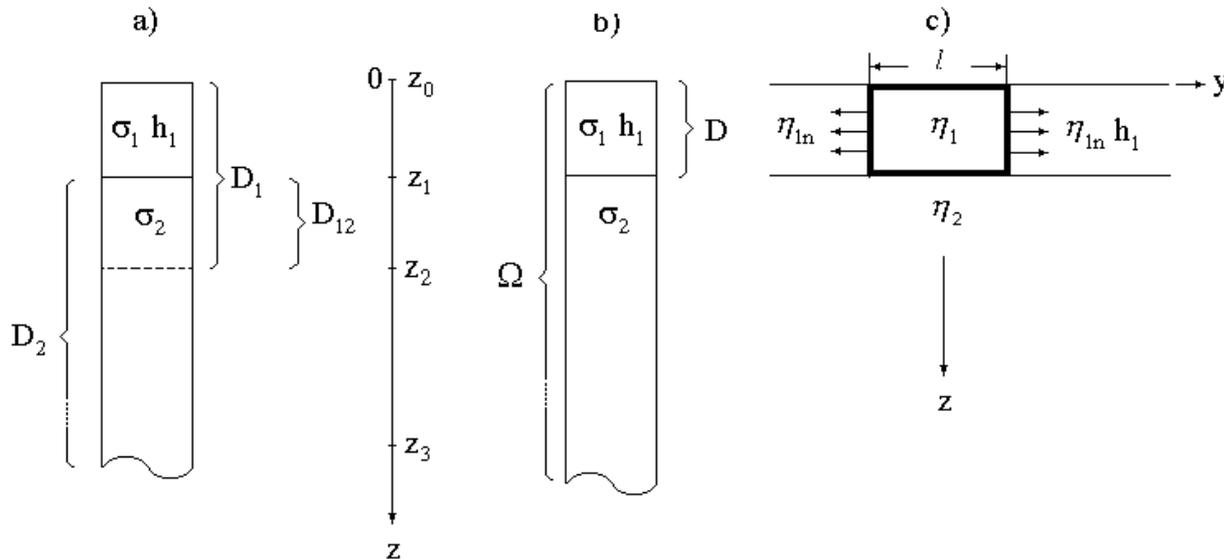
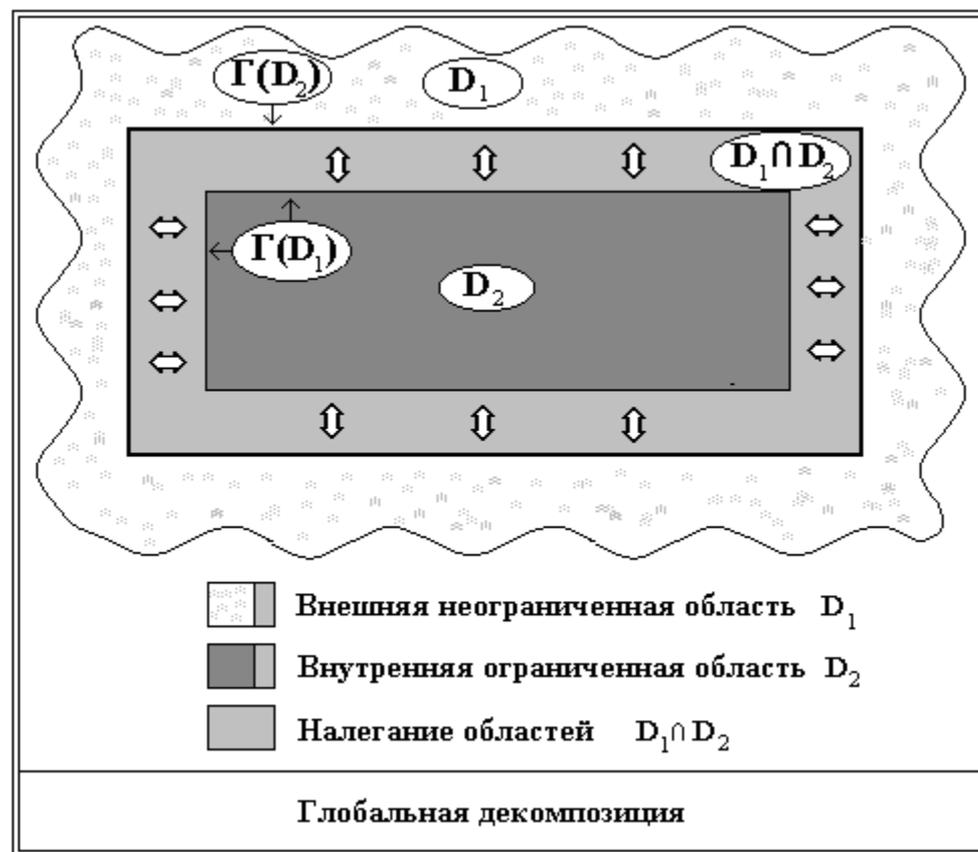


РИС. А) ВЫБОР 1D ОБЛАСТЕЙ В КЛАССИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ ШВАРЦА.  
В) ВЫБОР 1D ОБЛАСТЕЙ В МОДИФИЦИРОВАННОМ АЛГОРИТМЕ ШВАРЦА.  
С) ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ (ВСТАВКА В ДВУХСЛОЙНОЙ ВМЕЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ).

# 5. Декомпозиция задач и их классификация

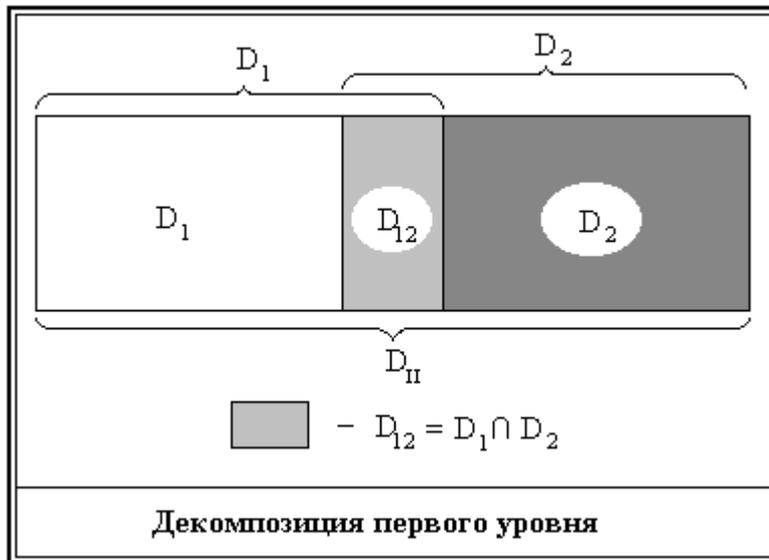
Глобальная декомпозиция. Декомпозиционный альтернирующий метод, приводящий к необходимости последовательного автономного решения внутренней и внешней краевых задач, будем называть глобальным ДАМ или ДАМ нулевого уровня (ГДАМ или ДАМ-0)



## 5. Декомпозиция задач и их классификация

*ВТОРИЧНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ.* ДАМ, использующий вторичную декомпозицию в ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, НАЗОВЕМ *ЛОКАЛЬНЫМ* ДАМ (ЛДАМ).

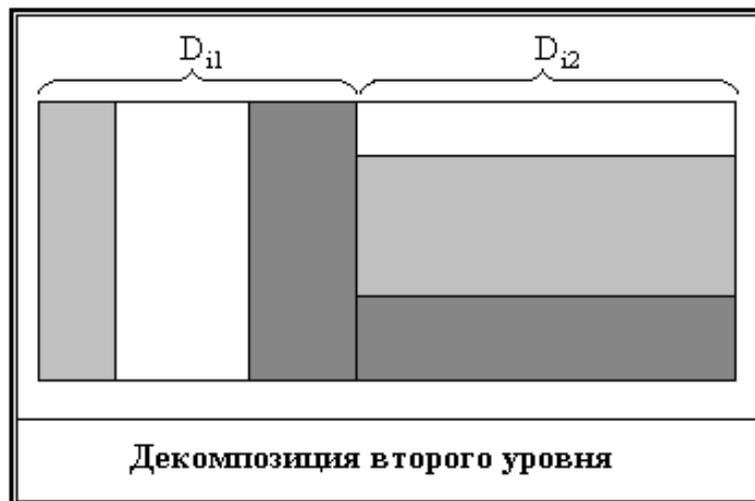
ЧЕМ БОЛЬШЕ НОМЕР УРОВНЯ, ТЕМ БЛИЖЕ ВТОРИЧНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ К ОБЫЧНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ, ИСПОЛЪЗУЕМОЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ.



*ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВНУТРЕННЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, НЕ ИНДУЦИРОВАННАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ И ОРИЕНТИРОВАННАЯ НА ПОВЫШЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЮ ВЫЧИСЛЕНИЙ, БУДЕМ НАЗЫВАТЬ ДЕКОМПОЗИЦИОННЫМ АЛЬТЕРНИРУЮЩИМ МЕТОДОМ ПЕРВОГО УРОВНЯ (ДАМ-1).*

## 5. Декомпозиция задач и их классификация

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВТОРОГО УРОВНЯ. Начиная со второго уровня ДЕКОМПОЗИЦИЯ НАПРАВЛЕНА НА ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ В АВТОНОМНЫХ БЛОКАХ, КОТОРЫМИ ОПЕРИРУЕТ ДАМ-1. ПРЕДПОЛОЖИМ, СТРУКТУРА БЛОКА ОКАЗАЛАСЬ ТАКОЙ, ЧТО ЕГО МОЖНО РАЗБИТЬ НА РЯД (НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО НАЛЕГАЮЩИХ) ЧАСТЕЙ, В КОТОРЫХ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МОЖНО ВЫПОЛНИТЬ ЭФФЕКТИВНЫМИ (В ИДЕАЛЬНОМ СЛУЧАЕ - АНАЛИТИЧЕСКИМИ) МЕТОДАМИ. НАПРИМЕР, ЕСЛИ БЛОК СОДЕРЖИТ НЕКОТОРОЕ КОЛИЧЕСТВО ГОРИЗОНТАЛЬНО-ОДНОРОДНЫХ (ВЕРТИКАЛЬНО-ОДНОРОДНЫХ) ФРАГМЕНТОВ, ТО В ПРЕДЕЛАХ КАЖДОГО ТАКОГО ФРАГМЕНТА ПЕРВУЮ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ МОЖНО РЕШИТЬ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, ИСПОЛЬЗУЯ КОНЕЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПО ТЕМ КООРДИНАТАМ, В НАПРАВЛЕНИИ КОТОРЫХ СВОЙСТВА СРЕДЫ ПОСТОЯННЫ.



*НЕ СВЯЗАННУЮ С ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ ДЕКОМПОЗИЦИЮ, ИНДУЦИРОВАННУЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В МОДЕЛИ ГЕОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА И ПРЕДНАЗНАЧЕННУЮ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В ПРЕДЕЛАХ ОДНОГО АВТОНОМНОГО БЛОКА ПЕРВОГО УРОВНЯ, НАЗОВЕМ ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ ВТОРОГО УРОВНЯ (ДАМ-2).*

## 5. Декомпозиция задач и их классификация

### ЗАМЕЧАНИЯ ПО РЕАЛИЗАЦИИ ДЕКОМПОЗИЦИИ ВТОРОГО УРОВНЯ.

«СШИВАНИЕ» РЕШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ВО ФРАГМЕНТАХ С ОБЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ БЕЗ НАЛЕГАНИЯ.

1. МЕТОД ШВАРЦА "В МАЛОМ" [ЗАВАДСКИЙ, 1972]. ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРИНИМАЕТСЯ РАВНЫМ ПОЛОВИНЕ СУММЫ ВЕЛИЧИН ПОЛЯ В БЛИЖАЙШИХ К ГРАНИЦЕ ТОЧКАХ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПО РАЗНЫЕ СТОРОНЫ ОТ НЕЕ НА РАССТОЯНИИ  $h$ .

ПРОИЛЛЮСТРИРУЕМ ПРОСТЫМ ПРИМЕРОМ. В СЛУЧАЕ Е-ПОЛЯРИЗАЦИИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ОДНОРОДНОЙ ЗЕМЛИ С ВОЛНОВЫМ ЧИСЛОМ  $k$  И НЕПРОВОДЯЩЕГО ВОЗДУХА РЕШЕНИЯ ОПИСЫВАЮТСЯ РЕШЕНИЯМИ  $1 + k |z|$  (В ВОЗДУХЕ) И  $\exp(-kz)$  (В ЗЕМЛЕ). НАЙДЕМ ПОЛУСУММЫ ЗНАЧЕНИЙ ЭКСПОНЕНТЫ И ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ, ВЗЯТЫХ НА ОДИНАКОВОМ (ДОСТАТОЧНО МАЛОМ) РАССТОЯНИИ ОТ ГРАНИЦЫ ЗЕМЛЯ-ВОЗДУХ. ПУСТЬ  $|kh| < 1$ , ТОГДА

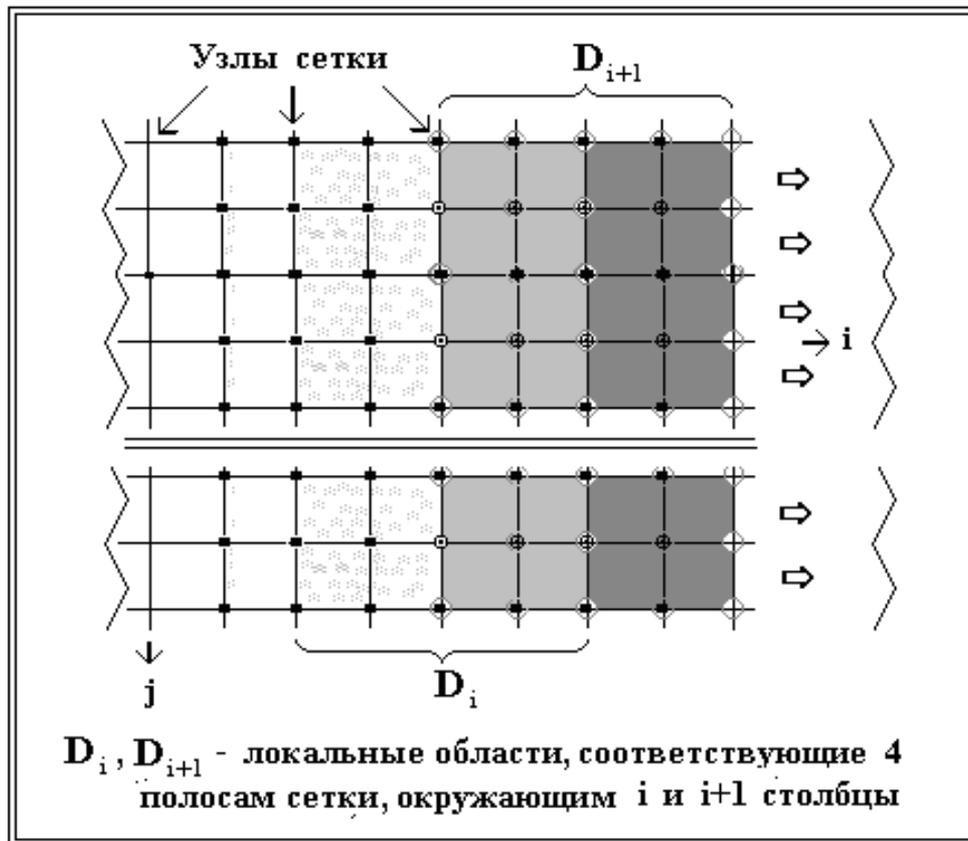
$$\left[ (1 + kh) + e^{-kh} \right] / 2 = 1 + k^2 h^2 / 4 + \dots = 1 + O(h^2).$$

2. ИСПОЛЬЗОВАТЬ ИМЕЮЩИЕСЯ ПРОГРАММЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛЕЙ *РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ*. С ИХ ПОМОЩЬЮ РАСЧЕТЫ ЦЕЛЕСООБРАЗНО ВЫПОЛНЯТЬ ТОЛЬКО В УЗКИХ ПОЛОСАХ, ПОКРЫВАЮЩИХ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФРАГМЕНТОВ.

*КУСОЧНО-ЛОКАЛЬНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ*. В РАМКАХ ДАМ-2 В НЕКОТОРЫХ (ИЛИ ВО ВСЕХ) ФРАГМЕНТАХ МОЖНО РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННО (НАПРИМЕР, РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ), ИСПОЛЬЗУЯ *АВТОНОМНУЮ ДИСКРЕТИЗАЦИЮ* В КАЖДОЙ ЧАСТИЧНОЙ ОБЛАСТИ. ТАКАЯ ПОТРЕБНОСТЬ НЕ РЕДКО ВОЗНИКАЕТ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ГЕОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ РАЗРЕЗАМ С БОЛЬШОЙ КОНТРАСТНОСТЬЮ СОПРОТИВЛЕНИЙ (ЗОНЫ ПЕРЕХОДА ОТ МАТЕРИКА К ОКЕАНУ, ОСТРОВА В ОКЕАНЕ И Т.П.).

## 5. Декомпозиция задач и их классификация

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ ПО НАЗНАЧЕНИЮ СОВПАДАЕТ С ДАМ-2, НО, В ОТЛИЧИЕ ОТ ДАМ-2, ТЕСНО СВЯЗАНА С ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ.

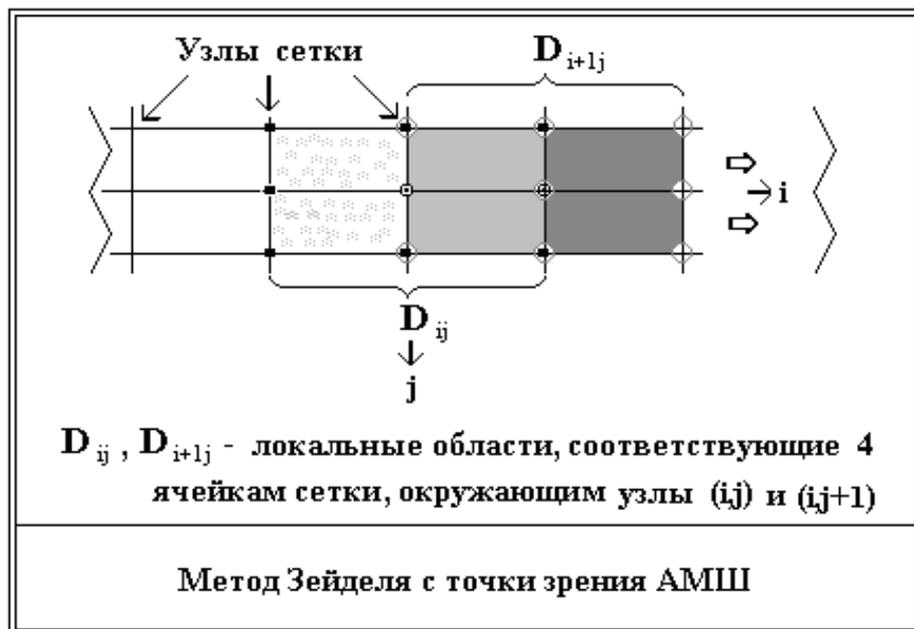


*СОГЛАСОВАННУЮ С ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ ДЕКОМПОЗИЦИЮ, ОРИЕНТИРОВАННУЮ НА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТОЧНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В РЕГУЛЯРНЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ, ГРАНИЦЫ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ СО СЛОЯМИ СЕТКИ, НАЗОВЕМ ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ (ДАМ-3).*

В ДАМ-3 ВКЛЮЧАЮТСЯ БОЛЬШИНСТВО ИЗВЕСТНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ И СХЕМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СЕТКАХ И СЛАУ, ВКЛЮЧАЯ МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ, МЕТОД ХОП-СКОЧ, МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ И Т.П.

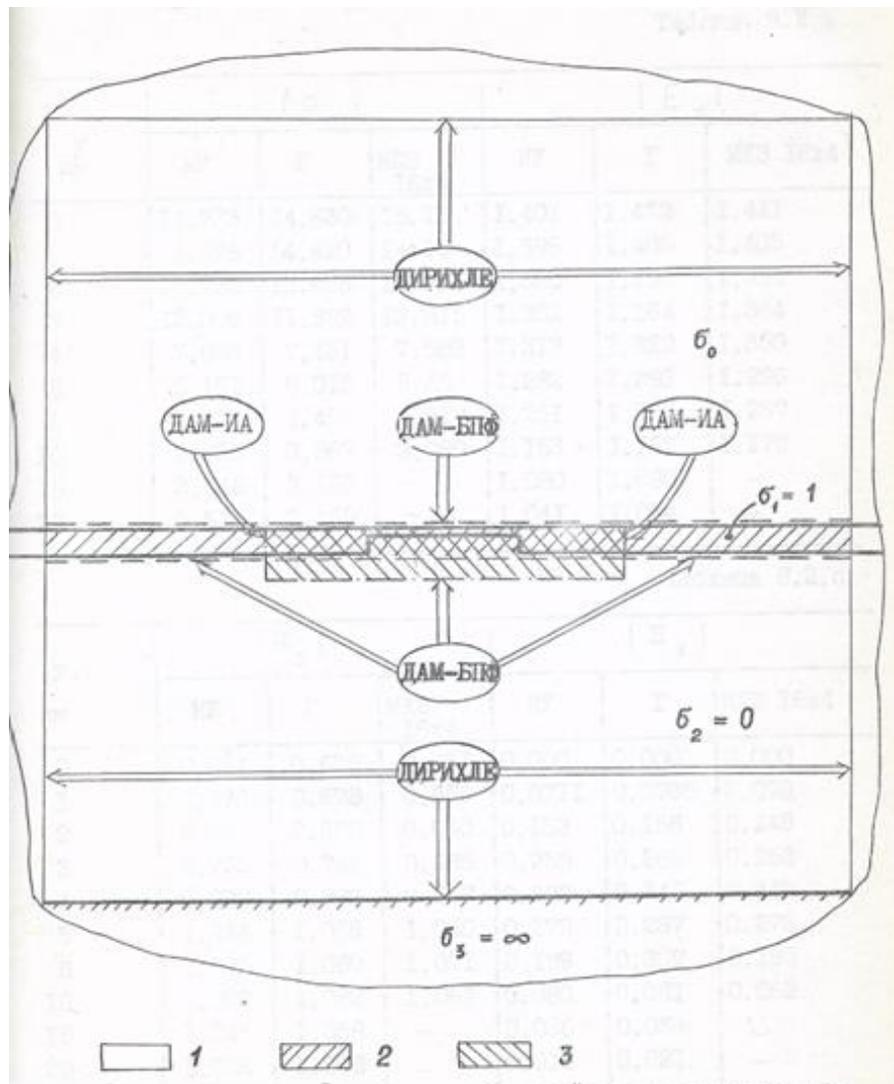
## 5. Декомпозиция задач и их классификация

ВЫРОЖДЕННЫМ случаем ДАМ-3 является *МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ*, КОГДА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОБЛАСТИ ПРЕДСТАВЛЯЮТ СОБОЙ ОБЪЕДИНЕНИЕ ЧЕТЫРЕХ ЯЧЕЕК (КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ), ОКРУЖАЮЩИХ КАЖДЫЙ ВНУТРЕННИЙ УЗЕЛ СЕТКИ. ВЫЧИСЛЯЯ В ЭТОМ УЗЛЕ ОЧЕРЕДНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОЛЯ, ПРЕДПОЛАГАЕТСЯ, ЧТО ЗНАЧЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ОБЛАСТИ ИЗВЕСТНЫ .



ШИРОКИЙ СПЕКТР ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМ МОЖНО ПОЛУЧИТЬ, ЕСЛИ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ (ЭЛО) ВЫБИРАТЬ ДОСТАТОЧНО БОЛЬШИХ РАЗМЕРОВ И НАХОДИТЬ В НИХ АВТОНОМНЫЕ РЕШЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ В КАЧЕСТВЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ИЗВЕСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ПОЛЕЙ, НАЙДЕННЫЕ В СОСЕДНИХ ЭЛО. СООТВЕТСТВУЮЩУЮ СИСТЕМУ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, БЛАГОДАРЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕБОЛЬШОМУ КОЛИЧЕСТВУ УЗЛОВ, МОЖНО БУДЕТ РЕШАТЬ ПРЯМЫМИ МЕТОДАМИ.

## 6. Иллюстрация соотношения размеров сеточной области при различных алгоритмах ее выбора (2D)



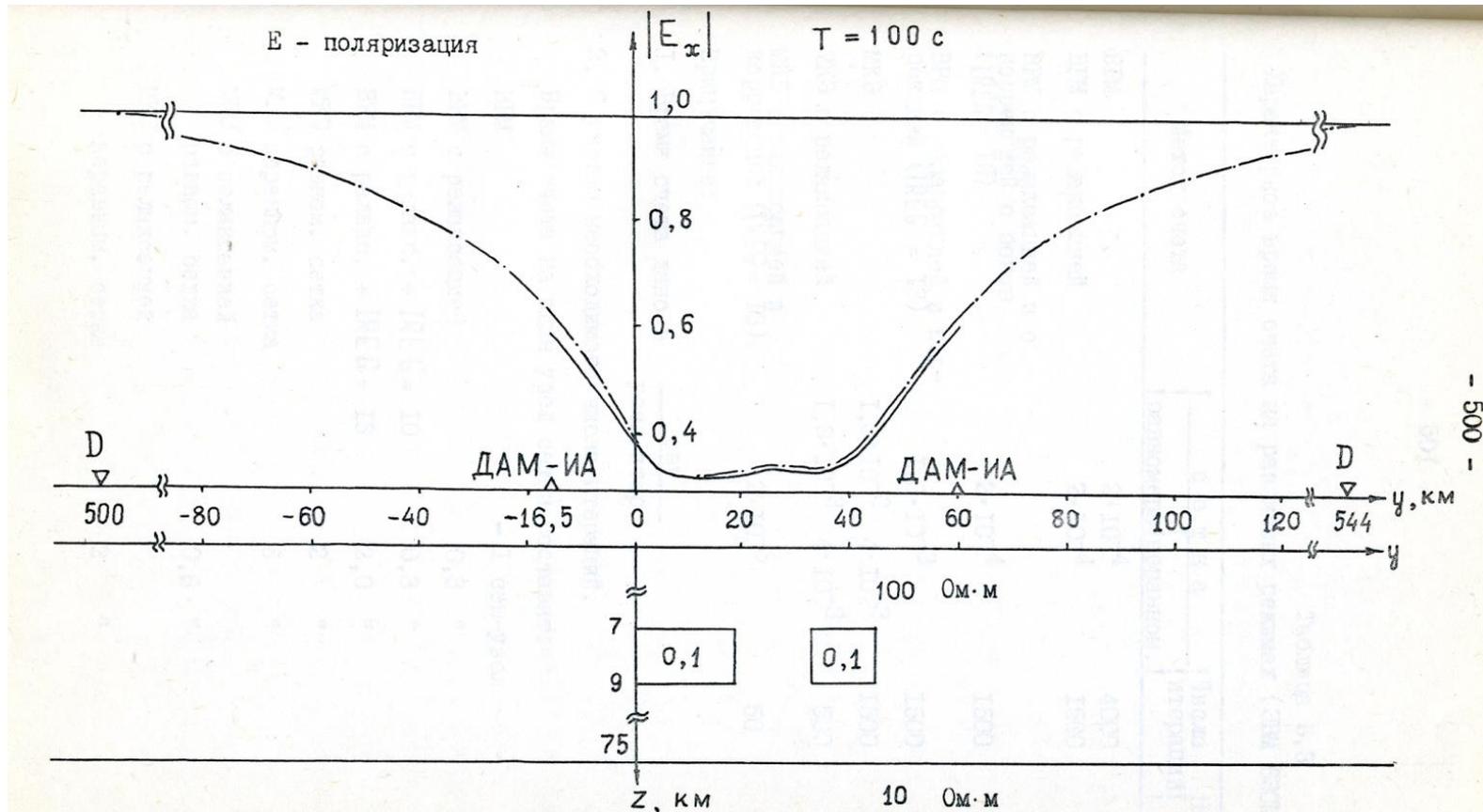
СООТНОШЕНИЕ РАЗМЕРОВ ОБЛАСТЕЙ  
ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ  
РАСЧЕТОВ:

1 - условия ДИРИХЛЕ НА ВСЕХ  
ГРАНИЦАХ (НОРМАЛЬНЫЕ ПОЛЯ),  
2 - условия ДИРИХЛЕ НА БОКОВЫХ  
И ДАМ-БПФ НА ВЕРХНЕЙ И  
НИЖНЕЙ ГРАНИЦАХ (БПФ –  
БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ),  
3 - ИНТЕГРАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА  
(ИА) ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА  
БОКОВЫХ И ДАМ-БПФ НА ВЕРХНЕЙ  
И НИЖНЕЙ ГРАНИЦАХ.

Для простых моделей  
ПЛОЩАДЬ РАСЧЕТНОЙ  
ОБЛАСТИ ЗА СЧЕТ  
ДЕКОМПОЗИЦИИ МОЖЕТ БЫТЬ  
УМЕНЬШЕНА ПОЧТИ НА ДВА  
ПОРЯДКА.

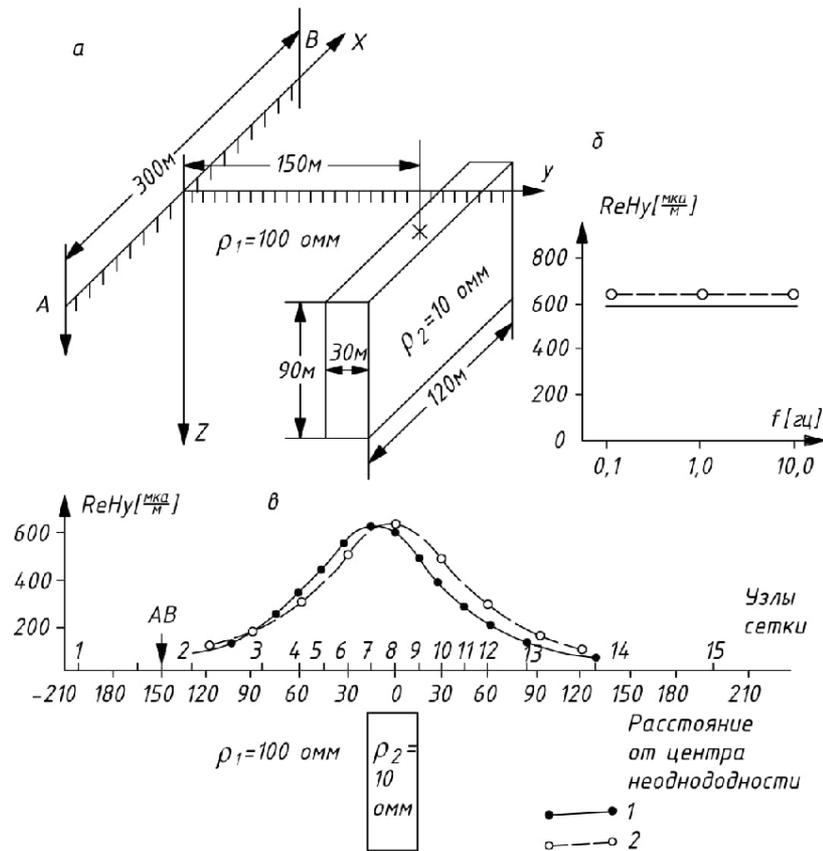
# 7. Результаты численных экспериментов (2D)

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ ПОЛЯ  $E_x$  ПРИ РАЗЛИЧНОМ ЗАДАНИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ:  
ШТРИХ-ПУНКТИР – УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ НА ВСЕХ ГРАНИЦАХ,  
СПЛОШНАЯ ЛИНИЯ – НА БОКОВЫХ ГРАНИЦАХ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ УТОЧНЯЛИСЬ В СОГЛАСИИ С АЛГОРИТМОМ ДАМ-ИА



# 8. Результаты численных экспериментов (3D)

## А. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ НАД ТРЕХМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ



Источником электромагнитного поля является линия АВ, длиной 300 м. ТРЕХМЕРНАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ РАЗМЕРОМ 30x120x90 с СОПРОТИВЛЕНИЕМ 10 ОММ ПОГРУЖЕНА НА ГЛУБИНУ 30 м. ПО ПРОФИЛЮ, ПРОХОДЯЩЕМУ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР НЕОДНОРОДНОСТИ В ЭКВАТОРЕ ЛИНИИ АВ, ХОРОШО СОГЛАСУЮТСЯ МЕЖДУ СОБОЙ. ОДНАКО МАКСИМУМ РАССЧИТАННОЙ НАМИ КРИВОЙ СМЕЩЕН В СТОРОНУ ИСТОЧНИКА, ЧТО С ФИЗИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ БОЛЕЕ ОПРАВДАНЫМ, ЧЕМ ПОВЕДЕНИЕ КРИВОЙ, ПОЛУЧЕННОЙ ПО МИУ.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ:

1 – РАСЧЕТ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ [Юдин М.Н., Киселев Е.С., 1985],

2 - МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ G.V.НОММАНН [1971];

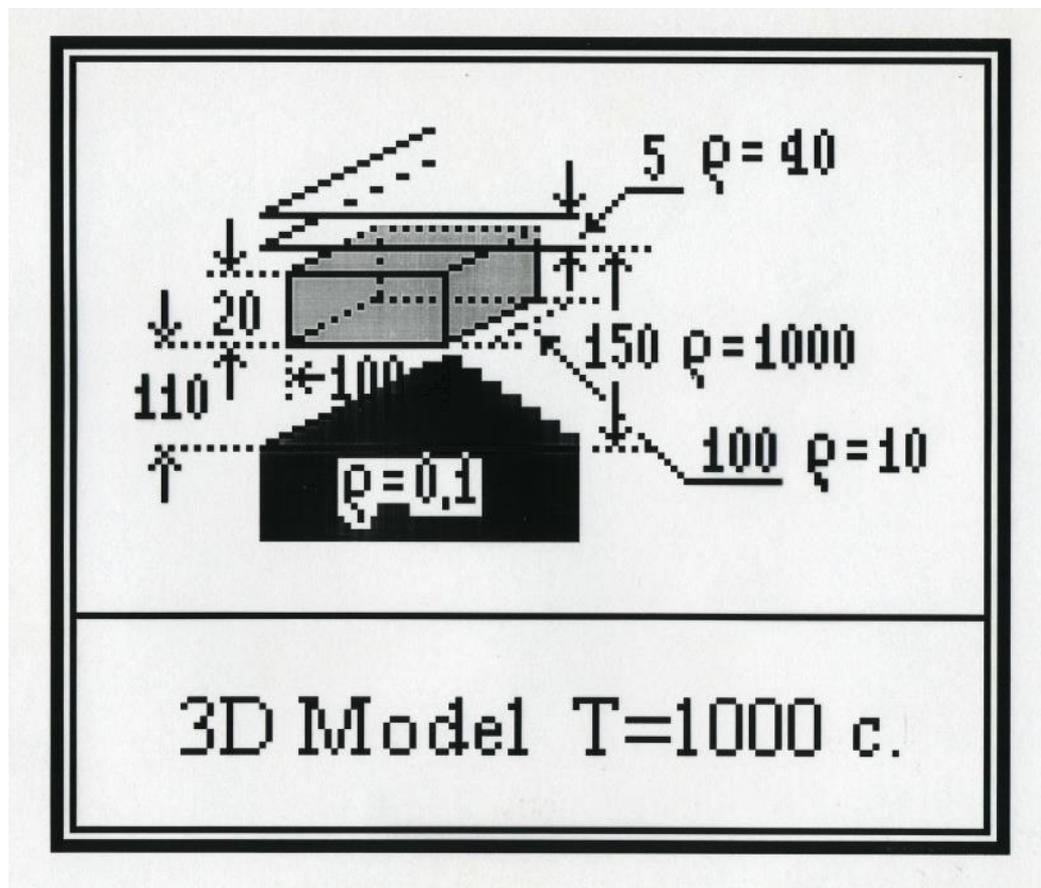
А – МОДЕЛЬ СРЕДЫ И ИСТОЧНИКА,

Б – ЗАВИСИМОСТЬ  $RE H_y$  ОТ ЧАСТОТЫ  $F$ ,

В – ЗАВИСИМОСТЬ  $RE H_y$  ПО ПРОФИЛЮ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР ВСТАВКИ ( $F = 1$  ГЦ).

## 8. Результаты численных экспериментов (3D)

### Б. РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НАД ТРЕХМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ



Для модели среды, изображенной слева, в 1979 году на ЭВМ БЭСМ-6 ВЦ ВНИИГеофизики были выполнены расчеты всех компонент 3D ЭМ-полей. Далее изображены графики амплитуд компонент полей на поверхности земли.

## 8. Результаты численных экспериментов (3D)

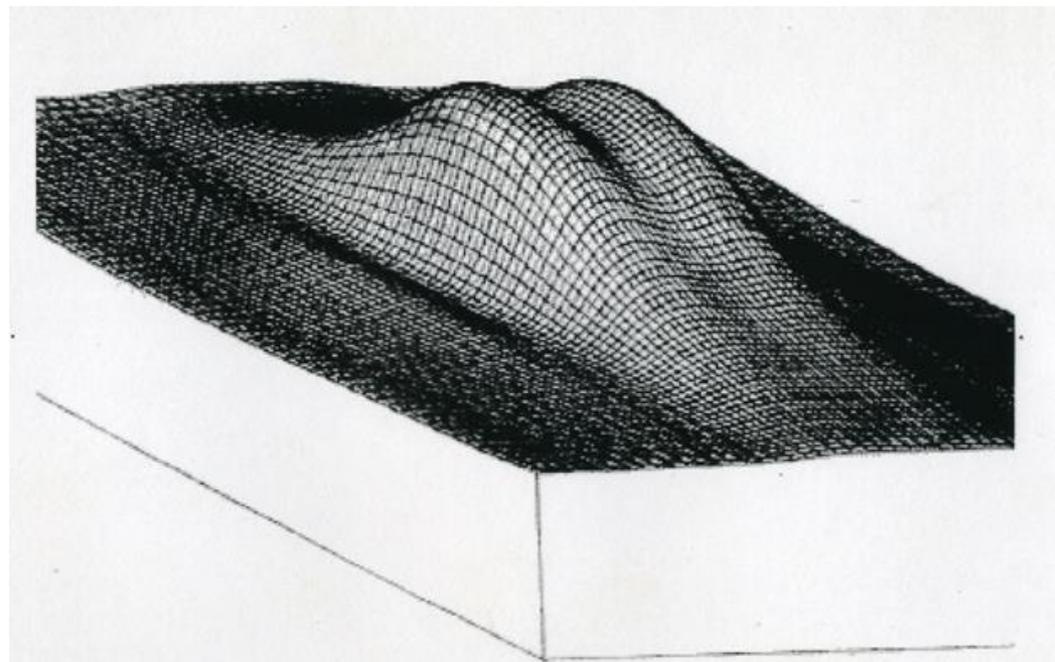
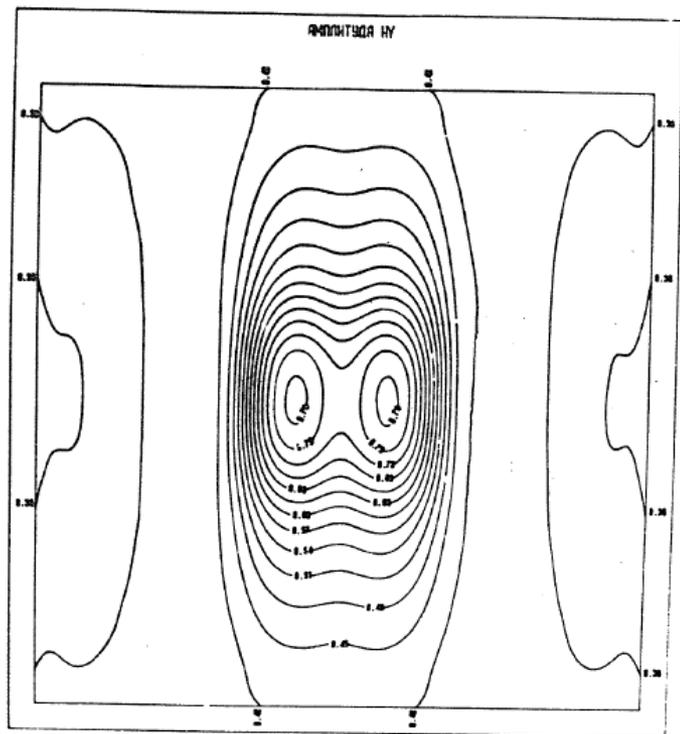


ГРАФИК  $|H_y|$  НАД ВСТАВКОЙ ( $T = 1000$  с).

## 8. Результаты численных экспериментов (3D)

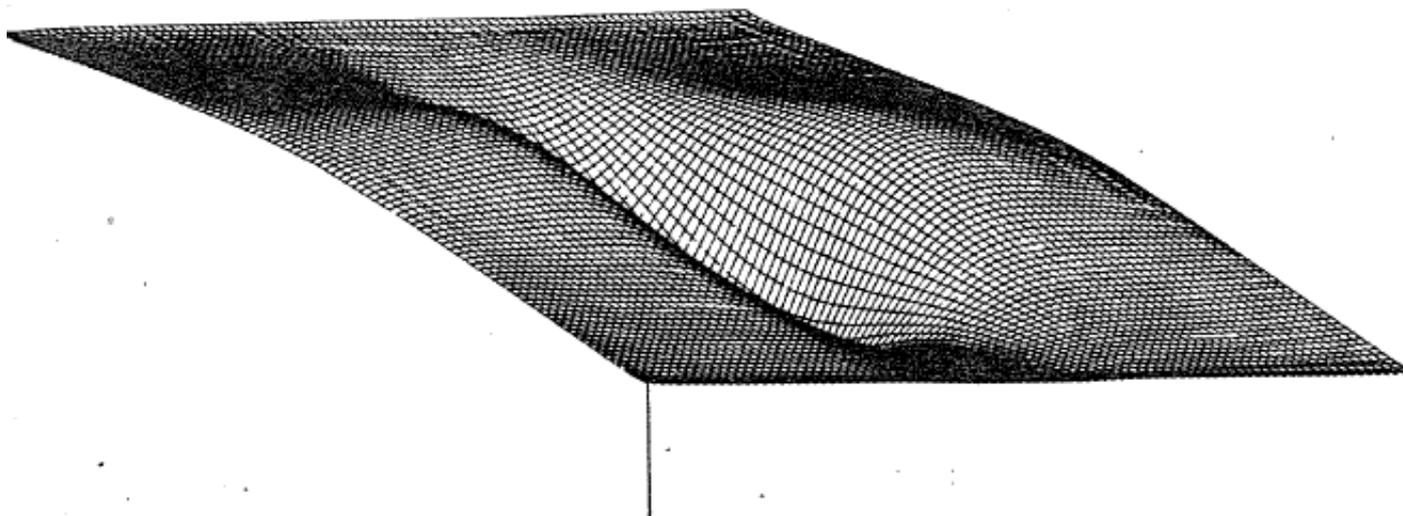


График  $|E_x|$  над вставкой ( $T = 1000$  с).

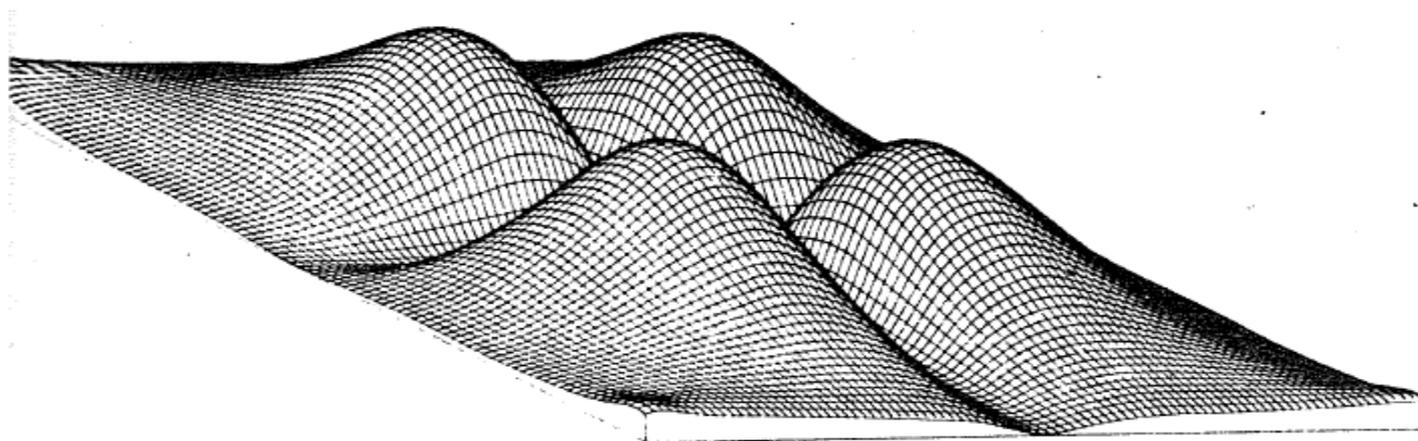


График  $|H_z|$  над вставкой ( $T = 1000$  с).

## 9. Алгоритмы Шварца и параллельные вычисления на мультипроцессорных системах

A. Overlapping Domain Decomposition Methods

Б. Nonoverlapping Domain Decomposition Methods

1. X. Cai;2 Overlapping Domain Decomposition Methods

2. A. M. Bruaset, X. Cai, H. P. Langtangen, and A. Tveito. Numerical solution of PDEs on parallel computers utilizing sequential simulators. In Y. Ishikawa et al., editor, *Scientific Computing in Object-Oriented Parallel Environment*,

Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science 1343, pages 161–168. Springer-Verlag, 1997.

3. X. Cai, E. Acklam, H. P. Langtangen, and A. Tveito. Parallel computing in Diffpack. In H. P. Langtangen and A. Tveito, editors, *Advanced Topics in Computational Partial Differential Equations – Numerical Methods and Diffpack Programming*. Springer, 2003

# 10. Литература

1. Schwartz H.A.(1870), "Über einen Grenzübergang du-rch alternierendes Verfahren", Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 15: 272–286.
2. Ваньян Л.Л., Дебабов А.С., Юдин М.Н. Интерпретация магнитотеллурических зондирований неоднородных сред. М., Недра, 1984 - 197 с.
3. Завадский Ю.В. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. –М.: Наука, 1972. 557 с.
4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. –М.: Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
5. Юдин М.Н. Применение альтернирующего метода Шварца для численного решения задач геоэлектрики. Изв. ВУЗов, Геология а разведка, деп. в ВИНТИ 12.03.82, 19 с. ,№. 1047-82 Деп.
6. Юдин М.Н. Алгоритмы решения внешних краевых задач для основных моделей геоэлектрики. Изв. ВУЗов, Геология и разведка, М., 1984, деп. в ВИНТИ 11.09.84, 40 с. ,№ 6153-84 Деп.
7. Yudin M.N. Mathematical Model Study of Electromagnetic Induction for Decomposal Alternating Method. 10-th Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth. August 22-29,1990. Ensenada, Maxico.
8. Юдин М.Н., Калищенко Т.В., Юдин В.М. О применении вейвлет-преобразования и альтернирующего метода Шварца для решения некоторых задач геоэлектрики. М., МГГА, Материалы международной конференции «Новое в науках о земле», М.,2002, с. 311-325.
9. Юдин М.Н., Юдин В.М.. О декомпозиции прямых задач геоэлектрики на основе алгоритма Шварца. Изв. РАН, Физика Земли, №4, 2004, с. 3-11
10. Юдин М.Н., Спасский Б.А. Об оценке сходимости модифицированного алгоритма Шварца в прямой задаче ВЭЗ. Геофизика, № 5, М., 2016, с.23-31.
11. X. Cai;2 Overlapping Domain Decomposition Methods
12. A. M. Bruaset, X. Cai, H. P. Langtangen, and A. Tveito. Numerical solution of PDEs on parallel computers utilizing sequential simulators. In Y. Ishikawa et al., editor, Scientific Computing in Object-Oriented Parallel Environment,
13. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science 1343, pages 161–168. Springer-Verlag, 1997.
14. 2. X. Cai, E. Acklam, H. P. Langtangen, and A. Tveito. Parallel computing in Diffpack. In H. P. Langtangen and A. Tveito, editors, Advanced Topics in Computational Partial Differential Equations – Numerical Methods and Diffpack Programming. Springer, 2003.
15. Filatov D.M., Alexandrov M.A., Yudin M.N.. Alternating Decomposition Method and its applications to solving partial differential equation. 19th Biennial Conference on Numerical Analysis. 26-29 University Of Dundee, England, June,2001

# 11. Внедрение в производственные и научные организации

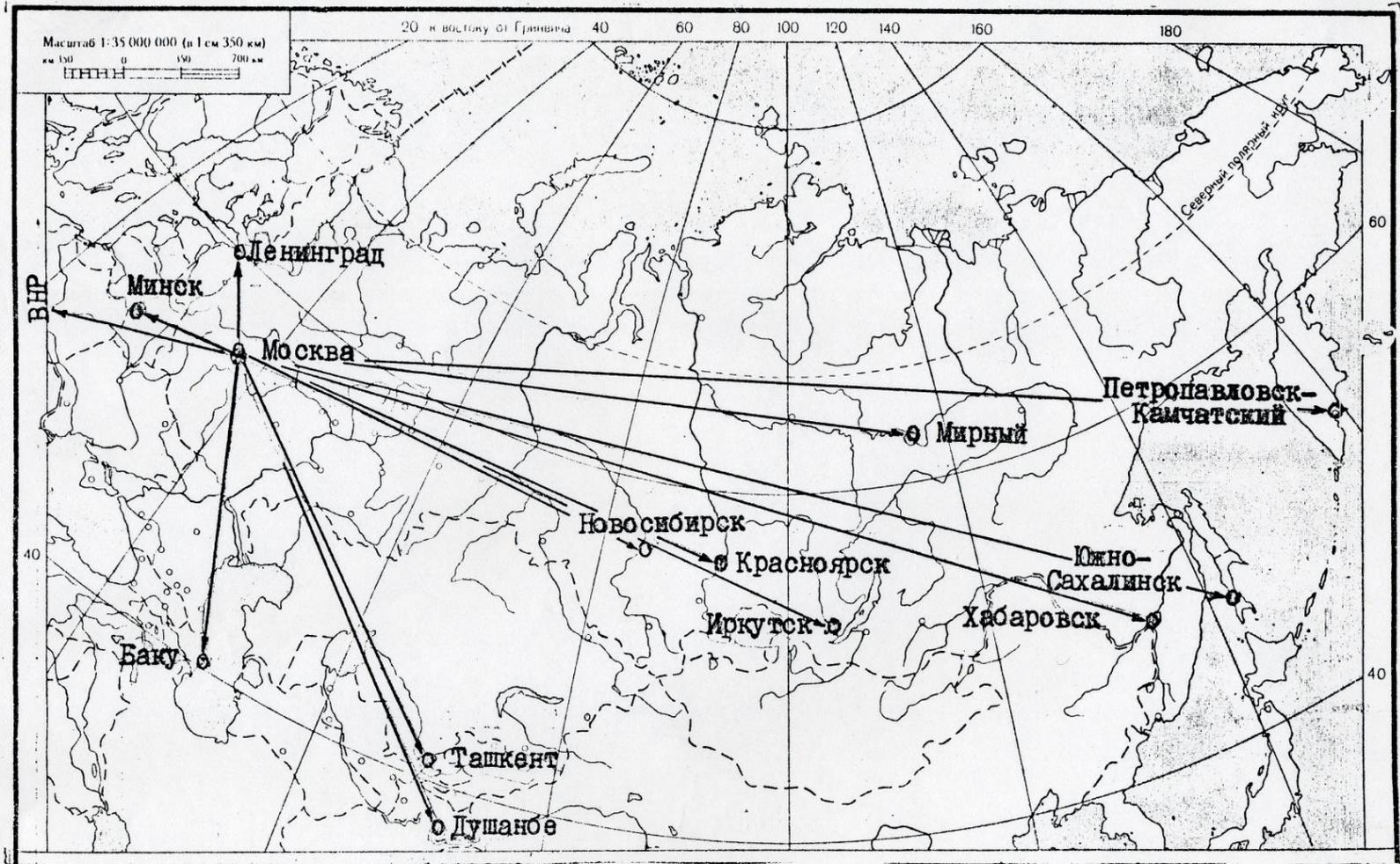


РИС. 0.1. Карта внедрения программного обеспечения

Спасибо за внимание