

ЮДИН М.Н. ЮДИН В.М. СЕВОСТЬЯНОВ Н.А.

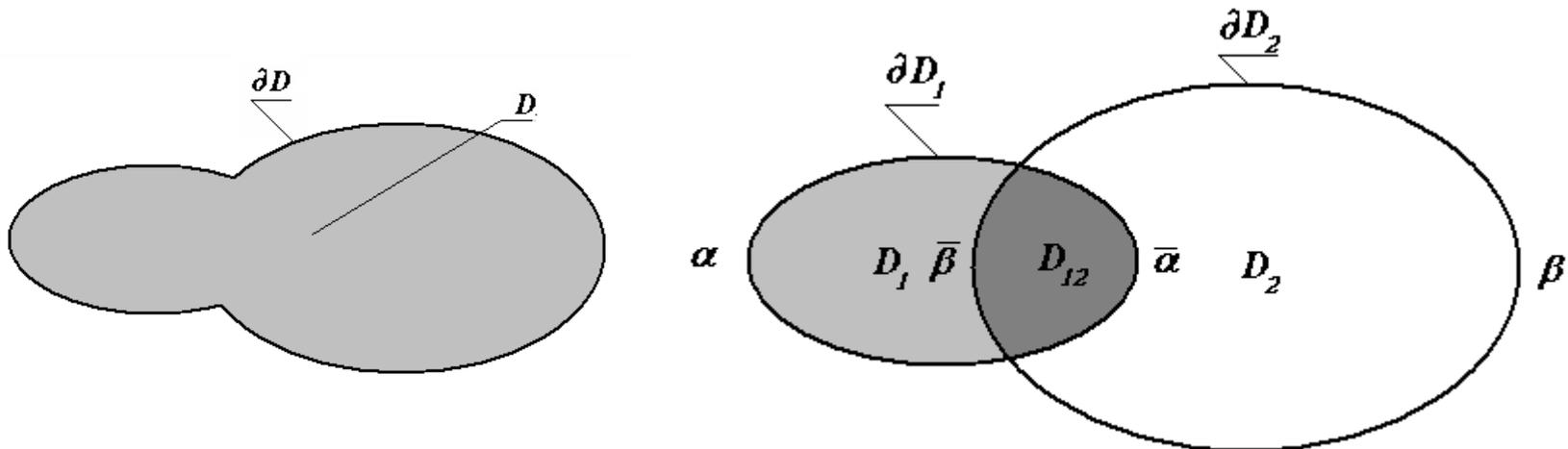
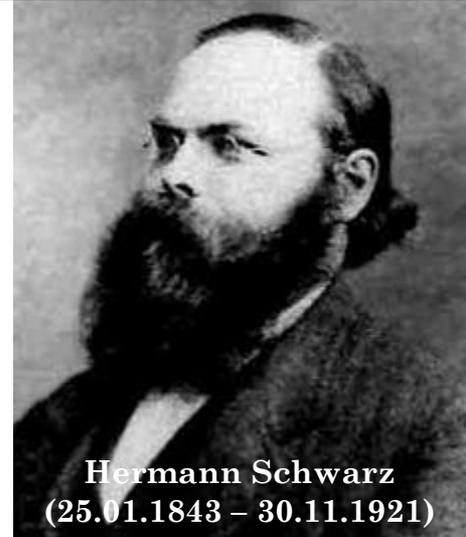
**О РАСЧЕТЕ АНОМАЛЬНЫХ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В
СЛОИСТОЙ СРЕДЕ**

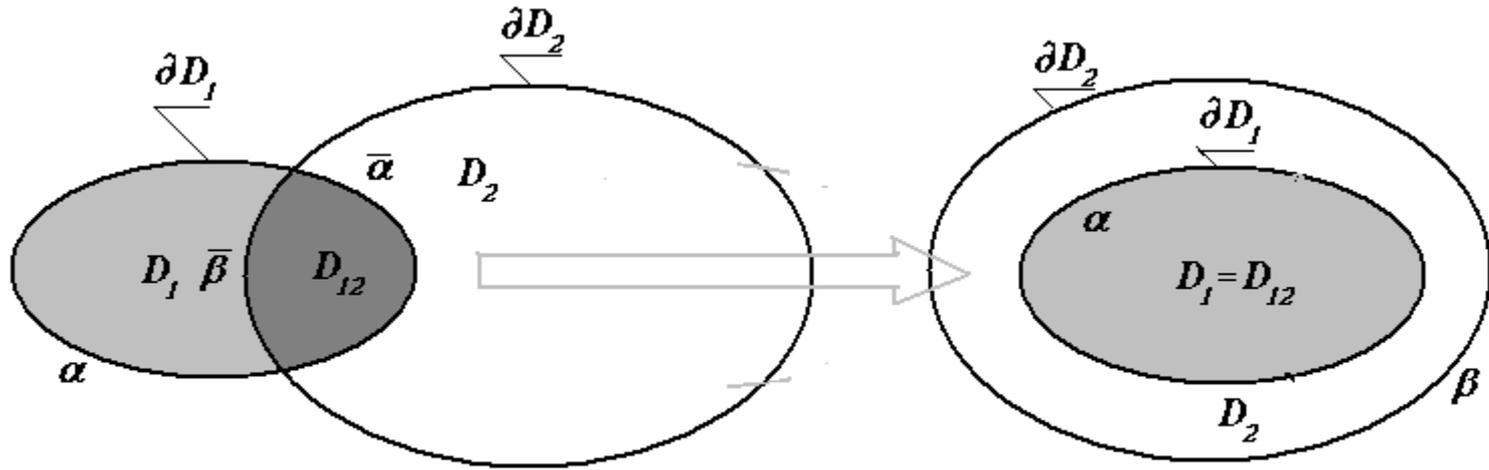
1. Классический алгоритм Шварца
2. Модифицированный алгоритм Шварца
3. Адаптация метода к задачам геоэлектрики
4. Пример 1. МТЗ-2D. E-поляризация. Модель горста
5. Пример 2. ВЭЗ-3D. Вставка в слоистой среде
6. Приближенное решение трехмерной задачи
7. Расчет начального приближения
8. Аномальная часть компоненты E_x на поверхности земли
9. Решение задачи в горизонтально слоистой среде
10. Нормальное поле в слоистой среде в области изображений
11. Нормальный потенциал внутри вставки (осесимметричная математическая модель)
12. Аномальные потенциалы и их источники
13. О расчете аномальных электромагнитных полей в слоистой среде
14. Расчет функции $\psi(z)$ в области изображений (на примере вставки «кирпич»)
15. Решение неоднородного уравнения
16. Трехмерное поле в неоднородной локальной вставке
17. Выводы

КЛАССИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ШВАРЦА

Карл Герман Амадеус Шварц - немецкий математик.
Schwartz H.A.(1870), "Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren", Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 15: 272–286.

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in D, \\ u|_{\partial D} = \varphi(M), M \in \partial D. \end{cases}$$





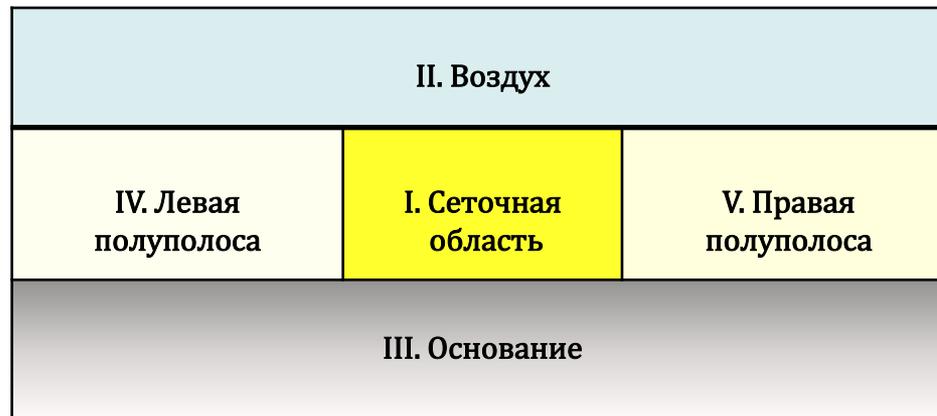
$$\begin{cases} \Delta u_2 - k_2^2(x, y)u_2 = \psi^{(m)}(x, y), (x, y) \in D_2, \\ [u]_{\partial D_1} = 0, \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial D_1} = 0, u_2|_{\partial D} = \varphi(M), M \in \partial D_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_1 - k_1^2(x, y)u_1 = 0, (x, y) \in D_1, \\ u_1|_{\partial D_1} = u_2^{(m-1)}|_{\partial D_1}, M \in \partial D_1. \end{cases}$$

Для реализации АМШ нужно уметь решать два класса задач.

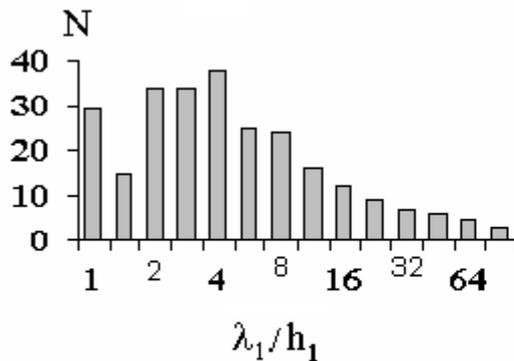
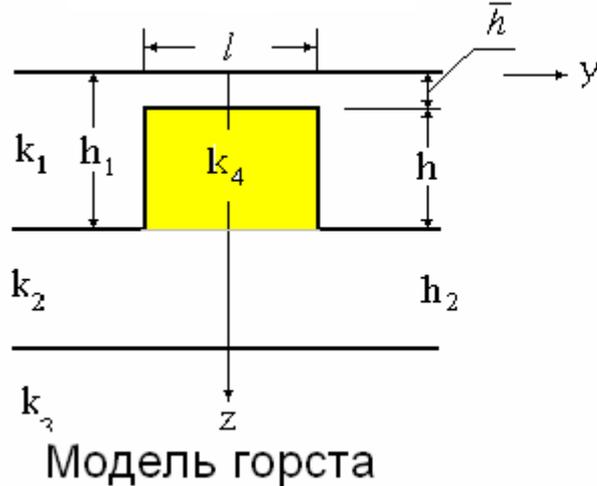
1. Внешние краевые задачи - задачи в неограниченных областях II-V для относительно простых моделей (чаще – одномерных горизонтально- слоистых (кусочно-постоянных) сред. Потенциал в слоистой среде U_n называют нормальным (фоновым).

2. Внутренние краевые задачи - задачи в ограниченной области I, в которой распределение свойств среды может быть достаточно произвольным. Отклонение полного потенциала U от фонового U_n , вызванное локальной неоднородностью, называют аномальным потенциалом U_a .



ПРИМЕР 1. МТЗ-2D. Е-ПОЛЯРИЗАЦИЯ. МОДЕЛЬ ГОРСТА

На графиках справа приведено сравнение результатов расчетов по методу интегральных уравнений [Дмитриев, Кокотушкин, 1971] (сплошные линии) и по модифицированному алгоритму Шварца [Юдин, Юдин, 2004] (символы).



Количество итераций

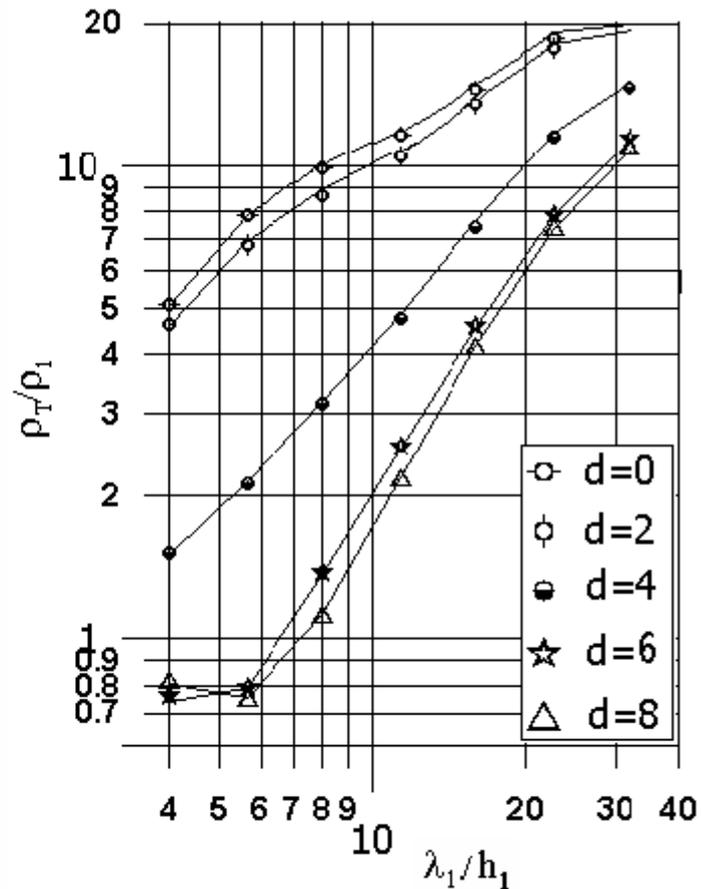
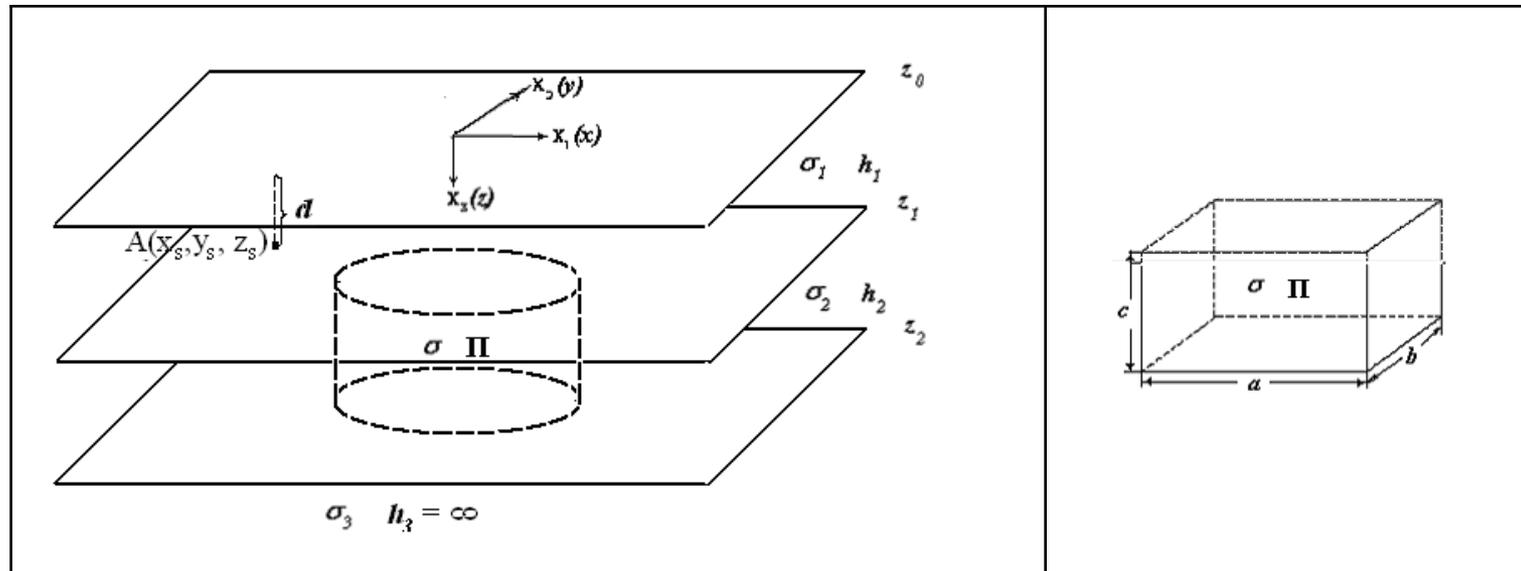


График $|\rho_T|/\rho_1$

ПРИМЕР 2. ВЭЗ-3D. ВСТАВКА В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Модель источника: точечный источник A в первом слое на глубине $d \geq 0$.

Модель среды: локальная вставка во втором слое трехслойного разреза (прямой цилиндр или «кирпич»)

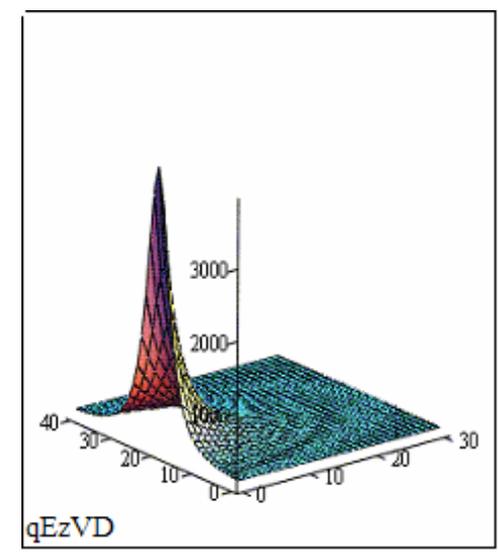
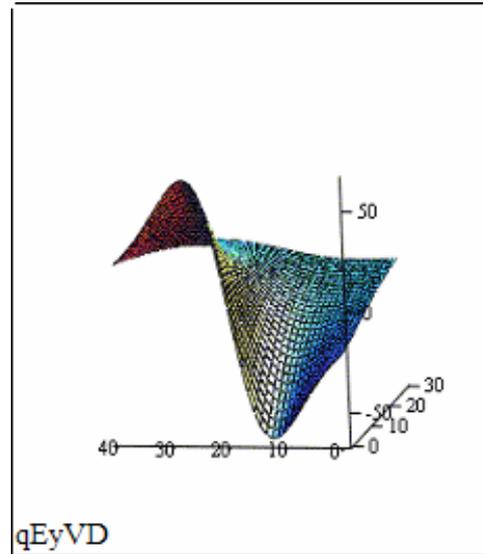
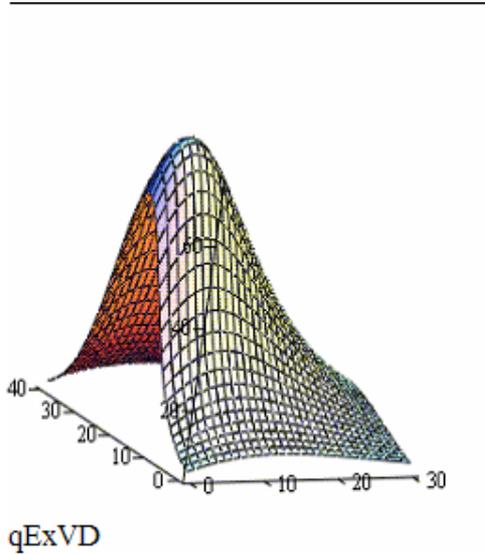


1. Разобьем вставку на некоторое количество элементарных прямоугольных параллелепипедов.
2. Рассчитать трехмерный массив нормальных полей в центре каждой ячейки.
3. Вычислить моменты фиктивных диполей (рис.). Следуя работе [Hvozdar, 1984], моменты эквивалентных диполей примем равными

$$I_{\alpha,k,j,i} := \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_1 + \rho_2} 3\nu\sigma_1 E_{\alpha,k,j,i}^n, \quad \alpha = x, y, z$$

4. Пользуясь формулами для вычисления компонент поля погруженных двух горизонтальных и одного вертикального электрического диполя рассчитать компоненты аномального поля в произвольной точке поверхности земли с координатами $(x, y, 0)$.

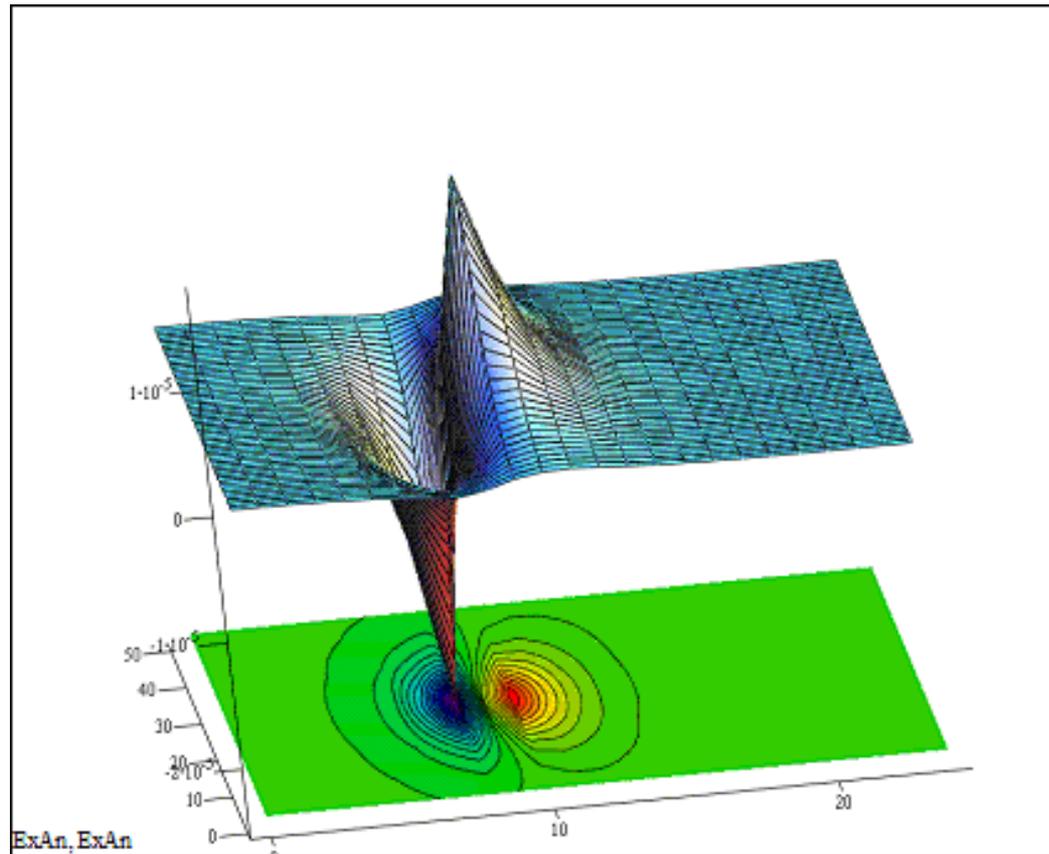
РАСЧЕТ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)



Плотность фиктивных дипольных моментов в неоднородности, ориентированных в направлении оси Ox , Oy , Oz (слева направо). Источник на одном уровне с неоднородностью на расстоянии 1 км от центра длинной стороны вставки (левее узла 20 на вертикальной оси рисунка).

АНОМАЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОМПОНЕНТЫ E_x НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Качественная картина аномальной части компоненты E_x на поверхности земли. Сопротивление вставки 1 ом. Диполь на глубине 1.75 км в 1 км от середины длинной стороны вставки (в середине левой стороны графика).



ПОТЕНЦИАЛ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ.

Поле точечного источника обладает осевой симметрией.

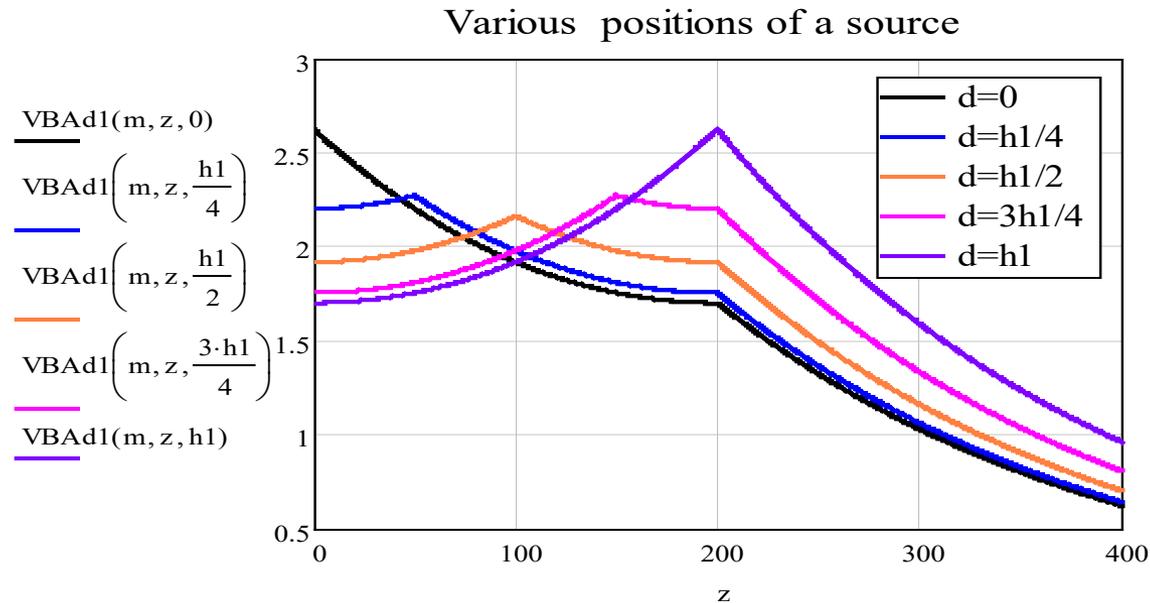
Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат (r, z) :

$$\Delta U(r, z) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Интегральное представление потенциала точечного источника, расположенного на поверхности земли

$$U_1(x, y, z) = \frac{J\rho}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|} = \frac{J\rho}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda r) d\lambda$$

НОРМАЛЬНОЕ ПОЛЕ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ В ОБЛАСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

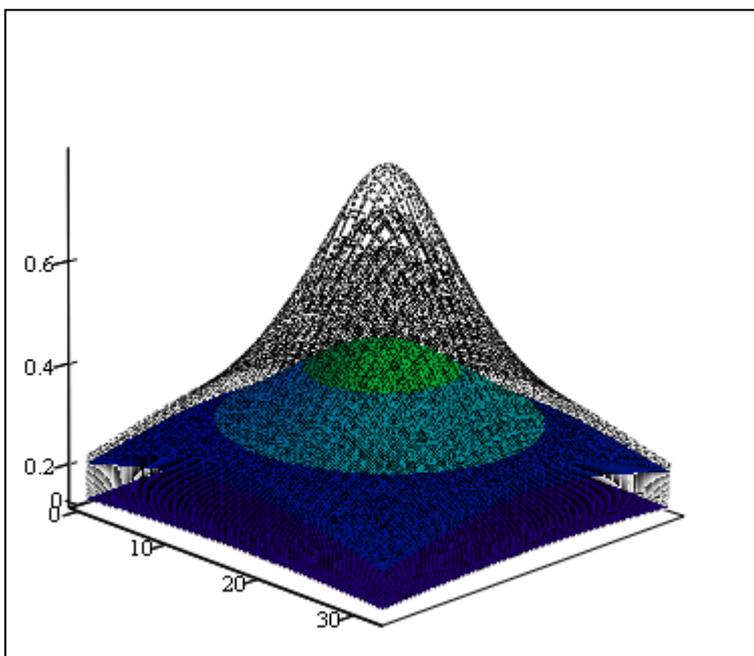


Изменение нормального потенциала в спектральной области при различном погружении точечного источника в первом слое:

$d=0$ - на поверхности земли, $d=h_1$ - в подошве первого слоя.

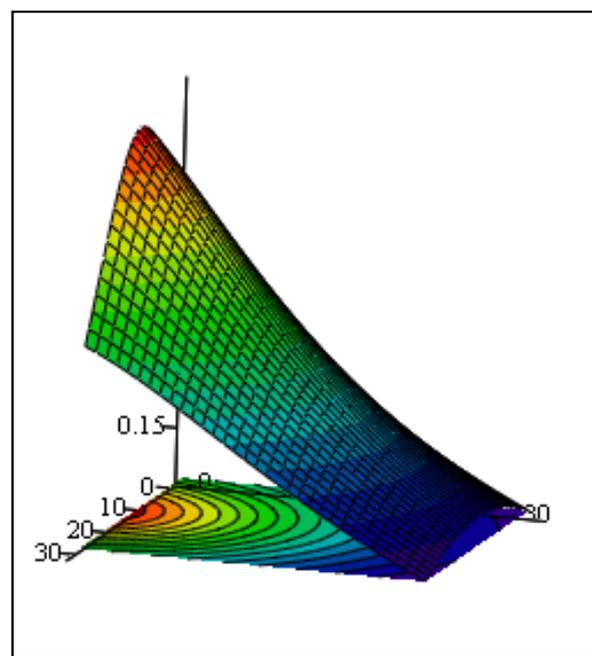
НОРМАЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВНУТРИ ВСТАВКИ (ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ)

Графики нормального поля во вставке для различных аппликат



$Un\Pi$

Графики нормального поля во на боковых гранях вставки



$Brds Val_2, Brds Val_2$

Ищем решение U в виде суммы известного нормального потенциала в слоистой среде U_n и аномальной части потенциала U_a , учитывающего влияние вставки: $U = U_n + U_a$.

Два вида уравнений для аномального потенциала U_a :

$$\operatorname{div}(\sigma_n \operatorname{grad} U_a(P)) = \operatorname{div} \mathbf{j}_a(P), \quad \mathbf{j}_a(P) = (\sigma(P) - \sigma_n) \operatorname{grad} U(P),$$

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} U_a)(P) = \operatorname{div} \bar{\mathbf{j}}_a(P). \quad \bar{\mathbf{j}}_a(P) = (\sigma(P) - \sigma_n) \operatorname{grad} U_n(P)$$

Источником аномальной части потенциала являются избыточные токи \mathbf{j}_a , не равные нулю внутри локального тела Π и равные нулю вне него:

$$\mathbf{j}_a(P) = \begin{cases} (\sigma - \sigma_n) \operatorname{grad} U(P) & P \in \Pi, \\ 0, & P \notin \Pi. \end{cases} \quad \bar{\mathbf{j}}_a(P) = \begin{cases} (\sigma - \sigma_n) \operatorname{grad} U_n(P) & P \in \Pi, \\ 0, & P \notin \Pi. \end{cases}$$

ВНЕШНЯЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА.

Применим двумерное преобразование F (Фурье или Фурье-Бесселя) по пространственным переменным (x, y или r) к этой задаче:

$$\widehat{u}_m(\alpha, \beta, z) := F(U_a(x, y, z)).$$

Относительно спектральной плотности $u_m(\alpha, \beta, z)$ в m -том слое приходим к задаче вида :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \widehat{u}_m}{dz^2} = \eta_m^2 \widehat{u}_m + \widetilde{\psi}_m(z), \quad \eta^2 = \alpha^2 + \beta^2, \\ [\widehat{u}_m] = 0, \quad [\sigma \widehat{u}'_m] = 0, \quad \widehat{u}_j \Big|_{z=z_{j-1}} = \bar{u}_j, \quad \widehat{u}_N \Big|_{z=z_N} = \bar{u}_N. \end{cases}$$

с численно заданными источниками

$$\widetilde{\Psi}_m(\eta, z) = F(\operatorname{div} \mathbf{j}_a(r, z))$$

аномального потенциала и граничными значениями \bar{u}_j, \bar{u}_N .

Расчет функции $\psi(z)$ m -том слое в области изображений требует специального рассмотрения.

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $\psi(\mathbf{Z})$ В ОБЛАСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ (НА ПРИМЕРЕ ВСТАВКИ «КИРПИЧ»)

Определим характеристическую функцию одной переменной $\chi_\tau(\xi)$ (прямоугольный импульс ширины τ)

$$\Phi_\tau(\xi) := \chi_\tau(\xi) := \theta(\xi + \tau/2) - \theta(\xi - \tau/2) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq \tau/2, \\ 0 & |\xi| > \tau/2. \end{cases}$$

Здесь $\theta(\xi)$ -функция Хевисайда.

Обобщенная производная $\theta'(\xi)$ равна дельта-функции $\delta(\xi)$, поэтому

$$\Phi'_\tau(\xi) := \chi'_\tau(\xi) := \theta'(\xi + \tau/2) - \theta'(\xi - \tau/2) = \delta(\xi + \tau/2) - \delta(\xi - \tau/2)$$

Пусть $\chi(\Pi)$ характеристическая функция множества точек, принадлежащих Π

$$\chi(\Pi) = \begin{cases} 1, & (x, y, z) \in \bar{\Pi}, \\ 0, & (x, y, z) \in R^3 \setminus \bar{\Pi}. \end{cases}$$

Если область Π – однородный по проводимости прямоугольный параллелепипед, то

$$\chi(\Pi) = \chi_a(x)\chi_b(y)\chi_c(z).$$

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $\psi(\mathbf{Z})$ В ОБЛАСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Двумерное преобразование Фурье F_2 по переменным x и y

$$\widehat{\psi}(\alpha, \beta, z) := -(\sigma/\sigma_n - 1) [\widetilde{\Psi}(\eta, z)], \quad \eta := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}(\alpha, \beta, z) &:= F_2^{x,y} \{ \operatorname{div}[\chi(\Pi) \operatorname{grad} U] \} = \iint_{R^2} \operatorname{div}[\chi(\Pi) \operatorname{grad} U] e^{-i\alpha x} e^{-i\beta y} dx dy = \\ &= \chi_c(z_c) \{ i\alpha [\widehat{U}^{(b/2)}(a/2, \beta, z) e^{-i\alpha a/2} - \widehat{U}^{(b/2)}(-a/2, \beta, z) e^{i\alpha a/2}] + \\ &\quad + i\beta [\widetilde{U}^{(a/2)}(\alpha, b/2, z) e^{-i\beta b/2} - \widetilde{U}^{(a/2)}(\alpha, -b/2, z) e^{i\beta b/2}] + \\ &\quad + [(\delta(z + c/2) - \delta(z - c/2)) \widetilde{U}_z(\alpha, \beta, z)] \} + \\ &\quad + \widetilde{U}_{zz}(\alpha, \beta, z) - \eta^2 \widetilde{U}(\alpha, \beta, z). \end{aligned}$$

$$\widehat{U}^{(b/2)}(\pm a/2, \beta, z) := \int_{-b/2}^{b/2} U(\pm a/2, y, z) e^{-i\beta y} dy \quad \widehat{U}^{(a/2)}(\alpha, \pm b/2, z) := \int_{-a/2}^{a/2} U(x, \pm b/2, z) e^{-i\alpha x} dx$$

$$\widetilde{U}(\alpha, \beta, z) := \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} U(x, y, z) e^{-i\alpha x} e^{-i\beta y} dx dy \quad \widetilde{U}_z(\alpha, \beta, z) := \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} U_z(x, y, z) e^{-i\alpha x} e^{-i\beta y} dx dy$$

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Решение неоднородного уравнения $\varphi_m(z, \eta)$ в m -том слое строится либо с помощью метода вариации произвольных постоянных, либо посредством функции Грина. Функция Грина $G(z, \zeta, \eta, h_m)$ для одномерного уравнения Гельмгольца известна:

$$G(\bar{z}, \zeta; \eta, h_m) = \begin{cases} \frac{\text{sh}[\eta(h_m - \zeta)] \text{sh}(\eta \bar{z})}{\eta \text{sh}(\eta h_m)}, & \bar{z} \leq \zeta, \eta > 0, \\ \frac{\text{sh}(\eta \zeta) \text{sh}[\eta(h_m - \bar{z})]}{\eta \text{sh}(\eta h_m)}, & \bar{z} \geq \zeta, \eta > 0. \end{cases}$$

С ее помощью запишем решение неоднородного уравнения $\varphi_m(z)$:

$$\tilde{\varphi}_m(z, \eta) := - \int_0^{h_m} \tilde{\psi}_m(\xi, \eta) G(\xi, z; \eta, h_m) d\xi,$$

Решение задачи в слоистой среде потребует выполнение условий сопряжения на границах пластов. Правая часть регулярного уравнения, соответствующего границе между m -тым и $m+1$ -м слоем (в локальных координатах) равна

$$g_m := -\sigma_m \varphi'_m(h_m) + \sigma_{m+1} \varphi'_{m+1}(0).$$

Алгоритм Шварца потребует решение задачи Дирихле в локальных телах .

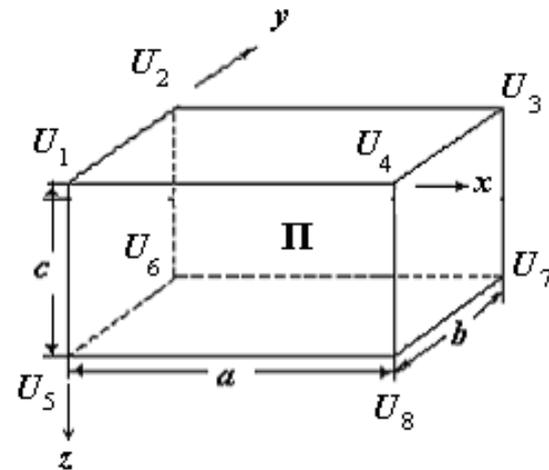
Пример. Найти функцию $u(x,y,z)$, гармоническую в области Π , непрерывную в замкнутой области и удовлетворяющую условиям Дирихле на границе $\partial\Pi$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

$$u_1|_{x=0} = f_1(y, z); u_1|_{x=a} = f_2(y, z);$$

$$u_2|_{y=0} = f_3(x, z); u_2|_{y=b} = f_4(x, z);$$

$$u_3|_{z=0} = f_5(x, y); u_3|_{z=c} = f_6(x, y).$$



Задача Дирихле для уравнения Лапласа внутри однородного по проводимости тела Π может быть решена методом разделения переменных [Будак и др., 2003].

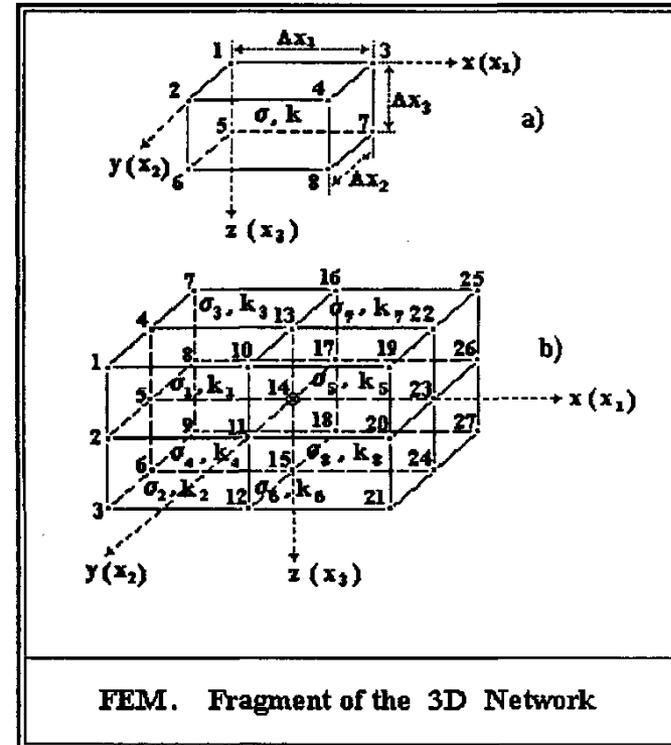
ТРЕХМЕРНОЕ ПОЛЕ В НЕОДНОРОДНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ ВСТАВКЕ

Внутренняя краевая задача. Численное решение (метод Ритца, МКЭ)

$$G(u) = \int_{\Omega} \left\{ \sigma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 \right] + 2uf \right\} dv,$$

Можно показать, что функционал $G(u)$ стационарен на решении задачи

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = -f, \\ [u]_{\partial \Omega_i} = 0, & \left[\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial \Omega_i} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_e} = 0. \end{cases}$$



ВЫВОДЫ

1. Численные эксперименты позволяют надеяться на высокую скорость сходимости метода за счет максимально возможного пересечения двух областей, участвующих в рамках глобальной декомпозиции задачи.
2. Недостатком модифицированного алгоритма является его чувствительность к контрасту параметров модели среды.
3. Расширения области сходимости метода можно достичь за счет выбора последовательности слоев с невысоким контрастом проводимостей соседних элементов этой множества.
4. Решение сложных трехмерных задач на основе декомпозиционных подходов позволяет свести их к совокупности некоторого числа существенно более простых подзадач. Благодаря этому появляется надежды на включение моделирования трехмерных полей в реальное время в интерпретационный процесс.

1. Будаков Б.М., Самарский А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М., Физматлит, 2003, 688 с.
2. Суворов Ю. П. О применении метода Рунге к решению прямых задач электроразведки. Изв. ВУЗов, Геология и разведка, № 12, 1969.
3. Юдин М.Н., Спасский Б.А. Об оценке сходимости модифицированного алгоритма Шварца в прямой задаче ВЭЗ. Геофизика, №5, 2016, с. 23-31.
4. Юдин М.Н., Юдин В.М. О декомпозиции прямых задач геоэлектрики на основе алгоритма Шварца.. Физика Земли, 4, 2004. 3-11.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ